AstroHUB

Astrofyzika hvězd

Od protohvězdných mlhovin po černé díry

AUTOR

David Pěkník

Datum vydání: 1. 11. 2026
Verze publikace: 1.0

www.astrohub.cz

OBSAH

Úvod a předmluva: Fyzikální architektura stelárního vesmíru 4

0.1 Hvězdy jako termodynamické motory vesmíru 4
0.2 Časové škály stelární dynamiky (dynamická, tepelná, jaderná) 4
0.3 Metodologie moderní stelární astrofyziky a simulační kód MESA 5
0.4 Struktura a didaktický plán monografie 6

ČÁST I: FYZIKA HVĚZDNÝCH INTERIÉRŮ

Kapitola 1 **Rovnice hvězdné stavby a hydrostatická rovnováha** 9

1.1 Hydrostatická rovnováha a rovnice kontinuity hmoty 9
1.2 Stavová rovnice ideálního plynu a radiační tlak fotonů 10
1.3 Viriálový teorém a záporná tepelná kapacita hvězd 10
1.4 Polytropní modely a Lane-Emdenova diferenciální rovnice 11
1.5 Vědecký Python kód a výpočet centrálního tlaku a teploty Slunce 12

Kapitola 2 **Termonukleární fúze pp a CNO** 15

2.1 Kvantový tunelový jev, Coulombovská bariéra a Gamowovo okno 15
2.2 Proton-protonové řetězce (pp-I, pp-II, pp-III) a solární neutrina 16
2.3 Uhlík-dusík-kyslíkový cyklus (CNO) a teplotní citlivost 17
2.4 Spalování helia (3-alfa proces) a pokročilá hoření jader 17
2.5 Vědecký Python kód a úbytek hmotnosti Slunce za sekundu 18

Kapitola 3 **Přenos energie zářením a konvekcí** 20

3.1 Rovnice zachování a produkce energie v plazmatu 20
3.2 Radiační difúze fotonů, Rosselandova opacita a Kramersův zákon 20
3.3 Schwarzschildovo a Ledouxovo kritérium stability vůči konvekci 21
3.4 Teorie směšovací délky (Böhm-Vitense MLT) 22
3.5 Vědecký Python kód a difúzní doba fotonu ze slunečního jádra 22

ČÁST II: HVĚZDNÉ ATMOSFÉRY A SPEKTROSKOPICKÁ DIAGNOSTIKA

Kapitola 4 **Radiativní transfer v atmosféře** 26

4.1 Radiometrické veličiny zářivého pole (intenzita, tok, tlak záření) 26
4.2 Rovnice radiačního transferu a optická hloubka 26
4.3 Lokální termodynamická rovnováha (LTE) a Kirchhoffův zákon 27
4.4 Eddingtonova-Barbierova aproximace a okrajové ztemnění 27
4.5 Šedá atmosféra a Milneovo-Eddingtonovo řešení fotosféry 28

Kapitola 5 **Vznik absorpčních a emisních čar, křivka růstu** 31

5.1 Atomární přechody, Einsteinovy koeficienty a oscilátorové síly 31
5.2 Boltzmannova a Sahova rovnice a spektrální třídy OBAFGKM 32
5.3 Mechanismy rozšíření čar: přirozené, Dopplerovo a tlakové 32
5.4 Voigtův profil a křivka růstu ekvivalentní šířky čáry 33
5.5 Vědecký Python kód a ionizační rovnováha A0V vs Slunce 34

OBSAH (POKRAČOVÁNÍ)

ČÁST III: VÝVOJ HVĚZD A PULZACE

Kapitola 6 **Od protohvězdy na hlavní posloupnost** **39**

6.1 Jeansovo kritérium gravitační nestability a molekulární mračna 39
6.2 Izotermální kolaps, fragmentace a vznik hydrostatického jádra 39
6.3 Hvězdy typu T Tauri, akreční disky a Herbigovy-Haroovy objekty 40
6.4 Hayashiho konvektivní stopa a Henyeyova radiativní stopa 41
6.5 Dosažení ZAMS a výpočet parametrů oblaku v Býku v Pythonu 41

Kapitola 7 **Pulzující proměnné hvězdy a asteroseismologie** **45**

7.1 Pás nestability v HR diagramu a Eddingtonův kappa-mechanismus 45
7.2 Klasické cefeidy a Leavittové zákon perioda-zářivost 45
7.3 Hvězdy typu RR Lyrae a delta Scuti jako standardní svíčky 46
7.4 Neradiální oscilace: akustické p-módy a gravitační g-módy 46
7.5 Asteroseismická diagnostika stelárních jader (Kepler a TESS) 47

Kapitola 8 **Vývoj hmotných hvězd a Wolf-Rayetovy hvězdy** **50**

8.1 Eddingtonova mez zářivosti a CAK teorie radiačně hnaného větru 50
8.2 Pokročilá jaderná hoření a cibulovitá struktura železného jádra 50
8.3 Ztráta hmoty a Contiho evoluční scénář (O -> LBV -> WR) 51
8.4 Rotační promíchávání, kvazi-homogenita a magnetická pole 51

ČÁST IV: KOMPAKTNÍ RELIKTY A ZÁVĚREČNÁ STÁDIA

Kapitola 9 **Degenerovaný plyn a bílí trpaslíci** **56**

9.1 Fermiho-Diracova statistika a degenerovaný elektronový plyn 56
9.2 Ultrarelativistická degenerace a Chandrasekharova mez stability 56
9.3 Obrácený vztah hmotnost-poloměr a Mestelovo chladnutí jader 57
9.4 Bílí trpaslíci v těsných dvojhvězdách a supernovy typu Ia 58

Kapitola 10 **Supernovy a neutronové hvězdy** **62**

10.1 Kolaps železného jádra, fotodisociace a neutronizace 62
10.2 Odraz rázové vlny a neutrinový pulz supernovy (CCSN) 62
10.3 Relativistická TOV rovnice hydrostatické rovnováhy 63
10.4 Kůra, jaderné těstoviny, supratekutost, pulsary a magnetary 63

Kapitola 11 **Fyzika černých děr stelární hmotnosti** **68**

11.1 Kolaps hmotných hvězd a Schwarzschildovo prostoročasové řešení 68
11.2 Horizont událostí a Schwarzschildův poloměr Rs 68
11.3 Geodetický pohyb: Fotonová sféra (3M) a orbity ISCO (6M) 69
11.4 Kerrova metrika, ergosféra a Penroseův proces těžby rotační energie 69
11.5 Rentgenové dvojhvězdy a gravitační vlny ze splynutí černých děr 70

ČÁST V: PŘÍLOHY A VĚDECKÝ APARÁT

Dodatek A **Odvození Lane-Emdenovy rovnice a Chandrasekharovy meze** **74**

A.1 Odvození Lane-Emdenovy rovnice z Poissonovy rovnice 74
A.2 Analytická řešení pro polytropy n = 0, 1 a 5 75
A.3 Rigorózní analytické odvození Chandrasekharovy meze 76

Dodatek B **Python balíčky a nástroje pro hvězdné modely MESA** **78**

B.1 Architektura kódu MESA a formáty history.data a profile.data 78
B.2 Knihovna mesa-reader a skript analýzy evoluce a profilu Slunce 78

Dodatek C **Sbírka 15 řešených výpočetních úloh z fyziky hvězd** **82**

Dodatek D **Encyklopedický glosář astrofyziky hvězd (A–Ž)** **90**

Úvod a předmluva: Fyzikální architektura stelárního vesmíru

ZAJÍMAVOST

Předmluva autora Hvězdy představují základní stavební kameny viditelného vesmíru a primární termodynamické motory kosmické nukleosyntézy. Pochopení jejich vnitřní struktury, zářivých atmosfér, dynamického vývoje a závěrečných kompaktních fází tvoří páteř moderní teoretické i pozorovací astrofyziky. Tato kniha si klade za cíl poskytnout ucelený, matematicky rigorózní a fyzikálně konzistentní výklad stelární fyziky pro pokročilé studenty astrofyziky, teoretické fyziky a astronomie.

0.1 Hvězdy jako termodynamické motory vesmíru

Vesmír v makroskopickém měřítku vnímáme především prostřednictvím elektromagnetického záření generovaného hvězdami. Hvězda je v nejhlubším fyzikálním smyslu samo-gravitující plynná koule nacházející se v dynamickém a termálním rovnovážném stavu. Proti všudypřítomné tendenci gravitačních sil k nekonečnému kolapsu působí gradient vnitřního tlaku, vytvářený kinetickým pohybem iontů a elektronů, degeneračním tlakem kvantových stavů nebo tlakem záření.

Z termodynamického hlediska je hvězda otevřeným nerovnovážným systémem s pomalým kvazistatickým transportem tepla z horkého, hustého jádra do chladného mezihvězdného prostoru. V centrálních oblastech hvězdy dosahují teploty řádu desítek milionů kelvinů, což překonává elektrostatickou Coulombovskou bariéru mezi jádry lehkých prvků a umožňuje uvolňování jaderné vazebné energie prostřednictvím fúzních reakcí. Uvolněná energie je následně přenášena radiativní difúzí fotonů nebo konvektivním pohybem plynných elementů k fotosféře, odkud se volně šíří do prostoru jako zářivý tok:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{eff}}^4$$

kde L je zářivý výkon (bolometrická luminozita), R je fotosférický poloměr hvězdy, $\sigma = 5{,}670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta a T_{eff} představuje efektivní teplotu povrchu.

```
[ GRAVITAČNÍ KONTRAKCE ]  --->  Samo-zahřívání jádra
            |
            v
    [ TERMONUKLEÁRNÍ FÚZE ]    --->  Uvolnění energie v jádře (pp, CNO)
            |
            v
     [ RADIATIVNÍ / KONVEKTIVNÍ ] ---> Přenos energie vrstvami obálky
             TRANSPORT
            |
            v
       [ FOTOSFÉRICKÉ ZÁŘENÍ ]  --->  Vyzařování do mezihvězdného prostoru (L)
```

0.2 Časové škály stelární dynamiky

Pro jakýkoliv teoretický popis hvězd je klíčové rozlišovat tři základní fyzikální časové škály, které se liší o mnoho řádů. Tyto škály určují, jakým způsobem hvězda reaguje na perturbace různého druhu:

1. Dynamická časová škála (τ_{dyn})

Udává dobu, za kterou by se hvězda zhroutila v důsledku vlastní gravitace, pokud by došlo k náhlému vymizení vnitřního tlaku (čas volného pádu). Z Newtonových pohybových zákonů plyne:

$$\tau_{\mathrm{dyn}} \approx \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}$$

kde $G = 6{,}674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ je Newtonova gravitační konstanta a $\bar{\rho}$ je střední hustota hvězdy. Pro Slunce je $\tau_{\mathrm{dyn}} \approx 30\,\mathrm{minut}$. Všechny hydrodynamické procesy, pulzace a rázové vlny probíhají právě na této škále.

2. Tepelná (Kelvinova–Helmholtzova) časová škála (τ_{KH})

Představuje dobu, po kterou by hvězda mohla vyzařovat energii současnou luminozitou L pouze z vyčerpání své gravitační potenciální energie E_{grav} (nebo vnitřní tepelné energie):

$$\tau_{\mathrm{KH}} \approx \frac{GM^2}{RL}$$

Pro Slunce vychází $\tau_{\mathrm{KH}} \approx 3 \times 10^7\,\mathrm{let}$ (třicet milionů let). Tato škála řídí kontrakční fázi protohvězd před zapálením fúzních reakcí a reakce hvězdy na narušení tepelné rovnováhy.

3. Jaderná časová škála (τ_{nuc})

Odpovídá době života hvězdy na hlavní posloupnosti, během níž dochází k vyhoření jaderného paliva v centrálním jádře:

$$\tau_{\mathrm{nuc}} \approx \frac{\epsilon_{\mathrm{nuc}} M c^2}{L}$$

Při fúzi čtyř protonů na jedno jádro helia dochází k přeměně zlomku $\Delta m/m \approx 0{,}007$ klidové hmotnosti na čistou energii ($\epsilon_{\mathrm{nuc}} \approx 0{,}007 \times 0{,}1 \approx 7 \times 10^{-4}$, uvažujeme-li fúzi zhruba v $10\,\%$ hmotnosti hvězdy). Pro Slunce je $\tau_{\mathrm{nuc}} \approx 10^{10}\,\mathrm{let}$ (deset miliard let).

> **DŮLEŽITÉ**
>
> **Hierarchie časových škál** Zásadní axiom stelární astrofyziky vyjadřuje hierarchie: $\tau_{\mathrm{dyn}} \ll \tau_{\mathrm{KH}} \ll \tau_{\mathrm{nuc}}$. Pro Slunce platí $10^3\,\mathrm{s} \ll 10^{15}\,\mathrm{s} \ll 10^{17}\,\mathrm{s}$. Díky tomu můžeme hvězdné nitro ve většině fází života považovat s extrémní přesností za statické a v dokonalé hydrostatické i tepelné rovnováze.

0.3 Metodologie moderní stelární astrofyziky

Pozorování hvězd prošlo dramatickou revolucí. Od vizuální astrometrie a fotografických spekter 19. století jsme se posunuli k multi-vlnovým kosmickým observatořím (Hubble, James Webb Space Telescope, Chandra, Gaia) a obřím pozemním interferometrům (VLT/VLTI na observatoři Paranal).

Zrcadlo teleskopu Jamese Webba (JWST) umožňující detailní studium protohvězdných mlhovin

Současný vědecký pokrok v astrofyzice hvězd stojí na syntéze tří pilířů:

1. **Přesná pozorování:** Astrometrie družice Gaia poskytující paralaxy a vlastní pohyby pro více než miliardu hvězd; spektroskopické přehlídky (APOGEE, LAMOST, WEAVE) s vysokým rozlišením; fotometrické družice Kepler a TESS mapující světelné křivky proměnných a pulzujících hvězd.
2. **Kvantová a jaderná fyzika mikrosvěta:** Detailní tabulky opacit (OPAL, OP), přesné výpočty účinných průřezů termonukleárních reakcí z podzemních laboratoří (LUNA v Gran Sasso) a rovnice stavu ultra-husté jaderné hmoty.
3. **Numerická astrofyzika a hydrodynamika:** Otevřené simulační kódy, především modulární evoluční systém **MESA (Modules for Experiments in Stellar Astrophysics)**, který umožňuje počítat evoluci hvězd od oblaku až po kolaps železného jádra se stovkami izotopů a plně provázanou sítí diferenciálních rovnic.

0.4 Struktura a didaktický plán této knihy

Tato monografie je koncipována jako hierarchický kurz rozdělený do pěti vzájemně provázaných částí:

- **Část I: Fyzika hvězdných interiérů** Formuluje fundamentální soustavu čtyř diferenciálních rovnic hvězdné stavby. Odvozuje hydrostatickou rovnováhu, viriálový teorém, polytropní modely (Lane-Emdenovu rovnici), kvantovou mechaniku fúzních řetězců (pp cyklus, CNO cyklus, 3–α proces) a mechanismy přenosu energie zářením a konvekcí (Schwarzschildovo kritérium, teorii směšovací délky).
- **Část II: Hvězdné atmosféry a spektroskopická diagnostika** Zabývá se radiative transferem ve vnějších fotosférických vrstvách. Odvozuje transportní rovnici záření, Eddingtonovu-Barbierovu aproximaci pro okrajové ztemnění disku, Boltzmannovu a Sahovu ionizační rovnováhu a formování spektrálních absorpčních a emisních čar pomocí Voigtova profilu a křivky růstu.

- **Část III: Vývoj hvězd a pulzace** Sleduje životní dráhu hvězd v Hertzsprungově-Russellově diagramu: od gravitačního kolapsu molekulárního oblaku (Jeansovo kritérium), přes Hayashiho a Henyeyovu stopu k hlavní posloupnosti. Následně zkoumá pás nestability, κ-mechanismus pulzací cefeid a asteroseismologii, zakončenou evolucí hmotných veleobrů a Wolfových-Rayetových hvězd.
- **Část IV: Kompaktní relikty a závěrečná stádia** Detailně rozebírá fyziku degenerovaného elektronového a neutronového plynu, Chandrasekharovu mez stability bílých trpaslíků, kolaps jader supernov (CCSN) a stavbu neutronových hvězd řízenou Tolmanovou-Oppenheimerovou-Volkoffovou (TOV) rovnicí. Vrcholí fyzikou černých děr, Schwarzschildovou geometrií a gravitačními vlnami.
- **Část V: Přílohy a vědecký aparát** Obsahuje kompletní analytické odvození Lane-Emdenovy rovnice a Chandrasekharovy meze (Dodatek A), programátorský manuál pro analýzu evolučních modelů MESA v Pythonu (Dodatek B), sbírku 15 plně řešených výpočetních úloh (Dodatek C) a encyklopedický glosář klíčových termínů (Dodatek D).

Vítejte na cestě do žhavých hlubin stelárních jader i do zakřiveného časoprostoru kolem kompaktních reliktů.

Část I: Fyzika hvězdných interiérů

ZAJÍMAVOST

Tematický přehled Části I V první části této monografie položíme teoretické a matematické základy stelární astrofyziky. Vycházíme z fundamentálních zákonů klasické mechaniky, termodynamiky kontinua, kvantové teorie a jaderné fyziky. Formulujeme uzavřenou soustavu nelineárních diferenciálních rovnic popisujících vnitřní mechanickou a energetickou rovnováhu hvězdy.

Fyzikální pilíře hvězdné stavby

Hvězdný interiér představuje extrémní fyzikální laboratoř. V hloubkách statisíců až milionů kilometrů pod povrchem se hmota nachází v plně ionizovaném stavu vysokoteplotního plazmatu za tlaků překračujících stovky miliard atmosfér. Přestože je toto prostředí pro přímé pozorování nepřístupné, fundamentální fyzikální zákony nám umožňují rekonstruovat vnitřní profil hustoty, tlaku, teploty a chemického složení s obdivuhodnou přesností.

Tato část je rozdělena do tří klíčových kapitol:

1. **Kapitola 1: Rovnice hvězdné stavby a hydrostatická rovnováha** Odvození rovnice hydrostatické rovnováhy a rovnice kontinuity hmoty ve sférické symetrii. Analýza stavové rovnice ideálního plynu obohacené o radiační tlak fotonového plynu. Hluboký rozbor viriálového teorému a jeho aplikace na tepelnou stabilitu a zápornou specifickou tepelnou kapacitu samogravitujících plynných těles. Úvod do polytropních modelů a Lane-Emdenovy rovnice.

1. **Kapitola 2: Termonukleární fúze pp a CNO** Kvantově-mechanický základ jaderného slučování jader: Gamowův faktor, tunelový jev překonávající Coulombovskou repulzi a definice astrofyzikálního S-faktoru. Podrobný rozbor větví proton-protonového řetězce (pp-I, pp-II, pp-III), generování neutrin a CNO cyklu s jeho extrémní teplotní strmostí. Pokročilá hoření helia (3–α proces) a těžších prvků v pokročilých stádiích.

1. **Kapitola 3: Přenos energie zářením a konvekcí** Diferenciální rovnice gradientu zářivého toku a produkce energie. Radiační difúze v opticky tlustém prostředí, Rosselandova střední opacita a Kramersův opacitní zákon. Schwarzschildovo a Ledouxovo kritérium konvektivní stability, adiabatický teplotní gradient a teorie směšovací délky (Böhm-Vitense MLT) pro modelování konvektivních zón ve hvězdách různé hmotnosti.

Společně tyto zákony tvoří tzv. **standardní model stelární stavby**, který je základním kamenem celé moderní astrofyziky.

Kapitola 1: Rovnice hvězdné stavby a hydrostatická rovnováha

ZAJÍMAVOST

Historický kontext Základy teorie vnitřní stavby hvězd položili na přelomu 19. a 20. století Jonathan Homer Lane, Robert Emden a především sir Arthur Eddington ve svém přelomovém díle *The Internal Constitution of the Stars* (1926). Eddington ukázal, že hvězdy lze s vysokou přesností modelovat jako ideální plyn udržovaný v rovnováze gravitačními silami a gradientem tlaku záření.

1.1 Hydrostatická rovnováha a zachování hmoty

Uvažujme nerotující, nemagnetickou hvězdu se sférickou symetrií. Všechny fyzikální veličiny závisejí výhradně na radiální vzdálenosti r od geometrického středu hvězdy.

Vyřízněme ve vzdálenosti r myšlený cylindrický nebo sférický objemový element plazmatu o tloušťce dr a plošném průřezu dA. Hmotnost tohoto elementu je dána vztahem:

$$dm = \rho(r)\, dA\, dr$$

kde $\rho(r)$ je lokální hustota hmoty. Na tento element působí dvě protichůdné radiální síly:

1. Gravitační přitažlivá síla směrem k centru, způsobená veškerou hmotou $M(r)$ obsaženou uvnitř koule o poloměru r:

$$dF_{\mathrm{grav}} = -\frac{GM(r)dm}{r^2} = -\frac{GM(r)\rho(r)\, dA\, dr}{r^2}$$

1. Výsledná tlaková síla vznikající rozdílem tlaků na spodní a horní podstavě elementu:

$$dF_{\mathrm{press}} = [P(r) - P(r+dr)]\, dA = -\frac{dP}{dr}\, dr\, dA$$

V ustáleném stavu (bez makroskopického radiálního zrychlení, $\ddot{r} = 0$) musí být obě síly v přesné rovnováze ($dF_{\mathrm{grav}} + dF_{\mathrm{press}} = 0$). Dělením elementem objemu $dA\, dr$ obdržíme **rovnici hydrostatické rovnováhy**:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

Současně hmotnost $M(r)$ uzavřená uvnitř sféry o poloměru r roste s poloměrem podle **rovnice kontinuity hmoty**:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Alternativně můžeme jako nezávislou prostorovou proměnnou použít lagrangeovskou souřadnici hmotnosti $M_r \equiv M(r)$, která je invariantní vůči radiální expanzi či kontrakci vrstev:

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}$$

Tato formulace je zásadní pro numerické řešení evoluce hvězd, kde se vnější poloměr $R(t)$ dramaticky mění v čase, zatímco celková hmotnost hvězdy M (při zanedbání hvězdného větru) zůstává konstantní.

1.2 Stavová rovnice ideálního plynu a radiační tlak

Pro uzavření soustavy rovnic je nutný vztah mezi tlakem P, hustotou ρ, teplotou T a chemickým složením. Ve většině hvězdných interiérů je teplota natolik vysoká, že atomy jsou kompletně zbaveny elektronových obalů. Chování hmoty lze proto popsat jako směs ideálního plynu tvořeného volnými ionty a elektrony spolu s fotonovým plynem:

$$P = P_{\mathrm{gas}} + P_{\mathrm{rad}}$$

Tlak plynu (P_{gas})

Pro klasický nerelativistický ideální plyn platí:

$$P_{\mathrm{gas}} = n k_B T = \frac{\rho}{\mu m_u} k_B T$$

kde $k_B = 1{,}381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ je Boltzmannova konstanta, $m_u = 1{,}661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ je atomová hmotnostní jednotka a μ je **střední molekulová hmotnost** (bezrozměrná průměrná hmotnost jedné volné částice v jednotkách m_u).

Označíme-li hmotnostní zlomky vodíku X, helia Y a těžších prvků Z (tzv. metalicita), přičemž $X + Y + Z = 1$, je počet volných částic na jednotku hmotnosti v plně ionizovaném plazmatu dán součtem příspěvků iontů a volných elektronů:

$$\frac{1}{\mu} \approx 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z$$

Pro typické chemické složení mladého Slunce ($X = 0{,}74$, $Y = 0{,}24$, $Z = 0{,}02$) dostáváme $\mu \approx 0{,}60$.

Radiační tlak (P_{rad})

Fotony v termodynamické rovnováze s plazmatem tvoří plyn záření černého tělesa s hustotou energie $u = aT^4$. Radiační tlak je dán izotropním tokem hybnosti fotonů:

$$P_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{3} a T^4$$

kde $a = \frac{4\sigma}{c} = 7{,}566 \times 10^{-16}\,\mathrm{J\,m^{-3}\,K^{-4}}$ je radiační konstanta a c je rychlost světla ve vakuu.

Zavedeme-li parametr $\beta \equiv P_{\mathrm{gas}}/P$, představuje $1 - \beta = P_{\mathrm{rad}}/P$ podíl radiačního tlaku na celkovém tlaku. U méně hmotných hvězd jako Slunce je $1 - \beta < 10^{-3}$, avšak u velmi hmotných hvězd ($M > 20\,M_\odot$) se $\beta \to 0$ a radiační tlak začíná dominovat, což vede k nestabilitám a silnému odtoku hmoty.

1.3 Viriálový teorém a energetická bilance hvězdného plynu

Viriálový teorém představuje jeden z nejhlubších teoretických nástrojů astrofyziky samo-gravitujících systémů. Spojuje celkovou vnitřní tepelnou energii hvězdy U s její gravitační potenciální energií Ω.

Vynásobme rovnici hydrostatické rovnováhy objemem koule $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ a integrujme od středu ($r = 0$) k povrchu ($r = R$):

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr}\, dr = -\int_0^R \frac{G M(r) \rho(r) 4\pi r^3}{r^2}\, dr$$

Levou stranu integrujeme per partes:

$$\left[4\pi r^3 P(r)\right]_0^R - 3\int_0^R P(r) 4\pi r^2\, dr = -3\int_0^M \frac{P}{\rho}\, dM_r$$

Jelikož na povrchu je tlak zanedbatelný ($P(R) = 0$) a ve středu je poloměr nulový ($r = 0$), hraniční člen vymizí. Pravá strana původní rovnice je přesně rovna celkové gravitační potenciální energii hvězdy:

$$\Omega = -\int_0^R \frac{G M(r)}{r}\, dM(r)$$

Dostáváme tak fundamentální relaci:

$$3\int_0^M \frac{P}{\rho}\,dM_r + \Omega = 0$$

Pro ideální jednoatomový plyn s adiabatickým indexem $\gamma = 5/3$ je hustota vnitřní tepelné energie vztažená na jednotku hmotnosti rovna $u_{\rm th} = \frac{3}{2}\frac{P}{\rho}$. Celková vnitřní tepelná energie hvězdy je tedy $U = \int_0^M u_{\rm th}\,dM_r = \frac{3}{2}\int_0^M \frac{P}{\rho}\,dM_r$. Dosazením obdržíme **viriálový teorém pro ideální plyn**:

$$2U + \Omega = 0$$

Celková mechanická energie hvězdy $E_{\rm tot}$ je součtem kinetické (tepelné) a gravitační potenciální energie:

$$E_{\rm tot} = U + \Omega = -\frac{1}{2}\Omega + \Omega = \frac{1}{2}\Omega = -U$$

> **DŮLEŽITÉ**
>
> **Záporná tepelná kapacita samo-gravitujících systémů** Jelikož gravitační potenciální energie je záporná ($\Omega < 0$), je celková energie hvězdy rovněž záporná ($E_{\rm tot} < 0$). Pokud hvězda vyzáří energii $\Delta E < 0$ do okolního prostoru, její celková energie klesne: $\Delta E_{\rm tot} < 0 \implies \Delta U = -\Delta E_{\rm tot} > 0$. Vnitřní tepelná energie hvězdy tedy vzroste a hvězda se **zahřeje**! Polovina uvolněné gravitační energie se vyzáří na povrchu a druhá polovina způsobí nárůst vnitřní teploty. Tento jev nazýváme zápornou specifickou tepelnou kapacitou hvězd.

1.4 Základní polytropní modely a Lane-Emdenova rovnice

Před rozvojem samočinných počítačů představovaly polytropní modely hlavní metodu výpočtu hvězdné stavby. Polytropa předpokládá jednoduchou mocninnou závislost tlaku na hustotě:

$$P = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

kde K je polytropní konstanta a n je **polytropní index**.

Zavedením bezrozměrné hustotní funkce $\theta(\xi)$ vztahem $\rho(r) = \rho_c \theta^n(\xi)$, kde ρ_c je centrální hustota, a bezrozměrné radiální souřadnice $\xi = r/r_n$ s charakteristickým měřítkem:

$$r_n = \sqrt{\frac{(n+1)K\rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}}$$

přejde rovnice hydrostatické rovnováhy spojená s rovnicí kontinuity hmoty do tvaru slavné **Lane-Emdenovy diferenciální rovnice**:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) + \theta^n = 0$$

s počátečními podmínkami ve středu ($\xi = 0$): $\theta(0) = 1$ a $\theta'(0) = 0$.

Povrch hvězdy odpovídá prvnímu nulovému bodu ξ_1, kde $\theta(\xi_1) = 0$. Fyzikální poloměr a celková hmotnost polytropy jsou pak:

$$R = r_n \xi_1, \qquad M = 4\pi r_n^3 \rho_c \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$$

Polytropní index n	První nula ξ_1	$-\xi_1^2\theta'(\xi_1)$	Poměr hustot $\rho_c/\bar{\rho}$	Fyzikální aplikace
0	$\sqrt{6} \approx 2{,}449$	$4{,}899$	$1{,}00$	Homogenní nestlačitelná koule
1	$\pi \approx 3{,}142$	$\pi \approx 3{,}142$	$3{,}29$	Analytické řešení ($\sin\xi/\xi$)
$1{,}5$	$3{,}654$	$2{,}714$	$5{,}99$	Plně konvektivní hvězdy, bílí trpaslíci
3	$6{,}897$	$2{,}018$	$54{,}18$	Standardní Eddingtonův model, relativistická degenerace
5	∞	$1{,}732$	∞	Schusterovo řešení s nekonečným poloměrem

1.5 Vědecký Python kód: Řešení Lane-Emdenovy rovnice

Následující skript v jazyce Python numericky integruje Lane-Emdenovu rovnici metodou Runge-Kutta 4. řádu pro různé indexy n a počítá centrální koncentraci hmoty:

```
import numpy as np

def solve_lane_emden(n, dxi=1e-4, xi_max=20.0):
    """Numerická integrace Lane-Emdenovy rovnice pro zadaný index n."""
    xi = 1e-6
    theta = 1.0 - (xi**2) / 6.0  # Taylorův rozvoj v okolí nuly
    phi = -xi / 3.0              # phi = dtheta / dxi


xi_arr = [xi]
    theta_arr = [theta]


while xi < xi_max and theta > 0.0:
        # Soustava 1. řádu:
        # dtheta/dxi = phi
        # dphi/dxi = -theta^n - (2/xi)*phi
        def derivs(x, th, ph):
            dth = ph
            dph = - (th**n if th > 0.0 else 0.0) - (2.0 / x) * ph
            return dth, dph


k1_th, k1_ph = derivs(xi, theta, phi)
        k2_th, k2_ph = derivs(xi + 0.5<em>dxi, theta + 0.5</em>dxi<em>k1_th, phi + 0.5</em>dxi*k1_ph)
        k3_th, k3_ph = derivs(xi + 0.5<em>dxi, theta + 0.5</em>dxi<em>k2_th, phi + 0.5</em>dxi*k2_ph)
        k4_th, k4_ph = derivs(xi + dxi, theta + dxi<em>k3_th, phi + dxi</em>k3_ph)


theta += (dxi / 6.0) * (k1_th + 2<em>k2_th + 2</em>k3_th + k4_th)
        phi   += (dxi / 6.0) * (k1_ph + 2<em>k2_ph + 2</em>k3_ph + k4_ph)
        xi    += dxi


if theta > 0.0:
            xi_arr.append(xi)
            theta_arr.append(theta)


xi_1 = xi_arr[-1]
    dtheta_1 = phi
    mass_integral = - (xi_1**2) * dtheta_1
    rho_c_mean_ratio = (xi_1**3) / (3.0 * mass_integral)


return xi_1, mass_integral, rho_c_mean_ratio


if __name__ == "__main__":
    print(f"{'n':<6}{'xi_1':<12}{'-xi_1^2 theta_1':<18}{'rho_c / rho_mean':<16}")
    print("-" * 52)
    for n in [0.0, 1.0, 1.5, 3.0]:
        xi1, mass_int, ratio = solve_lane_emden(n)
        print(f"{n:<6.1f}{xi1:<12.4f}{mass_int:<18.4f}{ratio:<16.2f}")
```

1.6 Praktický příklad: Odhad centrálního tlaku a teploty Slunce

Zadání

Odhadněte řádovou hodnotu centrálního tlaku P_c a centrální teploty T_c Slunce za předpokladu, že hustota roste lineárně se vzdáleností od středu, případně z dimenzionální analýzy rovnic hydrostatické rovnováhy. **Zadané astronomické parametry:**

- Hmotnost Slunce: $M_\odot = 1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Poloměr Slunce: $R_\odot = 6{,}963 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$
- Gravitační konstanta: $G = 6{,}674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
- Boltzmannova konstanta: $k_B = 1{,}381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
- Atomová hmotnostní jednotka: $m_u = 1{,}661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
- Střední molekulová hmotnost: $\mu \approx 0{,}6$

Krok 1: Dimenzionální odhad gradientu tlaku

Z rovnice hydrostatické rovnováhy nahradíme derivace konečnými diferencemi:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} \approx \frac{P_c - P(R)}{R} \approx \frac{P_c}{R}$$

Střední hustota je $\bar{\rho} = \frac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3} \approx 1{,}41 \times 10^{3}\,\mathrm{kg/m^3}$. Dosazením do pravé strany:

$$P_c \approx \frac{G M_\odot \bar{\rho}}{R_\odot} \approx \frac{G M_\odot^2}{R_\odot^4}$$

Krok 2: Kvantitativní výpočet centrálního tlaku

Pro standardní polytropní model $n = 3$ dává přesná integrace:

$$P_c = \frac{G M_\odot^2}{4\pi R_\odot^4 (n+1)[-\theta'(\xi_1)]^2} \approx 1{,}34 \times 10^{17}\,\mathrm{Pa} \approx 1{,}3 \times 10^{11}\,\mathrm{atm}$$

I nejhrubší odhad dává $P_c \sim 10^{16} - 10^{17}\,\mathrm{Pa}$.

Krok 3: Kvantitativní výpočet centrální teploty

Z viriálového teorému nebo stavové rovnice ideálního plynu:

$$k_B T_c \approx \frac{G M_\odot \mu m_u}{R_\odot}$$

$$T_c \approx \frac{G M_\odot \mu m_u}{k_B R_\odot} = \frac{(6{,}674 \times 10^{-11}) \cdot (1{,}989 \times 10^{30}) \cdot (0{,}6 \cdot 1{,}661 \times 10^{-27})}{(1{,}381 \times 10^{-23}) \cdot (6{,}963 \times 10^{8})} \approx 1{,}37 \times 10^{7}\,\mathrm{K}$$

Výsledek a interpretace

Výpočet ukazuje, že centrální teplota Slunce nutně dosahuje řádu přibližně $14\,\text{milionů}\ \mathrm{kelvinů}$ a centrální tlak přesahuje sto miliard atmosfér. Tyto extrémní podmínky jsou plně dostačující pro zapálení termonukleárních reakcí, jak uvidíme v následující kapitole.

Kapitola 2: Termonukleární fúze pp a CNO

ZAJÍMAVOST

Historický kontext Otázka zdroje sluneční energie trápila fyziky po celé 19. století. Kelvin a Helmholtz předpokládali gravitační kontrakci, která však dávala stáří Slunce pouhých 30 milionů let, což odporovalo geologickým a biologickým nálezům. Teprve v roce 1920 sir Arthur Eddington odvážně navrhl fúzi čtyř atomů vodíku na helium. Kvantově-mechanický mechanismus tunelování objasnil George Gamow roku 1928 a detailní fúzní cykly rozpracovali Hans Bethe a Carl Friedrich von Weizsäcker v letech 1938–1939.

2.1 Kvantově-mechanický tunelový jev a Gamowovo okno

Dvě jádra s náboji $Z_1 e$ a $Z_2 e$ pociťují vzájemné elektrostatické odpuzování. Výška Coulombovské potenciálové bariéry ve vzdálenosti dosahu silné interakce ($r_0 \approx 10^{-15}\,\mathrm{m}$) činí:

$$V_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \approx 1\,\mathrm{MeV}$$

Avšak střední kinetická energie částic v jádře Slunce při teplotě $T \approx 1{,}5 \times 10^7\,\mathrm{K}$ je pouhých:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B T \approx 2\,\mathrm{keV}$$

Z hlediska klasické mechaniky by žádné jádro nemělo dostatek energie k překonání Coulombovské bariéry. Fúze je umožněna výhradně **kvantově-mechanickým tunelovým jevem**.

Pravděpodobnost průchodu bariérou s energií částice $E \ll V_C$ v semiklasické WKB aproximaci je dána Gamowovým faktorem:

$$P_{\mathrm{tunnel}} \propto \exp\left(-2\pi\eta\right) = \exp\left(-\sqrt{\frac{E_G}{E}}\right)$$

kde η je Sommerfeldův parametr a E_G je Gamowova energie:

$$E_G = 2 m_r c^2 (\pi \alpha Z_1 Z_2)^2$$

kde $m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ je redukovaná hmotnost reagujících jader a $\alpha \approx 1/137$ je konstanta jemné struktury.

Celkový účinný průřez fúzní reakce $\sigma(E)$ se faktorizuje do geometrického členu $\propto \lambda_{\mathrm{de\,Broglie}}^2 \propto 1/E$, Gamowova faktoru a čistě jaderného příspěvku vyjádřeného astrofyzikálním S-faktorem:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\sqrt{\frac{E_G}{E}}\right)$$

V tepelném rovnovážném plazmatu mají částice Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení rychlostí s energetickou hustotou pravděpodobnosti $\propto E \exp(-E/k_B T)$. Rychlost jaderné reakce na jednotku objemu závisí na integrálu součinu průřezu a rychlosti:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi m_r}\right)^{1/2} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{k_B T} - \sqrt{\frac{E_G}{E}}\right) dE$$

Integrand představuje konvoluci dvou protichůdných exponenciál:

1. Maxwellovský chvost $\exp(-E/k_B T)$ klesá s rostoucí energií.
2. Tunelová pravděpodobnost $\exp(-\sqrt{E_G/E})$ prudce roste s energií.

Součin těchto funkcí vytváří úzký energetický pík – tzv. **Gamowovo okno**, vycentrované kolem optimální energie E_0:

$$E_0 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{E_G k_B T}\right)^{2/3} = \left(\frac{\pi\alpha Z_1 Z_2 k_B T}{\sqrt{2}}\right)^{2/3} (m_r c^2)^{1/3}$$

Pro reakci $p + p$ v jádře Slunce je $E_0 \approx 5{,}9\,\mathrm{keV}$, což je zhruba trojnásobek střední termální energie.

2.2 Proton–protonové řetězce (pp-I, pp-II, pp-III) a solární neutrina

V hvězdách s hmotností $M \lesssim 1{,}3\,M_\odot$ (včetně Slunce) dominuje proton-protonový řetězec. Celková reakce syntetizuje čtyři protony na jedno jádro helia $^4\mathrm{He}$:

$$4\,{}^1\mathrm{H} \longrightarrow {}^4\mathrm{He} + 2e^+ + 2\nu_e + 26{,}73\,\mathrm{MeV}$$

Řetězec začíná fundamentální reakcí:

$${}^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \longrightarrow {}^2\mathrm{H} + e^+ + \nu_e + 0{,}42\,\mathrm{MeV}$$

> **DŮLEŽITÉ**
>
> **Úzké hrdlo pp-řetězce** Aby ze dvou protonů vznikl deuteron ($^2\mathrm{H}$), musí se jeden z protonů v okamžiku srážky přeměnit slabou interakcí na neutron (β^+ rozpad: $p \to n + e^+ + \nu_e$). Účinný průřez této slabé interakce je astronomicky malý ($\sigma \sim 10^{-47}\,\mathrm{m}^2$). Střední doba života protonu v nitru Slunce vůči této fúzi činí přibližně 10^{10} let. Právě proto Slunce vyzařuje stabilně po miliardy let a neexploduje jako termonukleární bomba.

Po vzniku deuteronu následuje okamžitá silná reakce:

$${}^2\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \longrightarrow {}^3\mathrm{He} + \gamma + 5{,}49\,\mathrm{MeV}$$

Další vývoj probíhá třemi konkurenčními větvemi:

Větev pp-I (zastoupení ~85 % na Slunci):

$${}^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} \longrightarrow {}^4\mathrm{He} + 2\,{}^1\mathrm{H} + 12{,}86\,\mathrm{MeV}$$

Větev pp-II (zastoupení ~15 %):

$${}^3\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} \longrightarrow {}^7\mathrm{Be} + \gamma$$

$${}^7\mathrm{Be} + e^- \longrightarrow {}^7\mathrm{Li} + \nu_e$$

$${}^7\mathrm{Li} + {}^1\mathrm{H} \longrightarrow 2\,{}^4\mathrm{He}$$

Větev pp-III (zastoupení ~0,02 %):

$${}^7\mathrm{Be} + {}^1\mathrm{H} \longrightarrow {}^8\mathrm{B} + \gamma$$

$${}^8\mathrm{B} \longrightarrow {}^8\mathrm{Be}^* + e^+ + \nu_e$$

$${}^8\mathrm{Be}^* \longrightarrow 2\,{}^4\mathrm{He}$$

Ačkoliv větev pp-III tvoří jen zlomek procenta, neutrina z rozpadu boru $^8\mathrm{B}$ nesou energii až $14\,\mathrm{MeV}$. Byla to právě tato vysokoenergetická neutrina, která umožnila historickou detekci v experimentu Raye Davise v dole Homestake a v detektoru Super-Kamiokande, což nakonec vedlo k objevu neutrinových oscilací (efekt MSW).

Závislost rychlosti produkce energie pp-řetězce na teplotě má tvar:

$$\epsilon_{pp} \approx \epsilon_0 \rho X^2 T_6^4$$

kde $T_6 \equiv T / 10^6\,\mathrm{K}$. Exponent teplotní závislosti je poměrně mírný: $\nu_{pp} \approx 4$.

2.3 Uhlík–dusík–kyslíkový cyklus (CNO) a teplotní citlivost

Ve hvězdách s hmotností $M \gtrsim 1{,}3\,M_\odot$ překračuje teplota v jádře $T \approx 1{,}8 \times 10^7\,\mathrm{K}$. Při těchto teplotách získávají protony dostatek energie k překonání vyšší Coulombovské bariéry jader uhlíku ($Z = 6$), dusíku ($Z = 7$) a kyslíku ($Z = 8$). Jádra C, N a O působí jako katalyzátory fúze.

Hlavní větev CNO-I (Betheův cyklus):

$$^{12}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{13}\mathrm{N} + \gamma$$

$$^{13}\mathrm{N} \longrightarrow {}^{13}\mathrm{C} + e^+ + \nu_e$$

$$^{13}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{14}\mathrm{N} + \gamma$$

$$^{14}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{15}\mathrm{O} + \gamma \quad (\text{nejschůdnější hrdlo cyklu})$$

$$^{15}\mathrm{O} \longrightarrow {}^{15}\mathrm{N} + e^+ + \nu_e$$

$$^{15}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He}$$

Nejpomalejší reakcí celého cyklu je záchyt protonu na dusíku $^{14}\mathrm{N}$, proto se v jádrech hvězd provozujících CNO cyklus většina katalyzátorů hromadí ve formě izotopu $^{14}\mathrm{N}$.

Produkce energie v CNO cyklu vykazuje extrémní teplotní strmost:

$$\epsilon_{\mathrm{CNO}} \approx \epsilon_0 \rho X Z_{\mathrm{CNO}} T_6^{16-20}$$

Při teplotě $T \approx 2 \times 10^7\,\mathrm{K}$ je exponent $\nu_{\mathrm{CNO}} \approx 17$. Tato enormní závislost na teplotě způsobuje, že generace energie je extrémně zkoncentrována v nejtěsnějším středu jádra, což vyvolává obrovský teplotní gradient a vede k vytvoření **konvektivního jádra** u hmotnějších hvězd.

2.4 Spalování helia (3-alfa reakce) a pokročilá hoření

Když hvězda vyčerpá vodík v centru, jádro z helia se gravitačně smršťí a zahřeje na teplotu $T \approx 10^8\,\mathrm{K}$. V těchto podmínkách začíná fúze helia prostřednictvím **3-α procesu**:

$$^{4}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} \rightleftharpoons {}^{8}\mathrm{Be} \quad (\tau_{1/2} \approx 10^{-16}\,\mathrm{s})$$

$$^{8}\mathrm{Be} + {}^{4}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{12}\mathrm{C}^* \longrightarrow {}^{12}\mathrm{C} + 2\gamma + 7{,}27\,\mathrm{MeV}$$

Jádro berylia $^{8}\mathrm{Be}$ je nestabilní a rozpadá se za $10^{-16}\,\mathrm{s}$. Přesto se v dynamické rovnováze udržuje nepatrná koncentrace $^{8}\mathrm{Be}$ ($n(^{8}\mathrm{Be})/n(^{4}\mathrm{He}) \sim 10^{-10}$). Fred Hoyle v roce 1954 geniálně předpověděl, že k produkci pozorovaného množství uhlíku ve vesmíru musí existovat rezonanční energetická hladina jádra $^{12}\mathrm{C}^*$ při energii $7{,}65\,\mathrm{MeV}$, což experimenty vzápětí potvrdily (Hoyleův stav).

Rychlost 3-α reakce roste s teplotou jako $\epsilon_{3\alpha} \propto \rho^2 Y^3 T_8^{40}$, což z ní činí nejcitlivější fúzní proces v astrofyzice.

Fúzní cyklus	Palivo	Hlavní produkt	Prahová teplota T_{thresh}	Teplotní exponent ν	Energetická výtěžnost na kg
pp-řetězec	$^{1}\mathrm{H}$	$^{4}\mathrm{He}$	$\sim 10^7\,\mathrm{K}$	~ 4	$6{,}4 \times 10^{14}\,\mathrm{J/kg}$
CNO-cyklus	$^{1}\mathrm{H}$	$^{4}\mathrm{He}$	$\sim 1{,}8 \times 10^7\,\mathrm{K}$	~ 17	$6{,}4 \times 10^{14}\,\mathrm{J/kg}$
3-α proces	$^{4}\mathrm{He}$	$^{12}\mathrm{C}$, $^{16}\mathrm{O}$	$\sim 10^8\,\mathrm{K}$	~ 40	$5{,}8 \times 10^{13}\,\mathrm{J/kg}$
Hoření uhlíku	$^{12}\mathrm{C}$	$^{20}\mathrm{Ne}$, $^{24}\mathrm{Mg}$	$\sim 6 \times 10^8\,\mathrm{K}$	~ 30	$4{,}5 \times 10^{13}\,\mathrm{J/kg}$
Hoření neonu	$^{20}\mathrm{Ne}$	$^{16}\mathrm{O}$, $^{24}\mathrm{Mg}$	$\sim 1{,}2 \times 10^9\,\mathrm{K}$	~ 40	$1{,}1 \times 10^{13}\,\mathrm{J/kg}$
Hoření kyslíku	$^{16}\mathrm{O}$	$^{28}\mathrm{Si}$, $^{32}\mathrm{S}$	$\sim 1{,}5 \times 10^9\,\mathrm{K}$	~ 30	$5{,}0 \times 10^{13}\,\mathrm{J/kg}$
Hoření křemíku	$^{28}\mathrm{Si}$	$^{56}\mathrm{Ni} \to {}^{56}\mathrm{Fe}$	$\sim 3 \times 10^9\,\mathrm{K}$	~ 20	$1{,}8 \times 10^{13}\,\mathrm{J/kg}$

2.5 Vědecký Python kód: Výpočet Gamowova okna

Následující kód počítá a vykresluje Gamowovo energetické okno pro fúzi proton-proton při teplotě slunečního jádra $T = 1{,}5 \times 10^7\,\mathrm{K}$:

```
import numpy as np

def gamow_window_analysis(T_kelvin=1.5e7, Z1=1, Z2=1, m_reduced_amu=0.5):
    """Výpočet Gamowova okna a optimální fúzní energie E0 pro reakci p + p."""
    # Konstanty v jednotkách keV
    k_B_keV = 8.617333e-8  # keV / K
    alpha = 1.0 / 137.036
    m_u_keV = 931494.1     # keV / c^2
    m_r = m_reduced_amu * m_u_keV


kT = k_B_keV * T_kelvin
    E_G = 2.0 * m_r * (np.pi * alpha * Z1 * Z2)**2


# Analytický výpočet maxima Gamowova okna E0 a položířky Delta
    E0 = ((np.sqrt(E_G) * kT) / 2.0)**(2.0 / 3.0)
    Delta = 4.0 * (E0 * kT / 3.0)**0.5


E_grid = np.linspace(0.1, 25.0, 1000)
    maxwell = np.exp(-E_grid / kT)
    tunnel = np.exp(-np.sqrt(E_G / E_grid))
    gamow_integrand = maxwell * tunnel


# Normalizace pro srovnání profilů
    norm_integrand = gamow_integrand / np.max(gamow_integrand)
    E_max_num = E_grid[np.argmax(norm_integrand)]


return E0, Delta, E_max_num, E_G


if __name__ == "__main__":
    T_sun = 1.5e7
    E0, Delta, E_max, E_G = gamow_window_analysis(T_sun)
    print("=== VÝSLEDKY ANALÝZY GAMOWOVA OKNA (PRO SLUNCE) ===")
    print(f"Teplota jádra T:          {T_sun:.1e} K")
    print(f"Střední termální energie: {1.5 * 8.617e-8 * T_sun:.3f} keV")
    print(f"Gamowova energie E_G:     {E_G:.1f} keV")
    print(f"Analytické maximum E_0:   {E0:.3f} keV")
    print(f"Numerické maximum píku:   {E_max:.3f} keV")
    print(f"Efektivní šířka okna:     {Delta:.3f} keV")
```

2.6 Praktický příklad: Celková produkce energie a úbytek hmotnosti Slunce

Zadání

Bolometrická zářivost Slunce je $L_\odot = 3{,}828 \times 10^{26}\ \mathrm{W}$. Za předpokladu, že veškerá tato energie vzniká v pp-I řetězci syntézou vodíku na helium:

1. Vypočítejte celkovou hmotnost $\Delta M / \Delta t$, kterou Slunce ztratí každou sekundu přeměnou na vyzařovanou energii podle Einsteinova vztahu $E = mc^2$.
2. Určete, kolik kilogramů a tun vodíku musí jádro Slunce zfúzovat na helium každou sekundu.

Zadané hodnoty:

- Zářivý výkon Slunce: $L_\odot = 3{,}828 \times 10^{26}\ \mathrm{J/s}$
- Rychlost světla: $c = 2{,}998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$
- Hmotnost 4 protonů: $4 \times m_p = 4 \times 1{,}6726 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 6{,}6905 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
- Hmotnost jádra $^4\mathrm{He}$: $m_\alpha = 6{,}6447 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$

Krok 1: Úbytek klidové hmotnosti za sekundu

Z Einsteinovy ekvivalence energie a hmotnosti:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{L_\odot}{c^2} = \frac{3{,}828 \times 10^{26}\ \mathrm{J/s}}{(2{,}998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})^2} = \frac{3{,}828 \times 10^{26}}{8{,}988 \times 10^{16}} \approx 4{,}26 \times 10^{9}\ \mathrm{kg/s}$$

Slunce tedy ztrácí přibližně $4{,}26\ \mathrm{milionu\ tun}$ své hmotnosti každou sekundu pouhým vyzařováním fotonů.

Krok 2: Hmotnostní efektivita fúze vodíku

Hmotnostní defekt při vzniku jednoho jádra $^4\mathrm{He}$ činí:

$$\Delta m = 4m_p - m_\alpha = (6{,}6905 - 6{,}6447) \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 4{,}58 \times 10^{-29}\ \mathrm{kg}$$

Hmotnostní zlomek přeměněný na energii:

$$\eta_{\mathrm{eff}} = \frac{\Delta m}{4m_p} = \frac{4{,}58 \times 10^{-29}}{6{,}6905 \times 10^{-27}} \approx 0{,}00685 \approx 0{,}685\,\%$$

Krok 3: Rychlost spotřeby vodíkového paliva

Hmotnost vodíku zfúzovaného za sekundu dM_{H}/dt je:

$$\frac{dM_{\mathrm{H}}}{dt} = \frac{1}{\eta_{\mathrm{eff}}}\,\frac{dM}{dt} = \frac{4{,}26 \times 10^{9}\ \mathrm{kg/s}}{0{,}00685} \approx 6{,}22 \times 10^{11}\ \mathrm{kg/s} \approx 622\ \mathrm{milionů\ tun/s}$$

Výsledek a interpretace

Sluneční reaktor přemění každou sekundu 622 milionů tun vodíku na 618 milionů tun helia, přičemž zbylé 4,26 milionu tun hmoty se uvolní jako čistá zářivá energie napájející celou sluneční soustavu. Vzhledem k celkové hmotnosti Slunce ($M_\odot \approx 2 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$) spotřebuje Slunce za celou svou desetimiliardovou dobu života na hlavní posloupnosti jen malý zlomek své celkové vodíkové zásoby.

Kapitola 3: Přenos energie zářením a konvekcí

ZAJÍMAVOST

Fyzikální úvod Energie uvolněná termonukleární fúzí v nejtěsnějším jádře hvězdy musí projít stovkami tisíc kilometrů hustého plazmatu, než opustí fotosféru. Způsob, jakým se teplo přenáší, určuje vnitřní teplotní profil, vnější poloměr i stabilitu hvězdy. Dva dominantní mechanismy transportu energie ve hvězdách představují radiační difúze fotonů a makroskopické konvektivní proudění plazmatu.

3.1 Rovnice zachování a produkce energie

Uvažujme sférickou slupku o poloměru r, tloušťce dr a hmotnosti $dM_r = 4\pi r^2 \rho \, dr$. Zářivý výkon vstupující do spodní hranice slupky označme $L(r)$ a výkon vystupující z horní hranice $L(r + dr)$.

V ustáleném tepelném stavu (bez kontrakce či expanze) je rozdíl zářivých výkonů dán čistou jadernou produkcí energie uvnitř slupky zmenšenou o energii odnášenou neutry:

$$dL = dM_r (\epsilon_{\mathrm{nuc}} - \epsilon_\nu)$$

kde ϵ_{nuc} je specifická produkce jaderné energie na jednotku hmotnosti ($\mathrm{W/kg}$) a ϵ_ν představuje ztráty neutrinovým vyzařováním. Dělením dr dostáváme **třetí rovnici hvězdné stavby**:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho (\epsilon_{\mathrm{nuc}} - \epsilon_\nu)$$

V lagrangeovských souřadnicích hmotnosti má rovnice tvar:

$$\frac{dL}{dM_r} = \epsilon_{\mathrm{nuc}} - \epsilon_\nu + \epsilon_{\mathrm{grav}}$$

kde $\epsilon_{\mathrm{grav}} \equiv -T \frac{ds}{dt} = -c_P \frac{dT}{dt} + \frac{\delta}{\rho} \frac{dP}{dt}$ představuje gravotermální člen spojený s časovou změnou entropie s, který se uplatňuje během gravitační kontrakce protohvězd nebo expanze do fáze červeného obra.

3.2 Radiační difúze fotonů a Rosselandova opacita

V hlubokém nitru hvězdy je látka extrémně neprůhledná (opticky tlustá). Střední volná dráha fotonu činí pouhé zlomky milimetru až centimetru:

$$\ell_{\mathrm{mfp}} = \frac{1}{\kappa \rho}$$

kde κ je **opacita** (hmotnostní koeficient absorpce a rozptylu, $\mathrm{m^2/kg}$). Transport fotonů lze proto přesně popsat difúzní aproximací.

Hustota toku zářivé energie $\vec{F}_{\mathrm{rad}}$ je úměrná gradientu hustoty energie fotonového plynu $u = aT^4$:

$$\vec{F}_{\mathrm{rad}} = -\frac{c}{3\kappa_R \rho} \vec{\nabla} u = -\frac{4acT^3}{3\kappa_R \rho} \vec{\nabla} T$$

kde κ_R je harmonicky vážená **Rosselandova střední opacita**:

$$\frac{1}{\kappa_R} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} \, d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} \, d\nu}$$

Jelikož celková luminozita procházející sférou o poloměru r je $L(r) = 4\pi r^2 F_{\mathrm{rad}}(r)$, dostáváme **rovnici radiačního teplotního gradientu** (čtvrtou rovnici hvězdné stavby pro radiativní vrstvy):

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa_R \rho L(r)}{16\pi a c r^2 T^3}$$

Hlavní mikroskopické zdroje opacity:

1. **Elektronový (Thomsonův) rozptyl:** Rozptyl fotonů na volných elektronech. Nezávisí na teplotě ani hustotě:

$$\kappa_{\rm es} = \frac{\sigma_T}{\mu_e m_u} \approx 0{,}020\,(1+X) \quad \mathrm{m^2/kg}$$

1. **Vázaně–volné (fotoionizace) a volně–volné (brzdné) přechody:** Popisované **Kramersovým opacitním zákonem**:

$$\kappa_{\rm Kramers} \approx \kappa_0 \rho T^{-7/2}$$

Kramersova opacita prudce klesá s rostoucí teplotou. V horkých středech hmotných hvězd proto dominuje Thomsonův rozptyl, zatímco v chladnějších obálkách dominuje Kramersova opacita a absorpce záporného vodíkového iontu $\mathrm{H^-}$.

3.3 Schwarzschildovo a Ledouxovo kritérium konvektivní stability

Když radiační gradient vyžaduje příliš strmý pokles teploty s poloměrem, záření již nedokáže veškerou energii efektivně odvádět. V plazmatu se rozvine dynamická Rayleighova-Taylorova nestabilita – nastává **konvekce**.

Představme si plynný element v hloubce r, který adiabaticky vystoupí o výšku Δr. Během výstupu se element okamžitě tlakově přizpůsobí okolí ($P_e = P_{\rm surr}$), ale kvůli nízké tepelné vodivosti nevymění teplo s okolím (adiabatická expanze).

- Pokud je hustota vystoupavšího elementu vyšší než hustota okolí ($\rho_e > \rho_{\rm surr}$), Archimédův vztlak tlačí element zpět dolů $\rightarrow$ **vrstva je stabilní**.
- Pokud je hustota elementu nižší než okolí ($\rho_e < \rho_{\rm surr}$), vztlak element dále urychluje vzhůru $\rightarrow$ **vrstva je konvektivně nestabilní**.

Zavedeme-li logaritmický teplotní gradient:

$$\nabla \equiv \frac{d\ln T}{d\ln P}$$

je podmínka pro vznik konvekce dána **Schwarzschildovým kritériem stability**:

$$\nabla_{\rm rad} > \nabla_{\rm ad}$$

kde adiabatický gradient ideálního jednoatomového plynu je:

$$\nabla_{\rm ad} \equiv \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_{\rm ad} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{5/3 - 1}{5/3} = 0{,}40$$

a fiktivní radiační gradient (jaký by musel být, kdyby veškerý tok neslo záření) je:

$$\nabla_{\rm rad} = \frac{3\kappa_R P L(r)}{16\pi a c G M(r) T^4}$$

V přítomnosti gradientu chemického složení (např. v jádře s rostoucí koncentrací helia $\nabla_\mu \equiv \frac{d\ln\mu}{d\ln P} > 0$) působí těžší helium jako stabilizující zátěž. Zobecněné **Ledouxovo kritérium** má tvar:

$$\nabla_{\rm rad} > \nabla_{\rm ad} + \frac{\phi}{\delta}\nabla_\mu$$

kde $\phi = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu}\right)_{P,T} = 1$ a $\delta = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_{P,\mu} = 1$ pro ideální plyn.

```
+-------------------------------------------------------------------------+
|                PODMÍNKY VYVOLÁVAJÍCÍ KONVEKCI                           |
+-------------------------------------------------------------------------+
| 1. Vysoká opacita kappa: Chladné vnější obálky (ionizace H a He)         |
|    -> Vytváří konvektivní obálku u chladných hvězd a Slunce              |
| 2. Extrémně strmá produkce energie: CNO cyklus v jádře (L(r)/M(r) >> 1)  |
|    -> Vytváří konvektivní jádro u hmotných hvězd (M > 1.3 M_sun)         |
| 3. Nízký adiabatický gradient nabla_ad: V ionizačních zónách             |
+-------------------------------------------------------------------------+
```

3.4 Teorie směšovací délky (Mixing Length Theory – MLT)

V oblastech s plně rozvinutou konvekcí v hlubokém nitru je transport tepla natolik efektivní, že skutečný gradient teploty ∇ se liší od adiabatického $\nabla_{\rm ad}$ o méně než 10^{-6} (téměř dokonalá adiabatická konvekce: $\nabla \approx \nabla_{\rm ad}$).

Avšak v podpovrchových vrstvách je hustota plazmatu nízká a tepelná kapacita elementů malá. Nastává neefektivní **superadiabatická konvekce**, kde $\nabla > \nabla_{\rm ad}$. K popisu se používá fenomenologická **teorie směšovací délky (Böhm–Vitense MLT)**.

Předpokládá se, že konvektivní bublina urazí před rozpadem a odevzdáním tepla okolí charakteristickou dráhu $\ell_{\rm MLT}$ úměrnou lokální tlakové výšce H_P:

$$\ell_{\rm MLT} = \alpha_{\rm MLT} H_P = \alpha_{\rm MLT} \frac{P}{\rho g}$$

kde $\alpha_{\rm MLT}$ je bezrozměrný kalibrační parametr směšovací délky (typicky $\alpha_{\rm MLT} \approx 1{,}8 - 2{,}2$ kalibrovaný na současné Slunce) a $g = GM(r)/r^2$ je lokální tíhové zrychlení.

Rychlost konvektivních elementů $v_{\rm conv}$ a konvektivní tok $F_{\rm conv}$ jsou dány vztahy:

$$v_{\rm conv} \approx \sqrt{\frac{g \ell_{\rm MLT}^2 \delta}{8 H_P} (\nabla - \nabla_e)}$$

$$F_{\rm conv} = \rho c_P T \left(\frac{\ell_{\rm MLT}}{2 H_P} \right) v_{\rm conv} (\nabla - \nabla_e)$$

Celkový tok energie je v každé vrstvě přesně zachován: $F_{\rm tot} = F_{\rm rad} + F_{\rm conv} = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$.

3.5 Vědecký Python kód: Analýza Schwarzschildova kritéria

Následující kód demonstruje výpočet $\nabla_{\rm rad}$ a testuje Schwarzschildovo kritérium pro model sluneční obálky:

```
import numpy as np

def test_convective_stability(r_norm, M_norm, L_norm, T_kelvin, rho_cgs, X=0.74, Z=0.02):
    """Výpočet radiačního gradientu a test Schwarzschildova kritéria."""
    # Fyzikální konstanty v SI
    G = 6.67430e-11
    c = 2.99792e8
    a = 7.5657e-16
    k_B = 1.38065e-23
    m_u = 1.66054e-27
    M_sun = 1.989e30
    R_sun = 6.963e8
    L_sun = 3.828e26


# Přepočet do SI
    r = r_norm * R_sun
    M_r = M_norm * M_sun
    L_r = L_norm * L_sun
    rho = rho_cgs * 1e3  # kg/m^3


mu = 1.0 / (2.0<em>X + 0.75</em>(1.0 - X - Z) + 0.5*Z)
    P = (rho * k_B * T_kelvin) / (mu * m_u)


# Kramersova opacita + elektronový rozptyl
    kappa_es = 0.020 * (1.0 + X)
    kappa_kramers = 4.0e21 * (1.0 + X) * (Z + 0.001) * (rho_cgs) * (T_kelvin**(-3.5))
    kappa_R = kappa_es + kappa_kramers


# Radiační gradient
    nabla_rad = (3.0 * kappa_R * P * L_r) / (16.0 * np.pi * a * c * G * M_r * (T_kelvin**4))
    nabla_ad = 0.40  # pro jednoatomový ideální plyn


is_convective = nabla_rad > nabla_ad


return nabla_rad, nabla_ad, is_convective, kappa_R


if __name__ == "__main__":
    print(f"{'r/R_sun':<10}{'T [K]':<12}{'nabla_rad':<14}{'nabla_ad':<12}{'Režim'}")
    print("-" * 58)

    # Test pro jádro Slunce vs vnější obálku
    layers = [
        (0.1, 0.1, 0.9, 1.3e7, 80.0),   # Jádro (radiativní u Slunce)
        (0.4, 0.5, 1.0, 5.0e6, 5.0),    # Střední vrstvy (radiativní)
        (0.75, 0.98, 1.0, 1.5e6, 0.1),  # Báze konvektivní zóny (nabla_rad roste)
        (0.95, 0.999, 1.0, 2.0e5, 0.001) # Vnější obálka (plně konvektivní)
    ]

    for r_n, m_n, l_n, T_val, rho_val in layers:
        n_rad, n_ad, is_conv, kap = test_convective_stability(r_n, m_n, l_n, T_val, rho_val)
```

```
        mode = "KONVEKCE" if is_conv else "ZÁŘENÍ"
        print(f"{r_n:<10.2f}{T_val:<12.1e}{n_rad:<14.4f}{n_ad:<12.2f}{mode}")
```

3.6 Praktický příklad: Doba difúze fotonu ze slunečního jádra

Zadání

Vypočítejte dobu náhodné procházky (radiační difúze) fotonu τ_{diff} ze středu Slunce k fotosféře. **Zadané hodnoty:**

- Poloměr Slunce: $R_\odot = 6{,}963 \times 10^8\,\text{m}$
- Střední volná dráha fotonu ve slunečním plazmatu: $\ell_{\text{mfp}} \approx 1\,\text{mm} = 10^{-3}\,\text{m}$
- Rychlost světla: $c = 2{,}998 \times 10^8\,\text{m/s}$

Krok 1: Fyzikální model náhodné procházky

Při difúzi se foton pohybuje rychlostí světla c, ale po každé srážce s volným elektronem (Thomsonův rozptyl) je rozptýlen do náhodného směru. Celkový vektor posunutí po N srážkách je:

$$\vec{R}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\ell}_i$$

Střední hodnota čtverce vzdálenosti od počátku pro izotropní náhodnou procházku je:

$$\langle R_{\text{tot}}^2 \rangle = N \ell_{\text{mfp}}^2$$

Krok 2: Výpočet počtu rozptylů (N)

Aby foton dosáhl poloměru $R_\odot$, musí být $\langle R_{\text{tot}}^2 \rangle \approx R_\odot^2$:

$$N \approx \left(\frac{R_\odot}{\ell_{\text{mfp}}} \right)^2 = \left(\frac{6{,}963 \times 10^8\,\text{m}}{10^{-3}\,\text{m}} \right)^2 = (6{,}963 \times 10^{11})^2 \approx 4{,}85 \times 10^{23}\,\text{srážek}$$

Krok 3: Výpočet celkové doby difúze

Celková dráha, kterou foton skutečně urazí cik-cak pohybem, je $d_{\text{tot}} = N \ell_{\text{mfp}}$. Doba difúze τ_{diff} je:

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{d_{\text{tot}}}{c} = \frac{N \ell_{\text{mfp}}}{c} = \frac{R_\odot^2}{c \ell_{\text{mfp}}}$$

Dosazením číselných hodnot:

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{(6{,}963 \times 10^8\,\text{m})^2}{(2{,}998 \times 10^8\,\text{m/s}) \times 10^{-3}\,\text{m}} = \frac{4{,}85 \times 10^{17}}{2{,}998 \times 10^5} \approx 1{,}62 \times 10^{12}\,\text{s}$$

Přepočteme na roky ($1\,\text{rok} \approx 3{,}156 \times 10^7\,\text{s}$):

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{1{,}62 \times 10^{12}}{3{,}156 \times 10^7} \approx 51\,300\,\text{let}$$

Výsledek a interpretace

Foton vzniklý termonukleární fúzí v jádře Slunce ve formě tvrdého gama záření potřebuje přibližně **50 tisíc až 170 tisíc let** (v závislosti na přesném radiálním profilu opacity), než difúzí dospěje k fotosféře. Během těchto desítek tisíc let je foton nesčetněkrát reabsorbován a reemitován, přičemž jeho energie postupně degraduje z energetických gama kvant na optické světlo a teplo, které dopadá na zemský povrch.

Část II: Hvězdné atmosféry a spektroskopická diagnostika

> **ZAJÍMAVOST**
>
> **Tematický přehled Části II** Hvězdná atmosféra představuje tenkou povrchovou přechodovou vrstvu mezi neprůhledným vnitřním plazmatem a prázdnotou okolního kosmického prostoru. Ačkoliv tvoří méně než miliardtinu celkové hmotnosti hvězdy, je atmosféra jediným přímým zdrojem veškerých fotonů, které zachycují pozemské i kosmické spektrografy.

Fyzika zářivého přechodu z kontinua do spektra

Zatímco ve vnitřních vrstvách hvězdy vládne téměř dokonalá termodynamická rovnováha a difúzní aproximace záření, v atmosféře se fotony stávají volnými a unikají do vesmíru. Ztráta izotropie zářivého pole a prudký pokles optické hloubky činí z radiative transferu komplexní integrodiferenciální problém.

Tato část monografie se skládá ze dvou úzce provázaných kapitol:

1. **Kapitola 4: Radiativní transfer v atmosféře** Matematická definice fundamentálních radiometrických veličin: specifické intenzity I_ν, zářivého toku F_ν, hustoty energie záření u_ν a tenzoru radiačního tlaku $P_{\nu,ij}$. Formulace rovnice přenosu záření, optické hloubky τ_ν a zdrojové funkce S_ν. Analýza lokální termodynamické rovnováhy (LTE) a řešení Milneovy-Eddingtonovy úlohy pro šedou atmosféru. Odvození Eddingtonovy-Barbierovy aproximace a detailní popis okrajového ztemnění hvězdných disků.

1. **Kapitola 5: Vznik absorpčních a emisních čar, křivka růstu** Kvantově-mechanická interakce záření s atomární hmotou: Einsteinovy koeficienty A_{ji}, B_{ij}, B_{ji} a oscilátorové síly f_{ij}. Statistická rovnováha vzbuzených stavů popsaná Boltzmannovou rovnicí a ionizační rovnováha daná Sahovou rovnicí. Fyzikální mechanismy rozšíření spektrálních čar (přirozené vyzáření, tepelné Dopplerovo rozšíření, tlakové Starkovo a van der Waalsovo rozšíření). Syntéza Voigtova profilu a konstrukce univerzální křivky růstu pro stanovení chemického zastoupení prvků ve hvězdách.

Spektroskopická diagnostika formulovaná v této části je klíčem, kterým astrofyzici odemykají teplotu, povrchovou gravitaci, rotaci i chemické složení vzdálených hvězd a galaxií.

Kapitola 4: Radiativní transfer v atmosféře

> **ZAJÍMAVOST**
>
> **Historický kontext** Formální teorii přenosu záření vybudoval počátkem 20. století Karl Schwarzschild a rozvinuli ji Edward Arthur Milne a Subrahmanyan Chandrasekhar ve své monografii *Radiative Transfer* (1950). Ukázali, jak se z mikroskopických interakcí fotonů s atomy utváří makroskopické zářivé pole pozorovatelné z kosmických vzdáleností.

4.1 Základní radiometrické veličiny zářivého pole

Pro rigorózní popis elektromagnetického záření v astrofyzice definujeme čtyři fundamentální momenty zářivého pole:

1. Specifická intenzita záření (I_ν)

Množství energie dE_ν prošlé za čas dt ploškou dA pod úhlem θ k normále do prostorového úhlu $d\Omega$ ve frekvenčním intervalu $(\nu, \nu + d\nu)$:

$$dE_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{n}, t)\cos\theta \, dA \, d\Omega \, d\nu \, dt$$

Jednotkou specifické intenzity v SI je $\mathrm{W\,m^{-2}\,Hz^{-1}\,sr^{-1}}$. Specifická intenzita má fundamentální vlastnost: ve vakuu podél paprsku je konstantní ($\frac{dI_\nu}{ds} = 0$).

2. Střední intenzita (J_ν – nultý moment)

Průměrná intenzita přes celou sféru prostorových úhlů (4π steradiánů):

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint_{4\pi} I_\nu \, d\Omega = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\, d\mu$$

kde $\mu \equiv \cos\theta$. Hustota energie záření na jednotku frekvence je $u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu$.

3. Monochromatický zářivý tok (F_ν – první moment)

Čistý přenos energie přes jednotkovou plochu orientovanou kolmo k ose z:

$$F_\nu = \oint_{4\pi} I_\nu \cos\theta \, d\Omega = 2\pi \int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\mu \, d\mu$$

V teoretické astrofyzice se často zavádí Eddingtonův tok $H_\nu \equiv \frac{F_\nu}{4\pi} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu \mu \, d\mu$.

4. Tlak záření (K_ν – druhý moment)

Izotropní složka tenzoru radiačního tlaku je definována jako:

$$K_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint_{4\pi} I_\nu \cos^2\theta \, d\Omega = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu \mu^2 \, d\mu$$

Radiační tlak na dané frekvenci je $P_{\nu,\mathrm{rad}} = \frac{4\pi}{c} K_\nu$. Pro zcela izotropní záření platí $K_\nu = \frac{1}{3} J_\nu$, z čehož okamžitě plyne známý vztah $P_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{3} u$.

4.2 Rovnice radiačního transferu a optická hloubka

Uvažujme paprsek šířící se podél dráhy s. Během průchodu elementem dráhy ds dochází ke dvěma procesům:

1. Ztráta energie absorpcí a rozptylem: $dI_{\nu,\mathrm{loss}} = -\kappa_\nu \rho I_\nu \, ds = -\alpha_\nu I_\nu \, ds$, kde $\alpha_\nu = \kappa_\nu \rho$ je lineární koeficient extinkce ($\mathrm{m^{-1}}$).

2. Zisk energie spontánní a stimulovanou emisí a rozptylem do směru paprsku: $dI_{\nu,\text{gain}} = j_\nu \rho \, ds = \eta_\nu \, ds$, kde j_ν je koeficient emise ($\mathrm{W\,kg^{-1}\,Hz^{-1}\,sr^{-1}}$).

Součet dává základní **rovnici radiačního transferu**:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \rho$$

Dělením veličinou $\kappa_\nu \rho$ zavedeme **zdrojovou funkci** $S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}$:

$$\frac{dI_\nu}{\kappa_\nu \rho \, ds} = -I_\nu + S_\nu$$

V planparalelní atmosféře se sklonem paprsku $\mu = \cos\theta$ platí $ds = dz/\mu = -dr/\mu$. Zavedeme radiální **optickou hloubku** τ_ν měřenou od vnějšího okraje atmosféry ($z = \infty$) směrem do hloubky:

$$d\tau_\nu = -\kappa_\nu \rho \, dz$$

$$\tau_\nu(z) = \int_z^\infty \kappa_\nu \rho \, dz'$$

Rovnice přenosu záření v planparalelní geometrii získá kanonický tvar:

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau_\nu, \mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu, \mu) - S_\nu(\tau_\nu)$$

Formální integrace této lineární diferenciální rovnice dává pro vystupující paprsky ($\mu > 0$) na povrchu ($\tau_\nu = 0$):

$$I_\nu(0, \mu) = \int_0^\infty S_\nu(t_\nu) \exp\left(-\frac{t_\nu}{\mu}\right) \frac{dt_\nu}{\mu}$$

4.3 Lokální termodynamická rovnováha (LTE)

V hvězdné fotosféře se teplota mění v prostoru, takže celý systém není v globální termodynamické rovnováze. Nicméně střední volná dráha částic plynu je o mnoho řádů menší než rozměr atmosféry, takže srážky mezi atomy a elektrony udržují lokální Maxwellovo rozdělení rychlostí odpovídající lokální teplotě $T(\tau)$.

V režimu **lokální termodynamické rovnováhy (LTE)** platí Kirchhoffův zákon:

$$S_\nu(\tau) = B_\nu(T(\tau)) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

kde $B_\nu(T)$ je Planckova funkce záření absolutně černého tělesa.

4.4 Eddingtonova–Barbierova aproximace a okrajové ztemnění

Rozvineme-li zdrojovou funkci $S_\nu(\tau_\nu)$ v Taylorovu řadu v okolí $\tau_\nu = 0$:

$$S_\nu(\tau_\nu) \approx S_0 + S_1 \tau_\nu$$

a dosadíme do integrálu formálního řešení, dostáváme:

$$I_\nu(0, \mu) = \int_0^\infty (S_0 + S_1 t_\nu) \exp\left(-\frac{t_\nu}{\mu}\right) \frac{dt_\nu}{\mu} = S_0 + S_1 \mu = S_\nu(\tau_\nu = \mu)$$

Tento klíčový výsledek se nazývá **Eddingtonova–Barbierova aproximace**:

DŮLEŽITÉ

Fyzikální smysl Eddingtonovy-Barbierovy relace Specifická intenzita $I_\nu(0,\mu)$ vystupující z atmosféry pod úhlem $\theta = \arccos\mu$ je přibližně rovna hodnotě zdrojové funkce S_ν v optické hloubce $\tau_\nu = \mu = \cos\theta$. Pozorujeme-li střed slunečního disku ($\theta = 0 \implies \mu = 1$), vidíme záření z hloubky $\tau_\nu = 1$, kde je plazma teplejší. Pozorujeme-li okraj disku ($\theta \to 90^\circ \implies \mu \to 0$), paprsek prochází šikmo atmosférou a my vidíme pouze mělké, chladné vrstvy ($\tau_\nu \approx 0$). Proto se sluneční disk směrem k okraji jeví tmavší – nastává **okrajové ztemnění (Limb Darkening)**.

Lineární zákon okrajového ztemnění se parametrizuje vztahem:

$$\frac{I_\lambda(\mu)}{I_\lambda(1)} = 1 - u_\lambda(1-\mu)$$

kde koeficient u_λ závisí na vlnové délce a efektivní teplotě hvězdy (pro Slunce ve viditelném oboru $u \approx 0{,}6$).

4.5 Šedá atmosféra a Milneovo-Eddingtonovo řešení

V tzv. **šedé atmosféře** předpokládáme, že opacita $\kappa_\nu = \bar{\kappa}$ nezávisí na frekvenci. Celková optická hloubka je $\tau = \int \bar{\kappa}\rho\, dz$.

Integrováním transportní rovnice přes všechny frekvence a úhly (výpočet nultého a prvního momentu) obdržíme za předpokladu radiační rovnováhy ($F = \mathrm{konst} = \sigma T_{\rm eff}^4$):

$$\frac{dK}{d\tau} = H = \frac{F}{4\pi}$$

Použitím Eddingtonovy aproximace pro izotropii ve druhém momentu ($K \approx \frac{1}{3}J$) dostáváme:

$$\frac{1}{3}\frac{dJ}{d\tau} = \frac{F}{4\pi} \implies J(\tau) = \frac{3F}{4\pi}(\tau + q(\tau))$$

kde Hopfova funkce $q(\tau)$ se mění v úzkém rozmezí od $q(0) = 1/\sqrt{3} \approx 0{,}577$ do $q(\infty) \approx 0{,}710$.

V jednoduché Eddingtonově aproximaci ($q(\tau) = 2/3$) dostáváme analytický teplotní profil šedé atmosféry:

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4}T_{\rm eff}^4\left(\tau + \frac{2}{3}\right)$$

Z tohoto vztahu okamžitě vidíme:

- Na povrchu ($\tau = 0$): $T(0) = (1/2)^{1/4}T_{\rm eff} \approx 0{,}84\,T_{\rm eff}$.
- Efektivní teploty $T = T_{\rm eff}$ je dosaženo v optické hloubce:

$$\tau = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$$

Právě optická hloubka $\tau = 2/3$ definuje fyzikální polohu **fotosféry hvězdy**.

4.6 Vědecký Python kód: Výpočet profilu okrajového ztemnění

Následující skript počítá úhlový profil intenzity vystupující ze šedé atmosféry a srovnává přesné Chandrasekharovo řešení s lineární Eddingtonovou aproximací:

```
import numpy as np

def limb_darkening_profile(n_points=100):
    """Výpočet okrajového ztemnění I(mu)/I(1) pro šedou atmosféru."""
    mu = np.linspace(0.01, 1.0, n_points)

    # 1. Eddingtonova aproximace: T^4 = (3/4) Teff^4 (tau + 2/3)
    # I(0, mu) = S(tau = mu) = (3/4) F / pi * (mu + 2/3)
    I_eddington = (3.0 / 4.0) * (mu + 2.0 / 3.0)
    I_edd_norm = I_eddington / ((3.0 / 4.0) * (1.0 + 2.0 / 3.0))


# 2. Empirický kvadratický model pro Slunce ve viditelném oboru (lambda = 500 nm)
    # I(mu)/I(1) = 1 - u1<em>(1 - mu) - u2</em>(1 - mu)^2
    u1, u2 = 0.45, 0.25
    I_solar = 1.0 - u1 * (1.0 - mu) - u2 * ((1.0 - mu)**2)


return mu, I_edd_norm, I_solar


if __name__ == "__main__":
    mu_vals, I_edd, I_sol = limb_darkening_profile(10)
    print(f"{'cos(theta) [mu]':<18}{'I_Edd / I(1)':<18}{'I_Solar / I(1)':<18}")
    print("-" * 54)
    for m, ie, is_ in zip(mu_vals, I_edd, I_sol):
        print(f"{m:<18.3f}{ie:<18.4f}{is_:<18.4f}")
```

4.7 Praktický příklad: Kontrola emergentního toku z Eddingtonova–Barbierova vztahu

Zadání

Dokažte analyticky i numericky, že integrací specifické intenzity $I(\mu) = S_0 + S_1\mu$ přes vystupující poloprostor získáte správnou hodnotu celkového astrofyzikálního toku $F = \pi(S_0 + \frac{2}{3}S_1)$ a že emergentní tok odpovídá hodnotě zdrojové funkce v hloubce $\tau = 2/3$.

Krok 1: Analytická integrace toku

Z definice celkového zářivého toku vystupujícího z povrchu hvězdy:

$$F(0) = \int_{\mu>0} I(0,\mu)\cos\theta\, d\Omega = 2\pi \int_0^1 I(0,\mu)\mu\, d\mu$$

Dosadíme Eddingtonův-Barbierův rozvoj $I(0,\mu) = S_0 + S_1\mu$:

$$F(0) = 2\pi \int_0^1 (S_0\mu + S_1\mu^2)\, d\mu = 2\pi\left[S_0\frac{\mu^2}{2} + S_1\frac{\mu^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{S_0}{2} + \frac{S_1}{3}\right) = \pi\left(S_0 + \frac{2}{3}S_1\right)$$

Krok 2: Porovnání se zdrojovou funkcí

Zdrojová funkce v hloubce $\tau = 2/3$ je:

$$S\left(\tau = \frac{2}{3}\right) = S_0 + S_1\left(\frac{2}{3}\right) = S_0 + \frac{2}{3}S_1$$

Odtud přímo plyne fundamentální vztah:

$$F(0) = \pi S\left(\tau = \frac{2}{3}\right)$$

Výsledek a interpretace

Výpočet exaktně dokazuje, že celkový zářivý tok opouštějící hvězdu odpovídá toku absolutně černého tělesa zářícího při teplotě nacházející se v optické hloubce $\tau = 2/3$. To matematicky potvrzuje naši definici stelární fotosféry jako vrstvy $\tau = 2/3$.

Kapitola 5: Vznik absorpčních a emisních čar, křivka růstu

ZAJÍMAVOST

Historický kontext Když Joseph von Fraunhofer roku 1814 objevil stovky tmavých čar ve slunečním spektru, netušil, že nalezl chemický otisk hvězd. Teprve Kirchhoff a Bunsen roku 1859 pochopili jejich původ a Cecilia Payne-Gaposchkinová roku 1925 aplikovala kvantovou statistiku Meghnada Sahy, čímž dokázala, že vesmír je tvořen převážně vodíkem a heliem.

5.1 Atomární procesy a Einsteinovy koeficienty

Přechod elektronu mezi dvěma diskrétními energetickými hladinami E_i a E_j ($E_j > E_i$) v atomu doprovází emise nebo absorpce fotonu o frekvenci $\nu_0 = (E_j - E_i)/h$. Albert Einstein (1916) formuloval tyto procesy pomocí tří fundamentálních koeficientů:

Laserová naváděcí hvězda na observatoři Paranal (VLT) excitující sodíkovou vrstvu v atmosféře pro adaptivní optiku a vysokorozlišující spektroskopii

1. **Spontánní emise (A_{ji}):** Pravděpodobnost za jednotku času, že atom ve vyšším stavu j samovolně přejde do nižšího stavu i a vyzáří foton do libovolného směru:

$$\left(\frac{dn_j}{dt}\right)_{\text{spont}} = -A_{ji} n_j$$

Jednotkou A_{ji} je s^{-1}. Pro dovolené elektrické dipólové přechody je $A_{ji} \sim 10^{7} - 10^{8}\,\mathrm{s}^{-1}$, pro zakázané přechody (např. [O III]) je $A_{ji} \sim 10^{-2} - 10^{2}\,\mathrm{s}^{-1}$.

1. **Indukovaná (stimulovaná) absorpce (B_{ij}):** Přechod z i do j vyvolaný zářivým polem o hustotě energie u_ν:

$$\left(\frac{dn_i}{dt}\right)_{\text{abs}} = -B_{ij} n_i u_{\nu_0}$$

1. **Stimulovaná emise (B_{ji}):** Přechod z j do i vynucený dopadajícím fotonem, produkující identický foton:

$$\left(\frac{dn_j}{dt}\right)_{\text{stim}} = -B_{ji} n_j u_{\nu_0}$$

V termodynamické rovnováze je rozdělení populací dáno Boltzmannovým zákonem ($n_j/n_i = (g_j/g_i)\exp(-h\nu_0/k_BT)$) a hustota záření Planckovým zákonem. Z rovnováhy přechodů plynou **Einsteinovy relace**:

$$g_i B_{ij} = g_j B_{ji}$$

$$A_{ji} = \frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3} B_{ji}$$

kde g_i, g_j jsou statistické váhy energetických hladin.

5.2 Boltzmannova a Sahova ionizační rovnice

V populaci atomů téhož ionizačního stupně je poměr počtu atomů v excitovaném stavu j k základnímu stavu i při teplotě T dán **Boltzmannovou rovnicí**:

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i}\exp\left(-\frac{E_j - E_i}{k_B T}\right)$$

Celkový počet atomů v daném ionizačním stupni je $N = \sum_k n_k = \frac{n_1}{g_1}U(T)$, kde $U(T) = \sum_k g_k \exp(-E_k/k_BT)$ je **partiční funkce (stavová suma)**.

Poměr mezi sousedními ionizačními stavy (např. neutrální vodík H^0 a ionizovaný vodík H^+) popisuje **Sahova rovnice**:

$$\frac{N_{j+1}}{N_j} = \frac{2k_BT}{P_e}\frac{U_{j+1}(T)}{U_j(T)}\left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\chi_j}{k_BT}\right)$$

kde $P_e = n_e k_B T$ je tlak volného elektronového plynu, χ_j je ionizační potenciál z ionizačního stavu j a faktor 2 představuje statistickou váhu volného elektronu ($g_e = 2$ kvůli spinu $s = 1/2$).

> **DŮLEŽITÉ**
>
> **Vysvětlení spektrální posloupnosti OBAFGKM** Balmeroovy čáry vodíku (přechody z $n = 2$) dosahují maxima intenzity u hvězd spektrální třídy A0 ($T_{\mathrm{eff}} \approx 10\,000\,\mathrm{K}$). - U chladnějších hvězd (třídy G, K, M) je teplota příliš nízká, takže podle Boltzmannovy rovnice je téměř veškerý vodík v základním stavu $n = 1$ a nemůže absorbovat v optickém oboru. - U teplejších hvězd (třídy B, O) je teplota natolik vysoká, že podle Sahovy rovnice je většina vodíku plně ionizována na volné protony. Spektrální posloupnost hvězd tedy neodráží rozdíly v chemickém složení, nýbrž **rozdíly v teplotě fotosféry**!

5.3 Mechanismy rozšíření spektrálních čar

Skutečná spektrální čára není nekonečně úzká, nýbrž má konečný profil absorpčního koeficientu $\kappa_\nu = \kappa_0 \phi(\nu)$, kde $\int \phi(\nu)\,d\nu = 1$. Rozlišujeme tři hlavní fyzikální mechanismy:

1. Přirozené rozšíření (Natural Broadening)

Vyplývá z Heisenbergova principu neurčitosti pro dobu života excitovaného stavu $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$. Profil je dán Lorentzovou funkcí:

$$\phi_{\mathrm{nat}}(\nu) = \frac{\gamma/(4\pi^2)}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2}$$

kde tlumící konstanta je $\gamma = \sum_i A_{ji} \sim 10^8\,\mathrm{s}^{-1}$. Přirozená šířka čáry je extrémně malá ($\Delta\lambda_{\mathrm{nat}} \sim 10^{-4}$ Å).

2. Tepelné Dopplerovo rozšíření

Způsobeno náhodným tepelným pohybem atomů podél zorného paprsku s Maxwellovým rozdělením rychlostí:

$$\phi_D(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D}\exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2\right]$$

kde Dopplerova šířka je:

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{2k_BT}{m_{\text{atom}}} + v_{\text{turb}}^2}$$

kde v_{turb} je rychlost mikroturbulence ve fotosféře. Tepelné rozšíření dominuje v jádru čáry.

3. Tlakové (srážkové) rozšíření (Starkovo a van der Waalsovo)

Poruchy energetických hladin vyvolané elektrickými poli okolních iontů a elektronů (lineární a kvadratický Starkův jev) nebo neutrálních atomů vodíku (van der Waalsova interakce). Přidává k tlumící konstantě srážkový člen $\gamma_{\text{coll}} \propto P_{\text{gas}}$. Tlakové rozšíření způsobuje, že trpaslíci hlavní posloupnosti (s vysokým tlakem ve fotosféře) mají mnohem širší křídla Balmeroových čar než veleobři stejné spektrální třídy.

5.4 Voigtův profil a křivka růstu

Celkový profil čáry je konvolucí gaussovského Dopplerova jádra a lorentzovských křídel tlumícího profilu – tzv. **Voigtův profil**:

$$H(a,v) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-y^2)}{(v-y)^2+a^2}\,dy$$

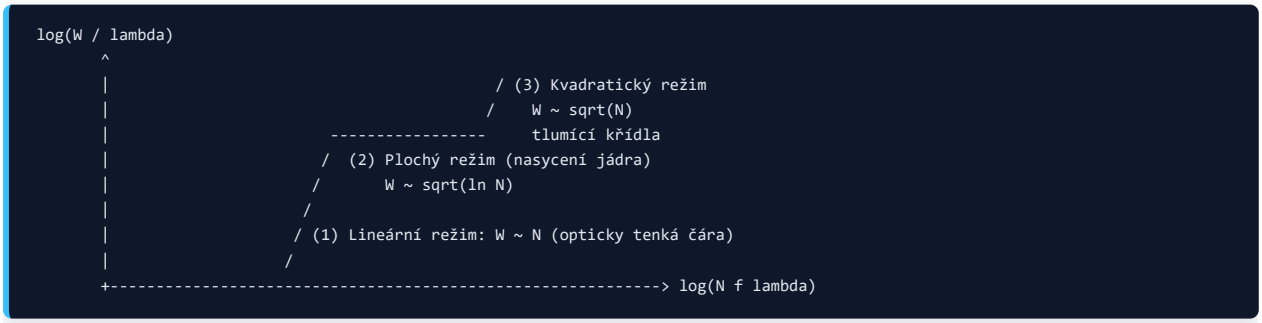
kde $v = \frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}$ je bezrozměrná frekvenční odchylka a $a = \frac{\gamma}{4\pi\Delta\nu_D}$ je bezrozměrný tlumící parametr.

Celkovou sílu absorpční čáry kvantifikujeme pomocí **ekvivalentní šířky čáry (W_λ)**:

$$W_\lambda \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{F_\lambda}{F_c}\right)d\lambda$$

kde F_c je tok v okolním kontinuu. W_λ představuje šířku obdélníkového profilu o nulovém toku, který absorbuje stejné množství energie jako daná reálná čára.

Závislost $\log(W_\lambda/\lambda)$ na $\log(Nf\lambda)$ (součin počtu absorbujících atomů N a oscilátorové síly f) se nazývá **křivka růstu (Curve of Growth)**:



1. **Lineární část (opticky tenká čára, $\tau_0 \ll 1$):** Celá čára absorbuje lineárně s počtem atomů:

$$W_\lambda \propto Nf\lambda^2$$

1. **Plochá část (nasycení jádra čáry, $1 \lesssim \tau_0 \lesssim 10^3$):** Jádro čáry dosáhne nulové reziduální intenzity a další atomy absorbují pouze v úzkém Dopplerovském přechodu:

$$W_\lambda \propto \Delta\lambda_D\sqrt{\ln\tau_0}$$

1. **Tlumící část (silné Lorentzovy křídla, $\tau_0 \gg 10^3$):** Začínají absorbovat vzdálená křídla Voigtova profilu:

$$W_\lambda \propto \sqrt{Nf\gamma}$$

5.5 Vědecký Python kód: Voigtův profil a křivka růstu

Následující skript numericky integruje Voigtův profil a konstruuje křivku růstu pro absorpční čáru:

```
import numpy as np
from scipy.special import wofz

def voigt_profile(v, a):
    """Výpočet Voigtovy funkce H(a, v) pomocí Faddeevovy funkce wofz."""
    z = v + 1j * a
    return np.real(wofz(z))


def curve_of_growth(a_damp=0.01, n_points=50):
    """Konstrukce křivky růstu log(W/lambda_D) v závislosti na log(tau_0)."""
    log_tau0_grid = np.linspace(-2.0, 4.5, n_points)
    tau0_vals = 10.0**log_tau0_grid

    # Frekvenční mřížka v jednotkách Dopplerovy šířky
    v_grid = np.linspace(-100.0, 100.0, 4000)
    dv = v_grid[1] - v_grid[0]
    H_vals = voigt_profile(v_grid, a_damp)


log_W_vals = []
    for tau0 in tau0_vals:
        # Optická hloubka tau(v) = tau0 * H(a, v)
        tau_v = tau0 * H_vals
        # Ekvivalentní šířka W_v = integral (1 - exp(-tau_v)) dv
        absorp = 1.0 - np.exp(-tau_v)
        W_v = np.sum(absorp) * dv
        log_W_vals.append(np.log10(W_v))


return log_tau0_grid, np.array(log_W_vals)


if __name__ == "__main__":
    log_tau, log_W = curve_of_growth(a_damp=0.02, n_points=8)
    print(f"{'log(tau_0)':<16}{'log(W / Delta_nu_D)':<24}{'Fyzikální režim'}")
    print("-" * 58)
    for lt, lw in zip(log_tau, log_W):
        if lt < 0.0:
            regime = "Lineární (W ~ tau_0)"
        elif lt < 2.5:
            regime = "Plochý (nasycení jádra)"
        else:
            regime = "Tlumící (W ~ sqrt(tau_0))"
        print(f"{lt:<16.2f}{lw:<24.4f}{regime}")
```

5.6 Praktický příklad: Ionizační rovnováha vodíku ve fotosféře hvězdy A0V vs Slunce

Zadání

Vypočítejte stupeň ionizace vodíku $N(\mathrm{H}^{+})/N(\mathrm{H}^{0})$ pomocí Sahovy rovnice pro:

1. Fotosféru hvězdy spektrální třídy A0V ($T = 10\,000\,\mathrm{K}$, $P_e = 10\,\mathrm{Pa}$).
2. Fotosféru Slunce ($T = 5\,778\,\mathrm{K}$, $P_e = 1{,}5\,\mathrm{Pa}$).

Fyzikální konstanty:

- Ionizační energie vodíku: $\chi_\mathrm{H} = 13{,}598\,\mathrm{eV} = 2{,}179 \times 10^{-18}\,\mathrm{J}$
- Hmotnost elektronu: $m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
- Planckova konstanta: $h = 6{,}626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
- Boltzmannova konstanta: $k_B = 1{,}381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
- Stavové sumy: pro neutrální vodík $U_0 \approx 2$ (základní stav se spinem), pro proton $U_1 = 1$.

Krok 1: Výpočet pro hvězdu A0V ($T = 10\,000\,\mathrm{K}$)

Termální energie je $k_B T = (1{,}381 \times 10^{-23}) \times 10\,000 = 1{,}381 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \approx 0{,}862\,\mathrm{eV}$.
Tepelná vlnová délka elektronu:

$$\left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2}\right)^{3/2} = \left(\frac{2\pi \times (9{,}109 \times 10^{-31}) \times (1{,}381 \times 10^{-19})}{(6{,}626 \times 10^{-34})^2}\right)^{3/2} \approx (1{,}800 \times 10^{18})^{3/2} \approx 2{,}415 \times 10^{27}\,\mathrm{m^{-3}}$$

Dosadíme do Sahovy rovnice:

$$\frac{N(\mathrm{H^+})}{N(\mathrm{H^0})} = \frac{2 \times (1{,}381 \times 10^{-19})}{10} \times \frac{1}{2} \times (2{,}415 \times 10^{27}) \times \exp\left(-\frac{13{,}598}{0{,}862}\right)$$

$$\frac{N(\mathrm{H^+})}{N(\mathrm{H^0})} = (3{,}335 \times 10^{7}) \times \exp(-15{,}77) = (3{,}335 \times 10^{7}) \times (1{,}416 \times 10^{-7}) \approx 4{,}72$$

Ionizační zlomek je $x = \frac{N^+}{N^0 + N^+} = \frac{4{,}72}{1 + 4{,}72} \approx 0{,}825 \approx 82{,}5\,\%$.

Krok 2: Výpočet pro Slunce ($T = 5\,778\,\mathrm{K}$)

Pro Slunce je $k_B T \approx 0{,}498\,\mathrm{eV}$ a $P_e = 1{,}5\,\mathrm{Pa}$.
Exponenciální faktor:

$$\exp\left(-\frac{13{,}598\,\mathrm{eV}}{0{,}498\,\mathrm{eV}}\right) = \exp(-27{,}30) \approx 1{,}39 \times 10^{-12}$$

Předfaktor vychází přibližně $7{,}5 \times 10^{7}$. Dosazením:

$$\frac{N(\mathrm{H^+})}{N(\mathrm{H^0})} \approx 7{,}5 \times 10^{7} \times 1{,}39 \times 10^{-12} \approx 1{,}04 \times 10^{-4}$$

Ionizována je pouhá setina procenta atomů vodíku ($0{,}01\,\%$).

Výsledek a interpretace

U Slunce je fotosférický vodík z $99{,}99\,\%$ neutrální. U hvězdy A0V je naopak z $82{,}5\,\%$ ionizovaný. Zbývajících $17{,}5\,\%$ neutrálních atomů u hvězdy A0V je díky vysoké teplotě účinně termálně excitováno do hladiny $n = 2$, což vede k maximální intenzitě Balmeroových absorpčních čar v celém HR diagramu.

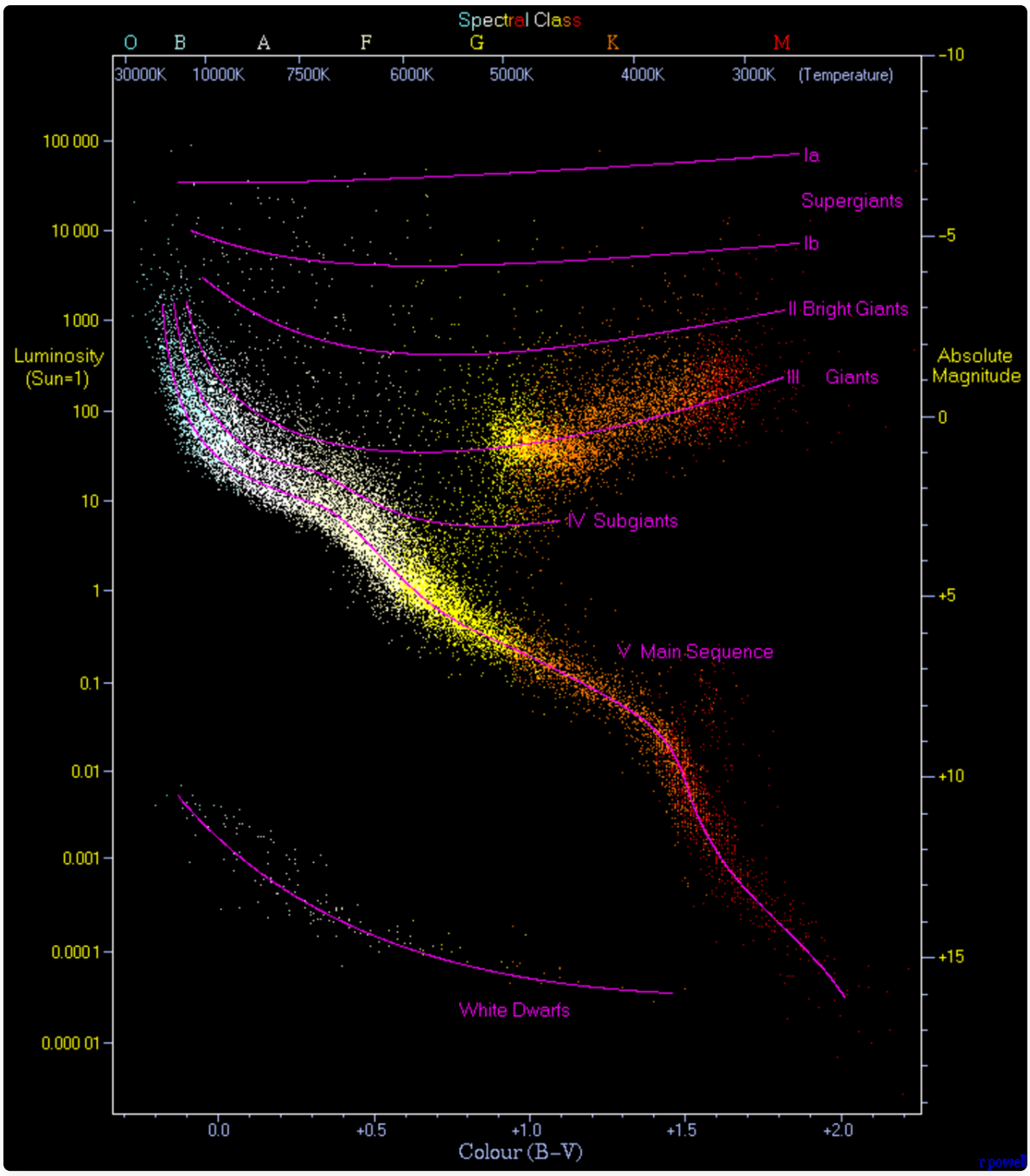
Část III: Vývoj hvězd a pulzace

ZAJÍMAVOST

Tematický přehled Části III Hvězdy nejsou statické objekty. Jsou to dynamické termodynamické systémy procházející dramatickými vývojovými stádii od gravitačního zrodu v chladných molekulárních oblacích přes dlouhé a stabilní období hlavní posloupnosti až po pulzační nestability a bouřlivou ztrátu hmoty u masivních veleobrů.

Životní cyklus hvězd v Hertzsprungově–Russellově diagramu

V této části propojíme statické rovnice vnitřní stavby a atmosférický přenos do dynamického časového vývoje. Klíčovou arénou tohoto zkoumání je **Hertzsprungův–Russellův diagram (HR diagram)**, který mapuje zářivý výkon hvězd v závislosti na jejich efektivní povrchové teplotě (nebo spektrální třídě).



Vědecký Hertzsprungův-Russellův diagram znázorňující hlavní posloupnost, větev obrů, pás nestability a bílé trpaslíky

Tato část obsahuje tři hluboké kapitoly:

1. **Kapitola 6: Od protohvězdy na hlavní posloupnost** Fyzika mezihvězdného prostředí, Jeansovo kritérium gravitační nestability a fragmentace obřích molekulárních mračen (GMC). Izotermální a adiabatická fáze volného pádu. Formování hydrostatického jádra protohvězdy, akrečních disků a bipolárních výtrysků (Herbigovy-Haroovy objekty). Závod mezi gravitační kontrakcí a transportem tepla podél Hayashiho plně konvektivní stopy a Henyeyovy radiativní stopy. Zapálení vodíkové fúze v jádře a dosažení nultého věku hlavní posloupnosti (ZAMS).

1. **Kapitola 7: Pulzující proměnné hvězdy a asteroseismologie** Hydrodynamické nestability a oscilace hvězdných obálek. Pás nestability v HR diagramu a Eddingtonův ventilový mechanismus (κ-mechanismus) v zónách parciální ionizace helia a vodíku. Klasické cefeidy, Henrietta Leavittová a vztah perioda-zářivost jako základní kosmický metr. Hvězdy typu RR Lyrae a δ Scuti. Úvod do asteroseismologie: akustické p-módy a gravitační g-módy jako rentgen vnitřní rotace a struktury stelárních jader na základě dat z misí Kepler a TESS.

1. **Kapitola 8: Vývoj hmotných hvězd a Wolf-Rayetovy hvězdy** Fyzika hvězdných gigantů ($M > 8\,M_{\odot}$). Eddingtonova mez zářivosti a teorie radiačně hnaných hvězdných větrů (CAK model). Pokročilá hoření v jádře vytvářející cibulovitou strukturu elementů až po železné jádro. Masivní ztráta hmotnosti a Contiho evoluční scénář: O hvězdy $\rightarrow$ zářivé modré proměnné (LBV) $\rightarrow$ Wolfovy-Rayetovy hvězdy (typy WN, WC, WO) se super-sonickým odtokem hmoty obohacujícím mezihvězdné prostředí o těžké prvky.

Tato část uzavírá vývojový oblouk aktivního života hvězd před jejich definitivním zhroucením do kompaktních reliktů.

Kapitola 6: Od protohvězdy na hlavní posloupnost

ZAJÍMAVOST

Historický kontext První rigorózní teorii gravitačního kolapsu plynného mračna publikoval sir James Jeans v roce 1902. V 60. letech 20. století japonský astrofyzik Chushiro Hayashi ukázal, že chladné protohvězdy musí být plně konvektivní a pohybovat se po téměř vertikální stopě v HR diagramu, zatímco Louis Henyey popsal jejich pozdější horizontální radiativní fázi.

6.1 Jeansovo kritérium gravitační nestability

Hvězdy vznikají v nejchladnějších a nejhustších oblastech mezihvězdného prostoru – v **obřích molekulárních oblacích (GMC)** o typických teplotách $T \approx 10 - 20\,\mathrm{K}$ a hustotách $n_{\mathrm{H_2}} \sim 10^{8} - 10^{11}\,\mathrm{m^{-3}}$.

Uvažujme homogenní, nekonečné, statické plynné médium o hustotě ρ_0 a tlaku P_0. Malé perturbace popsané vlnovou funkcí $\delta\rho \propto \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)]$ vedou lineární perturbací Eulerovy rovnice, rovnice kontinuity a Poissonovy rovnice gravitačního pole k **disperzní relaci**:

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_0$$

kde $c_s = \sqrt{\gamma k_B T / (\mu m_u)}$ je izotermální nebo adiabatická rychlost zvuku v plynu.

Rozebéřeme dva mezní případy:

1. **Stabilní režim ($k^2 c_s^2 > 4\pi G\rho_0$):** Frekvence ω je reálná. Tlakové síly překonávají gravitaci a perturbace se šíří jako tlumené zvukové vlny.
2. **Nestabilní gravitační kolaps ($k^2 c_s^2 < 4\pi G\rho_0$):** Frekvence ω je ryze imaginární ($\omega = \pm i\Gamma$). Perturbace exponenciálně roste v čase jako $\delta\rho(t) \propto \exp(\Gamma t)$. Nastává gravitační kolaps.

Kritická hodnota vlnového čísla, kde $\omega = 0$, definuje **Jeansovo vlnové číslo** a **Jeansovu vlnovou délku**:

$$k_J = \frac{\sqrt{4\pi G\rho_0}}{c_s} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s\sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}$$

Hmotnost obsažená uvnitř sféry o poloměru $R_J = \lambda_J/2$ představuje **Jeansovu hmotnost**:

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\rho_0\left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}\rho_0\left(\frac{\pi c_s^2}{G\rho_0}\right)^{3/2} = \frac{\pi^{5/2}}{6}\frac{c_s^3}{G^{3/2}\rho_0^{1/2}}$$

Alternativně z viriálového teorému ($2U + \Omega < 0$):

$$M_J \approx \left(\frac{5k_B T}{G\mu m_u}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho_0}\right)^{1/2}$$

6.2 Izotermální kolaps, fragmentace a adiabatická fáze

Počáteční kolaps molekulárního oblaku probíhá na dynamické časové škále volného pádu:

$$\tau_{\mathrm{ff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32 G\rho_0}}$$

Dokud je plyn opticky tenký pro infračervené záření emitované molekulami CO a prachovými zrny, je veškerá energie uvolněná gravitačním smršťováním okamžitě vyzářena ven. Kolaps je proto **izotermální** ($T = \mathrm{konst}$).

Při izotermálním smršťování hustota ρ roste, zatímco teplota T (a tedy i rychlost zvuku c_s) zůstává konstantní. Protože $M_J \propto \rho^{-1/2}$, **Jeansova hmotnost s postupujícím kolapsem neustále klesá**! Původně masivní oblak o hmotnosti tisíců $M_\odot$ se začne rozpadat na

menší a menší gravitačně vázané shluky – nastává **hierarchická fragmentace** (Hoyleova fragmentace).

Fragmentace se zastaví v okamžiku, kdy hustota v centru nejmenšího shluku překročí hodnotu $\rho \approx 10^{-10}\,\mathrm{kg/m^3}$. Prach a plyn se stanou opticky tlustými pro vlastní infračervené záření. Zářivá energie již nemůže volně unikat, plyn se začne zahřívat a chová se adiabaticky ($\gamma = 5/3$):

$$M_J \propto T^{3/2}\rho^{-1/2} \propto (\rho^{\gamma-1})^{3/2}\rho^{-1/2} \propto \rho^{3\gamma/2-2} \propto \rho^{1/2}$$

Od tohoto okamžiku Jeansova hmotnost s rostoucí hustotou naopak roste! Fragmentace definitivně končí a v centru se rodí **první hydrostatické jádro** o hmotnosti zhruba $0{,}01 - 0{,}05\,M_\odot$.

6.3 Hvězdy typu T Tauri a akreční disky

Kolabující oblak má vždy nenulový moment hybnosti. Kvůli zákonu zachování momentu hybnosti nemůže plyn padat přímo do středu, nýbrž zplošťuje se do rotujícího **cirkumstelárního akrečního disku**.

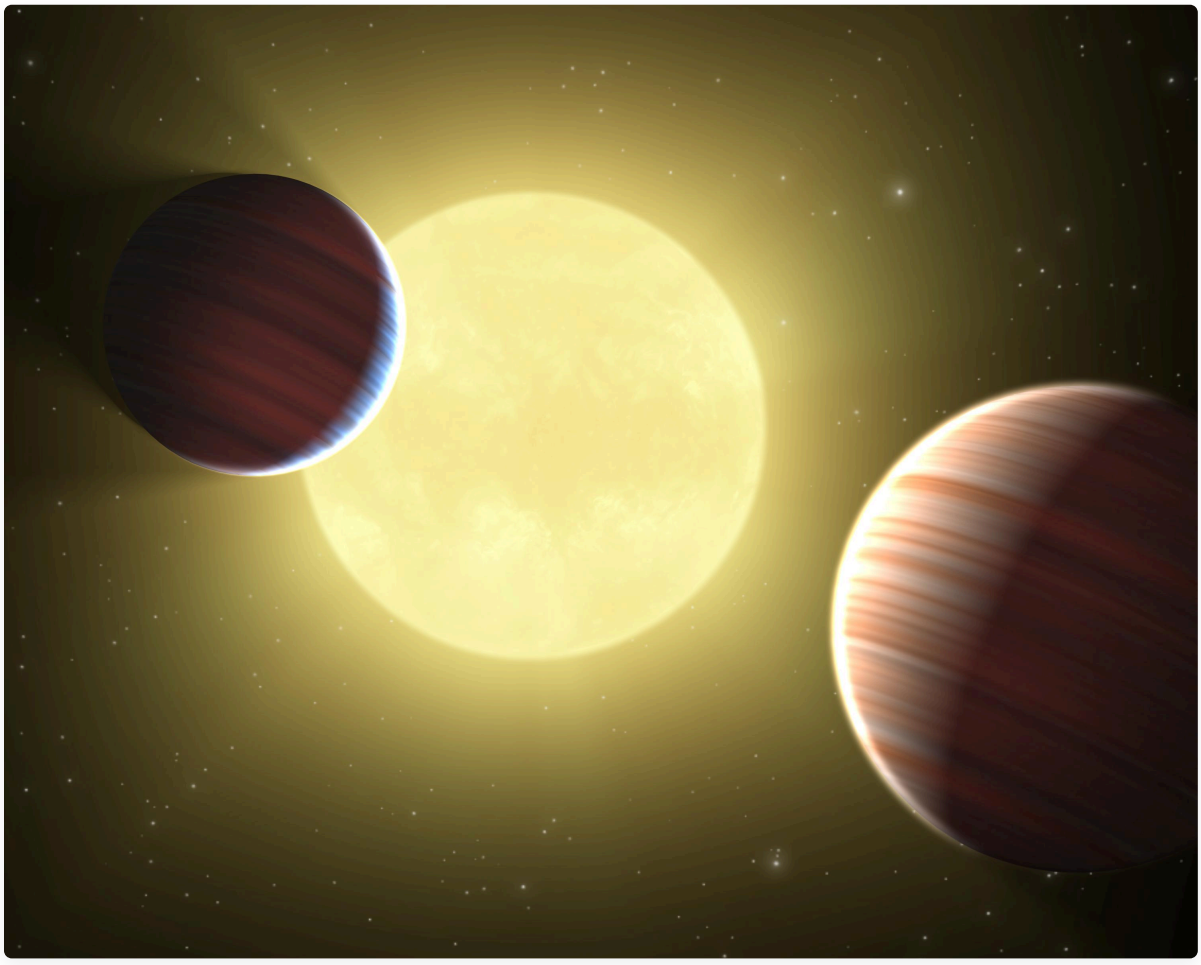


Schéma tranzitu a akreční geometrie v rovině disku mladého stelárního systému

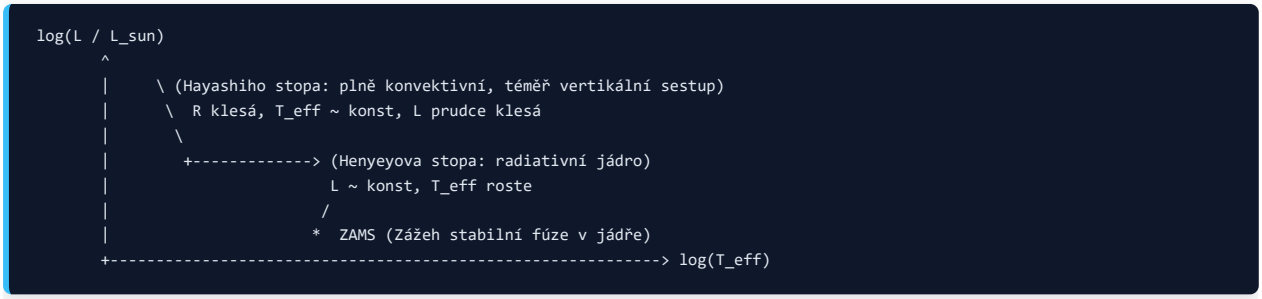
V této fázi pozorujeme mladé hvězdné objekty (YSO) jako **hvězdy typu T Tauri** (pro $M < 2\,M_\odot$) nebo **Herbigovy Ae/Be hvězdy** (pro $M > 2\,M_\odot$):

- Vykazují silné emisní čáry (zejména Hα), svědčící o dopadu plynu z disku na povrch hvězdy podél magnetických siločar.
- Silná magnetická pole vyvolávají kolimované magnetocentrifugální výtrysky plazmatu (jety) podél rotační osy, které interagují s okolním mezihvězdným prostředím a vytvářejí zářící rázové struktury známé jako **Herbigovy–Haroovy objekty (HH objekty)**.
- Z akrečního prachoplynného disku se postupně formuje planetární soustava.

6.4 Hayashiho a Henyeyova stopa

Chushiro Hayashi (1961) dokázal, že pro každou hmotnost hvězdy existuje v HR diagramu nepřekročitelná teplotní hranice vpravo (při nízkých teplotách $T_{\mathrm{eff}} \approx 3\,000 - 4\,000\,\mathrm{K}$), tzv. **Hayashiho mez**. Vpravo od této meze nemůže existovat žádná hvězda v hydrostatické a radiační rovnováze.

Mladá protohvězda začíná svou kvazistatickou kontrakci na Hayashiho mezi jako obří, chladný a plně konvektivní objekt. Její vývoj v HR diagramu probíhá ve dvou fázích:



1. **Hayashiho stopa (vertikální sestup):** Hvězda je plně konvektivní. Protože je na Hayashiho mezi, její efektivní teplota zůstává přibližně konstantní ($T_{\mathrm{eff}} \approx 3\,500 - 4\,000\,\mathrm{K}$). V důsledku gravitační kontrakce se však zmenšuje její poloměr R. Jelikož $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{eff}}^4$, luminozita hvězdy prudce klesá téměř vertikálně dolů v HR diagramu.

1. **Henyeyova stopa (horizontální posun):** Jakmile teplota ve středu vystoupí na několik milionů kelvinů, Kramersova opacita poklesne natolik, že v jádře převládne přenos tepla zářením. Konvekce ustoupí do vnější obálky a vznikne stabilní radiativní jádro. Hvězda se pohybuje téměř vodorovně v HR diagramu: luminozita se téměř nemění, zatímco efektivní teplota T_{eff} roste. Hvězdy s velmi nízkou hmotností ($M \lesssim 0{,}35\,M_\odot$) zůstávají plně konvektivní po celou dobu a Henyeyovu stopu vůbec neprocházejí.

6.5 Dosažení nultého věku hlavní posloupnosti (ZAMS)

Kontrakce pokračuje, dokud centrální teplota nedosáhne prahové hodnoty $T_c \approx 10^7\,\mathrm{K}$, kdy se v jádře zapálí termonukleární fúze vodíku (pp-řetězec nebo CNO cyklus).

V okamžiku, kdy jaderná produkce energie plně vyrovná vyzařovaný zářivý výkon ($L_{\mathrm{nuc}} = L$), gravitační kontrakce se definitivně zastaví. Hvězda dosáhla dokonalé hydrostatické a tepelné rovnováhy.

Tento okamžik se nazývá **nultý věk hlavní posloupnosti (Zero-Age Main Sequence – ZAMS)**. Hvězda zde stráví zhruba $90\,\%$ celého svého aktivního života.

Hmotnost hvězdy [$M_\odot$]	τ_{KH} na ZAMS [let]	Spektrální třída ZAMS	T_{eff} [K]	L [$L_\odot$]	Typ vnitřní struktury
$0{,}1$	$\sim 5 \times 10^8$	M6 V	$2\,800$	10^{-3}	Plně konvektivní
$1{,}0$ (Slunce)	3×10^7	G2 V	$5\,780$	$1{,}0$	Radiativní jádro + konvektivní obálka
$3{,}0$	3×10^6	B8 V	$12\,000$	60	Konvektivní jádro + radiativní obálka
$15{,}0$	6×10^4	B0 V	$30\,000$	2×10^4	Mohutné konvektivní jádro + radiativní obálka

---

6.6 Vědecký Python kód: Výpočet Jeansovy hmotnosti a poloměru

Následující kód počítá Jeansovu hmotnost M_J, Jeansův poloměr R_J a čas volného pádu τ_{ff} pro různé mezihvězdné podmínky:

```
import numpy as np

def calculate_jeans_parameters(T_kelvin, n_H2_cm3, mu=2.34):
    """Výpočet Jeansovy hmotnosti a poloměru molekulárního oblaku."""
    # Konstanty v SI
    G = 6.67430e-11
    k_B = 1.38065e-23
    m_u = 1.66054e-27
    M_sun = 1.989e30
    year_sec = 3.15576e7


# Přepočet hustoty z částic/cm^3 do kg/m^3
    rho = n_H2_cm3 * 1e6 * (mu * m_u)


# Izotermální rychlost zvuku (gamma = 1 pro izotermální mračno)
    c_s = np.sqrt(k_B * T_kelvin / (mu * m_u))


# Jeansova vlnová délka a poloměr
    lambda_J = c_s * np.sqrt(np.pi / (G * rho))
    R_J = lambda_J / 2.0


# Jeansova hmotnost
    M_J = (4.0 / 3.0) * np.pi * (R_J**3) * rho
    M_J_solar = M_J / M_sun


# Čas volného pádu
    tau_ff = np.sqrt(3.0 * np.pi / (32.0 * G * rho))
    tau_ff_years = tau_ff / year_sec


return M_J_solar, R_J / 1.496e11, tau_ff_years, c_s  # R_J v AU


if __name__ == "__main__":
    cloud_types = [
        ("Difúzní mračno HI", 50.0, 100.0),
        ("Obří molekulární mračno (GMC)", 20.0, 1e3),
        ("Husté jádro v Býku (Taurus core)", 10.0, 1e5),
        ("Bokova globule", 8.0, 1e6)
    ]
    print(f"{'Typ oblaku':<32}{'T [K]':<8}{'M_J [M_sun]':<14}{'R_J [AU]':<12}{'tau_ff [let]'}")
    print("-" * 76)
    for name, T_k, n_val in cloud_types:
        m_j, r_j, t_ff, cs = calculate_jeans_parameters(T_k, n_val)
        print(f"{name:<32}{T_k:<8.0f}{m_j:<14.2f}{r_j:<12.1f}{t_ff:<12.1e}")
```

6.7 Praktický příklad: Kolaps chladného jádra mlhoviny v Býku

Zadání

Chladné molekulární jádro v oblasti Býka (Taurus molecular cloud) má kinetickou teplotu $T = 10\,\mathrm{K}$ a číselnou hustotu molekulárního vodíku $n(\mathrm{H_2}) = 10^5\,\mathrm{cm^{-3}} = 10^{11}\,\mathrm{m^{-3}}$. Střední molekulová hmotnost plynu je $\mu = 2{,}34$.

1. Vypočítejte izotermální rychlost zvuku c_s.
2. Vypočítejte Jeansovu hmotnost M_J v jednotkách hmotnosti Slunce ($M_\odot$).
3. Určete čas volného pádu τ_{ff}.

Krok 1: Výpočet rychlosti zvuku

Izotermální rychlost zvuku v chladném molekulárním plynu:

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_u}} = \sqrt{\frac{(1{,}381 \times 10^{-23}) \times 10}{2{,}34 \times (1{,}661 \times 10^{-27})}} = \sqrt{\frac{1{,}381 \times 10^{-22}}{3{,}887 \times 10^{-27}}} = \sqrt{3{,}553 \times 10^{4}} \approx 188{,}5\,\mathrm{m/s}$$

Krok 2: Výpočet hustoty plynu

Hmotnostní hustota molekulárního mračna:

$$\rho_0 = n \cdot (\mu m_u) = 10^{11}\,\mathrm{m^{-3}} \times (3{,}887 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}) \approx 3{,}89 \times 10^{-16}\,\mathrm{kg/m^3}$$

Krok 3: Výpočet Jeansovy hmotnosti

Podle Jeansova vztahu:

$$M_J = \frac{\pi^{5/2}}{6} \frac{c_s^3}{G^{3/2} \rho_0^{1/2}}$$

Spočteme jednotlivé členy:

- $\pi^{5/2}/6 \approx 17{,}49/6 \approx 2{,}915$
- $c_s^3 = (188{,}5)^3 \approx 6{,}697 \times 10^{6}\,\mathrm{m^3/s^3}$
- $G^{3/2} = (6{,}674 \times 10^{-11})^{3/2} \approx 5{,}452 \times 10^{-16}\,\mathrm{m^{4,5}\,kg^{-1,5}\,s^{-3}}$
- $\rho_0^{1/2} = \sqrt{3{,}89 \times 10^{-16}} \approx 1{,}972 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg^{0,5}\,m^{-1,5}}$

Dosazením:

$$M_J = 2{,}915 \times \frac{6{,}697 \times 10^{6}}{(5{,}452 \times 10^{-16}) \times (1{,}972 \times 10^{-8})} = 2{,}915 \times \frac{6{,}697 \times 10^{6}}{1{,}075 \times 10^{-23}} \approx 1{,}82 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

Vyjádřeno ve slunečních hmotnostech ($M_\odot = 1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$):

$$M_J \approx \frac{1{,}82 \times 10^{30}}{1{,}989 \times 10^{30}} \approx 0{,}91\,M_\odot$$

Krok 4: Čas volného pádu

$$\tau_{\mathrm{ff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32 G \rho_0}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32 \times (6{,}674 \times 10^{-11}) \times (3{,}89 \times 10^{-16})}} = \sqrt{\frac{9{,}425}{8{,}307 \times 10^{-25}}} = \sqrt{1{,}135 \times 10^{25}} \approx 3{,}37 \times 10^{12}\,\mathrm{s}$$

Přepočteno na roky:

$$\tau_{\mathrm{ff}} = \frac{3{,}37 \times 10^{12}\,\mathrm{s}}{3{,}156 \times 10^{7}\,\mathrm{s/rok}} \approx 107\,000\,\mathrm{let}$$

Výsledek a interpretace

Zadané husté jádro mlhoviny v Býku má Jeansovu hmotnost přesně odpovídající hmotnosti jedné hvězdy slunečního typu ($0{,}91\ M_\odot$). Během pouhých přibližně sto tisíc let se toto jádro gravitačně zhroutí a zrodí se v něm protohvězda typu T Tauri.

Kapitola 7: Pulzující proměnné hvězdy a asteroseismologie

> **ZAJÍMAVOST**
>
> **Historický kontext** V roce 1908 publikovala Henrietta Swan Leavittová objev vztahu mezi periodou světelných změn a zdánlivou jasností u proměnných hvězd v Malém Magellanově mračnu. Tento vztah perioda-zářivost umožnil Edwinu Hubbleovi roku 1923 určit vzdálenost galaxie v Andromedě (M31) a prokázat, že vesmír se skládá z nesčetných samostatných ostrovů hvězd.

7.1 Pás nestability a Eddingtonův kappa-mechanismus

Většina hvězd v HR diagramu je dynamicky i termálně stabilní. Pokud se však vyvíjející se hvězda dostane do téměř vertikálního pruhu zvaného **pás nestability (Instability Strip)**, její obálka začne periodicky pulzovat.

V normální hvězdné vrstvě působí komprese plynného elementu jako tlumič: při stlačení se plyn zahřeje, opacita κ podle Kramersova zákona ($\kappa \propto \rho T^{-7/2}$) poklesne, teplo snadněji unikne ven a při následné expanzi element zchladne. Výsledkem je rychlé utlumení jakékoliv počáteční oscilace.

Aby se oscilace staly samobuzenými (jako v tepelném motoru), musí se plyn při stlačení chovat opačně: **musí teplo pohltit (zvýšit svou opacitu) a zadržet jej**. Tento mechanismus navrhl Arthur Eddington a nazývá se **κ-mechanismus (ventilový mechanismus)**.

K tomuto jevu dochází v zónách **částečné ionizace**:

1. **Zóna druhé ionizace helia ($\mathrm{He}^{+} \rightleftharpoons \mathrm{He}^{++} + e^{-}$):** Nastává při teplotě $T \approx 40\,000 - 50\,000\,\mathrm{K}$ a je hlavním motorem pulzací klasických cefeid a hvězd typu RR Lyrae.
2. **Zóna ionizace vodíku a první ionizace helia ($\mathrm{H}^{0} \rightleftharpoons \mathrm{H}^{+} + e^{-}$, $\mathrm{He}^{0} \rightleftharpoons \mathrm{He}^{+} + e^{-}$):** Nastává při teplotách $T \approx 10\,000 - 15\,000\,\mathrm{K}$.

V zóně ionizace se část práce vykonané při stlačení nespotřebuje na zvýšení kinetické teploty, nýbrž na další ionizaci atomů. Adiabatický gradient $\nabla_{\mathrm{ad}} = (\Gamma_2 - 1)/\Gamma_2$ dramaticky poklesne pod hodnotu $0{,}4$. Zároveň hustota volných elektronů stoupne natolik, že opacita vzroste:

$$\kappa_T \equiv \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T} \right)_{\rho} > 0$$

Vrstva se stane pro záření „neprůchodnou záklopkou“, akumuluje teplo a tlak, což následně vymrští nadložní vrstvy prudce vzhůru.

7.2 Klasické cefeidy a Leavittové zákon

Klasické cefeidy (populace I) jsou svítiví žlutí veleobři spektrálních tříd F až K s hmotnostmi $M \approx 4 - 20\,M_{\odot}$. Pulzují radiálně v základním módu nebo v prvním svrchním tónu s periodami v rozmezí od 1 do 100 dnů.

Z rovnice hydrodynamických radiálních oscilací plyne fundamentální **Ritterův vztah**: perioda pulzace P je nepřímo úměrná odmocnině střední hustoty:

$$P \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_{\odot}}} \approx Q$$

kde Q je pulzační konstanta ($Q \approx 0{,}03 - 0{,}04\,\mathrm{dne}$ pro klasické cefeidy).

Jelikož $\bar{\rho} \propto M/R^3$ a zářivost veleobrů splňuje vztah hmotnost-zářivost ($L \propto M^{3{,}5}$), lze poloměr vyjádřit pomocí Stefanova-Boltzmannova zákona $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{eff}}^4$. V úzkém pásu nestability je T_{eff} téměř konstantní, což po dosazení dává přímou závislost mezi periodou P a absolutní magnitudou M_V – **Leavittové zákon**:

$$\langle M_V \rangle = -2{,}76 \log_{10}(P/\mathrm{dny}) - 1{,}40$$

Měřením periody světelné křivky cefeidy tak okamžitě získáme její absolutní zářivost. Srovnáním se zdánlivou magnitudou m_V určíme vzdálenost d pomocí modulu vzdálenosti:

$$\mu_0 = m_V - M_V - A_V = 5 \log_{10}\left(\frac{d}{10\,\mathrm{pc}}\right)$$

kde A_V je mezihvězdná extinkce. Cefeidy tak tvoří první a nejdůležitější stupeň kosmického žebříčku vzdáleností.

7.3 Hvězdy typu RR Lyrae a delta Scuti

Vedle cefeid se v pásu nestability nacházejí další klíčové třídy pulzujících hvězd:

Hvězdy typu RR Lyrae

Staré hvězdy populace II s nízkou hmotností ($M \approx 0{,}6 - 0{,}8\,M_\odot$) nacházející se na horizontální větvi (HB) kulových hvězdokup.

- Pulzují s periodami $P \approx 0{,}2 - 0{,}9\,\mathrm{dne}$.
- Mají téměř konstantní absolutní vizuální magnitudu:

$$\langle M_V \rangle \approx +0{,}6 \pm 0{,}1\,\mathrm{mag}$$

Díky této vlastnosti slouží jako perfektní „standardní svíčky“ pro měření vzdáleností v rámci naší Galaxie a v satelitních trpasličích galaxiích Místní skupiny.

Hvězdy typu δ Scuti

Mladé hvězdy hlavní posloupnosti nebo těsně po ní o hmotnostech $M \approx 1{,}5 - 2{,}5\,M_\odot$ se spektrálními třídami A až F. Vykazují nízkou amplitudu světelných změn ($\Delta m \lesssim 0{,}1\,\mathrm{mag}$) a krátké periody (0,5 až 6 hodin). Kmitají v mnoha radiálních i neradiálních módech současně.

7.4 Neradiální oscilace a asteroseismologie

Skutečná hvězda nepulzuje pouze jako celistvá nafukující se koule. Je to trojrozměrný akustický rezonátor, v němž se šíří mechanické vlny popsané sférickými harmonickými funkcemi $Y_\ell^m(\theta, \phi)$.

Posunutí hmotového elementu rozkládáme podle tří kvantových čísel:

- Radiální řád n (počet uzlových ploch podél poloměru).
- Úhlový stupeň ℓ (počet uzlových čar na povrchu).
- Azimutální řád m ($-\ell \le m \le \ell$, určuje orientaci vůči rotační ose).

Rozlišujeme dva základní typy vlnových módů:

1. Akustické módy (p-módy – tlakové vlny)

Vracející silou je gradient tlaku plynu. Šíří se rychlostí zvuku $c_s = \sqrt{\gamma P/\rho}$. Dominují ve vnějších oblastech hvězdy a ve slunečních oscilacích (tzv. pětiminutové oscilace Slunce s $\nu \approx 3\,\mathrm{mHz}$). Frekvence p-módů vysokého řádu splňují asymptotické pravidlo:

$$\nu_{n,\ell} \approx \Delta\nu \left(n + \frac{\ell}{2} + \epsilon\right)$$

kde $\Delta\nu = \left(2\int_0^R \frac{dr}{c_s}\right)^{-1} \propto \sqrt{\frac{M}{R^3}}$ je **velká frekvenční separace**, která přímo měří střední hustotu hvězdy.

2. Gravitační módy (g-módy – vztlakové vlny)

Vracející silou je Archimédův vztlak v radiativních vrstvách stabilních vůči konvekci. Oscilují podél Bruntovy-Väisäläovy frekvence N_{BV}:

$$N_{\mathrm{BV}}^2 = g\left(\frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln P}{dr} - \frac{d\ln \rho}{dr}\right)$$

Gravitační módy nepronikají konvektivními zónami ($N_{\mathrm{BV}}^2 < 0$), ale pronikají až do hlubokého termonukleárního jádra hvězdy. Perioda g-módů splňuje asymptotický vztah $\Delta P_\ell \propto \left(\int \frac{N_{\mathrm{BV}}}{r} dr\right)^{-1}$.

7.5 Asteroseismická diagnostika stelárních jader

Díky kosmickým dalekohledům **Kepler** a **TESS**, které nepřetržitě měřily fotometrii stovek tisíc hvězd s přesností na úrovni parts-per-million (ppm), se asteroseismologie stala jedním z nejmocnějších nástrojů moderní astrofyziky.

U červených obrů byly objeveny tzv. **smíšené módy (mixed modes)**: vlny, které se v hustém jádře chovají jako gravitační g-módy a v rozsáhlé řídké obálce jako akustické p-módy. Smíšené módy umožňují:

1. Změřit periodovou separaci $\Delta\Pi$ a jednoznačně rozlišit mezi obry spalujícími pouze vodíkovou slupku kolem inertního heliového jádra (RGB) a obry, kteří již v jádře zapálili fúzi helia (hvězdy červeného shluku – Red Clump).
2. Z rotačního štěpení frekvencí ($\delta\nu_{n,\ell,m} = m \cdot \Omega_{\mathrm{rot}}$) přímo změřit rychlost rotace stelárního jádra, která je u vyvinutých hvězd až desetkrát rychlejší než rotace povrchu.

7.6 Vědecký Python kód: Řešení lineárních radiálních pulzací

Následující skript počítá fundamentální periodu radiálních oscilací homogenní hvězdy a ověřuje Ritterův vztah:

```
import numpy as np

def calculate_pulsation_period(M_solar, R_solar, gamma_ad=5.0/3.0):
    """Výpočet periody fundamentálního radiálního módu hvězdy."""
    G = 6.67430e-11
    M_sun = 1.989e30
    R_sun = 6.963e8
    day_sec = 86400.0


M = M_solar * M_sun
    R = R_solar * R_sun


# Střední hustota
    rho_mean = M / ((4.0 / 3.0) * np.pi * (R**3))
    rho_sun = M_sun / ((4.0 / 3.0) * np.pi * (R_sun**3))


# Úhlová frekvence fundamentálního módu pro homogenní kouli
    # omega_0^2 = (3 * gamma - 4) * (G * M / R^3)
    omega2 = (3.0 * gamma_ad - 4.0) * (G * M / (R**3))
    if omega2 <= 0:
        return None, None  # Dynamicky nestabilní


omega = np.sqrt(omega2)
    period_sec = 2.0 * np.pi / omega
    period_days = period_sec / day_sec


# Ritterova pulzační konstanta Q = P * sqrt(rho / rho_sun)
    Q_constant = period_days * np.sqrt(rho_mean / rho_sun)


return period_days, Q_constant


if __name__ == "__main__":
    stars = [
        ("Slunce (akustický limit)", 1.0, 1.0),
        ("RR Lyrae", 0.7, 5.0),
        ("Klasická cefeida (krátká perioda)", 5.0, 30.0),
        ("Klasická cefeida (dlouhá perioda)", 10.0, 80.0)
    ]
    print(f"{'Typ hvězdy':<36}{'M [M_sun]':<10}{'R [R_sun]':<10}{'Perioda [dny]':<16}{'Q [dny]'}")
    print("-" * 84)
    for name, m, r in stars:
        p_d, q_c = calculate_pulsation_period(m, r)
        print(f"{name:<36}{m:<10.1f}{r:<10.1f}{p_d:<16.3f}{q_c:<10.4f}")
```

7.7 Praktický příklad: Určení vzdálenosti cefeidy v galaxii M31

Zadání

Při fotometrickém sledování spirální galaxie M31 (Galaxie v Andromedě) byla objevena klasická cefeida s periodou pulzací $P = 39{,}8\,\text{dne}$. Střední zdánlivá vizuální magnituda této cefeidy je $\langle m_V \rangle = 19{,}20\,\text{mag}$. Mezihvězdná extinkce v daném směru činí $A_V = 0{,}35\,\text{mag}$.

1. Vypočítejte absolutní vizuální magnitudu cefeidy $\langle M_V \rangle$ pomocí kalibrovaného Leavittové vztahu.
2. Vypočítejte modul vzdálenosti μ_0 a vzdálenost galaxie M31 v parsecích a světelných letech.

Vztah perioda–zářivost:

$$\langle M_V \rangle = -2{,}76 \log_{10}(P/\text{dny}) - 1{,}40$$

Krok 1: Výpočet absolutní magnitudy $\langle M_V \rangle$

Logaritmus periody cefeidy:

$$\log_{10}(39{,}8) \approx 1{,}600$$

Dosadíme do Leavittové vztahu:

$$\langle M_V \rangle = -2{,}76 \times 1{,}600 - 1{,}40 = -4{,}416 - 1{,}40 \approx -5{,}82\,\text{mag}$$

Tato cefeida je přibližně $18\,000$-krát svítivější než naše Slunce ($M_{V,\odot} \approx +4{,}83\,\text{mag}$).

Krok 2: Výpočet korigovaného modulu vzdálenosti

Modul vzdálenosti s korekcí na mezihvězdnou absorpci:

$$\mu_0 = \langle m_V \rangle - \langle M_V \rangle - A_V$$

$$\mu_0 = 19{,}20 - (-5{,}82) - 0{,}35 = 19{,}20 + 5{,}82 - 0{,}35 = 24{,}67\,\text{mag}$$

Krok 3: Výpočet fyzikální vzdálenosti

Z definice modulu vzdálenosti $\mu_0 = 5 \log_{10}(d/10\,\text{pc})$:

$$\log_{10}\left(\frac{d}{10\,\text{pc}}\right) = \frac{\mu_0}{5} = \frac{24{,}67}{5} = 4{,}934$$

$$\frac{d}{10\,\text{pc}} = 10^{4{,}934} \approx 85\,900$$

$$d \approx 859\,000\,\text{pc} \approx 859\,\text{kpc} \approx 0{,}86\,\text{Mpc}$$

Přepočet na světelné roky ($1\,\text{pc} \approx 3{,}2616\,\text{ly}$):

$$d \approx 859\,000 \times 3{,}2616 \approx 2{,}80 \times 10^6\,\text{ly} \approx 2{,}8\,\text{milionu světelných let}$$

Výsledek a interpretace

Výpočet ukazuje, že zkoumaná cefeida se nachází ve vzdálenosti přibližně $2{,}8$ milionu světelných let (moderní nejpřesnější hodnota vzdálenosti M31 získaná kombinací cefeid a zákrytových dvojhvězd činí přibližně $2{,}54 \pm 0{,}06$ milionu ly). Tento výsledek definitivně dokazuje mezigalaktickou povahu spirálních mlhovin.

Kapitola 8: Vývoj hmotných hvězd a Wolf–Rayetovy hvězdy

ZAJÍMAVOST

Historický kontext V roce 1867 objevili francouzští astronomové Charles Wolf a Georges Rayet v souhvězdí Labutě tři neobvyklé hvězdy s širokými zářivými emisními pásy místo běžných absorpčních čar. Tyto hvězdy, dnes známé jako Wolfovy-Rayetovy hvězdy (WR), představují obnažená jádra extrémně masivních hvězd, které zbavily svou vnější vodíkovou obálku hurikánem hvězdného větru.

8.1 Eddingtonova mez zářivosti a radiačně hnaný vítr

V extrémně svítivých hvězdách působí na elektrony plazmatu odpudivá radiální síla způsobená Thomsonovým rozptylem fotonů. Jelikož jsou elektrony elektrostaticky svázány s protony a ionty, přenáší se tento radiační tlak na celou hmotu.

Radiální radiační síla působící na jeden elektron-iontový pár ve vzdálenosti r je:

$$F_{\mathrm{rad}} = \frac{\sigma_T F}{c} = \frac{\sigma_T L}{4\pi r^2 c}$$

kde $\sigma_T = 6{,}652 \times 10^{-29}\ \mathrm{m}^2$ je Thomsonův účinný průřez. Proti ní působí gravitační přitažlivost:

$$F_{\mathrm{grav}} = \frac{GM\mu_e m_u}{r^2}$$

kde $\mu_e = 2/(1+X)$ je střední molekulová hmotnost na volný elektron.

Kritická hodnota zářivosti, při níž radiační síla přesně vyrovná gravitační přitažlivost ($F_{\mathrm{rad}} = F_{\mathrm{grav}}$), se nazývá **Eddingtonova mez (Eddingtonova luminozita)**:

$$L_{\mathrm{Edd}} = \frac{4\pi GMc}{\kappa_{\mathrm{es}}} = \frac{4\pi GMcm_u\mu_e}{\sigma_T}$$

Pro čistě vodíkové plazma ($X = 1 \implies \kappa_{\mathrm{es}} \approx 0{,}040\ \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}$):

$$L_{\mathrm{Edd}} \approx 1{,}26 \times 10^{31} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \mathrm{W} \approx 3{,}2 \times 10^{4} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) L_\odot$$

Pokud by zářivost hvězdy překročila L_{Edd}, vnější vrstvy by byly okamžitě odfouknuty do mezihvězdného prostoru.

DŮLEŽITÉ

CAK teorie radiačně hnaného větru V reálných hvězdných atmosférách absorbují fotony nejen volné elektrony, nýbrž i miliony rezonančních spektrálních čar těžších iontů (C, N, O, Fe) v daleké ultrafialové oblasti. Castor, Abbott a Klein (1975, CAK teorie) ukázali, že díky Dopplerovu posuvu v expandující atmosféře zachycují ionty záření z doposud nezeslabeného kontinua. To vytváří mohutný hvězdný vítr s rychlostí ztráty hmoty $\dot{M} \propto L^{1/\alpha} M^{-(1-\alpha)/\alpha}$, kde $\alpha \approx 0{,}6 - 0{,}7$ je CAK silový parametr. Masivní hvězda tak může během svého života ztratit více než polovinu své původní hmotnosti!

8.2 Pokročilá hoření a cibulovitá struktura jádra

Zatímco hvězdy slunečního typu končí svůj život po vyhoření helia, hmotné hvězdy ($M \gtrsim 8\,M_\odot$) dosahují v centru tak obrovských teplot a tlaků, že jejich jádro postupně zažehne celou sérii fúzních reakcí:

1. **Hoření vodíku (CNO cyklus):** $T \approx 3 - 5 \times 10^7\,\mathrm{K}$, trvá $\sim 10^7$ let.
2. **Hoření helia (3–α proces):** $T \approx 1 - 2 \times 10^8\,\mathrm{K}$, trvá $\sim 10^6$ let.
3. **Hoření uhlíku ($^{12}\mathrm{C} + {}^{12}\mathrm{C}$):** $T \approx 6 - 8 \times 10^8\,\mathrm{K}$, trvá $\sim 10^3$ let.
4. **Hoření neonu (fotodisociace $^{20}\mathrm{Ne}(\gamma,\alpha)^{16}\mathrm{O}$ a následný záchyt α):** $T \approx 1{,}5 \times 10^9\,\mathrm{K}$, trvá ~ 1 rok.
5. **Hoření kyslíku ($^{16}\mathrm{O} + {}^{16}\mathrm{O}$):** $T \approx 2 \times 10^9\,\mathrm{K}$, trvá ~ 6 měsíců.
6. **Hoření křemíku (jaderný statistický rozpad a syntéza na $^{56}\mathrm{Ni} \to {}^{56}\mathrm{Co} \to {}^{56}\mathrm{Fe}$):** $T \approx 3{,}5 \times 10^9\,\mathrm{K}$, trvá **pouhý 1 den**!

Vznikem jádra ze železa $^{56}\mathrm{Fe}$ a niklu $^{56}\mathrm{Ni}$ termonukleární fúze definitivně končí. Jádro železa má nejvyšší vazebnou energii na jeden nukleon ($E_B/A \approx 8{,}8\,\mathrm{MeV}$). Jakákoliv další fúze by byla endotermická (energii by spotřebovávala, místo aby ji uvolňovala). Jádro ztratí zdroj termálního tlaku a je odsouzeno k okamžitému gravitačnímu kolapsu.

8.3 Ztráta hmoty a Contiho evoluční scénář

Peter Conti (1976) formuloval moderní evoluční paradigma pro nejhmotnější hvězdy ($M_{\mathrm{ZAMS}} \gtrsim 25 - 30\,M_\odot$):

$$\text{Hvězda třídy O} \longrightarrow \text{Luminous Blue Variable (LBV)} \longrightarrow \text{Wolfova-Rayetova hvězda (WR)} \longrightarrow \text{Supernova (typ Ib/Ic)}$$

Zářivé modré proměnné (LBV – např. η Carinae)

Extrémně svítivé nestabilní hvězdy blízko Eddingtonovy meze. Procházejí epizodickými gigantickými erupcemi, při nichž vyvrhují celá mračna hmoty ($\dot{M} \sim 10^{-1} - 10^{-2}\,M_\odot/\mathrm{rok}$).

Wolfovy–Rayetovy hvězdy (WR)

Když silný hvězdný vítr a erupce LBV kompletně odfouknou vodíkovou obálku, obnaží se horké termonukleární jádro. Teploty na povrchu dosahují $T_{\mathrm{eff}} \approx 30\,000 - 150\,000\,\mathrm{K}$ a rychlost větru dosahuje $v_\infty \approx 1\,000 - 4\,000\,\mathrm{km/s}$.
Rozlišujeme tři spektroskopické subtypy podle toho, jak hluboké vrstvy jsou obnaženy:

- **WN hvězdy:** Spektrum dominované emisemi dusíku a helia. Obnaženy vrstvy obohacené produkty CNO cyklu ($^{14}\mathrm{N}$).
- **WC hvězdy:** Spektrum dominované emisemi uhlíku a helia bez dusíku. Obnaženy hlubší vrstvy 3–α spalování helia ($^{12}\mathrm{C}$).
- **WO hvězdy:** Extrémně vyvinutá stádia s dominantními čarami vysoce ionizovaného kyslíku ($\mathrm{O\ VI}$) a uhlíku těsně před gravitačním kolapsem.

8.4 Rotační promíchávání a magnetická pole

Hmotné hvězdy rotují na hlavní posloupnosti velmi rychle (ekvatoriální rychlosti $v_{\mathrm{rot}} \approx 200 - 400\,\mathrm{km/s}$).

Rotace generuje vnitřní meridionální cirkulaci (von Zeipelův teorém a Eddingtonova-Sweetova cirkulace) a smykové nestability. Tyto hydrodynamické procesy účinně promíchávají chemické prvky mezi konvektivním jádrem a radiativní obálkou:

1. Přenášejí čerstvý vodík do jádra, což prodlužuje život hvězdy na hlavní posloupnosti.
2. Vynášejí produkty CNO cyklu (helium a dusík) na povrch ještě předtím, než hvězda odhodí obálku větrem.

3. Při extrémní rotaci může hvězda projít tzv. **kvazi-chemicky homogenní evolucí (CHE)**, kdy se celá hvězda promíchává jako celek, nikdy se nerozepne v červeného veleobra a stane se přímým prekurzorem dlouhého gama záblesku (GRB) nebo těsné dvojhvězdy černých děr detekovatelné gravitačními vlnami.

8.5 Vědecký Python kód: Výpočet Eddingtonovy meze a ztráty hmoty

Následující skript počítá Eddingtonovu zářivost L_{Edd}, poměr $\Gamma = L/L_{\mathrm{Edd}}$ a rychlost ztráty hmoty hvězdným větrem podle Vinkova empirického předpisu pro hmotné O a WR hvězdy:

```
import numpy as np

def massive_star_wind_analysis(M_solar, L_solar, T_eff, X=0.70, Z=0.02):
    """Výpočet Eddingtonova faktoru Gamma a odhad ztráty hmoty větrem."""
    G = 6.67430e-11
    c = 2.99792e8
    M_sun = 1.989e30
    L_sun = 3.828e26


# Opacita elektronového rozptylu
    kappa_es = 0.020 * (1.0 + X)  # m^2 / kg


# Eddingtonova luminozita
    L_edd = (4.0 * np.pi * G * (M_solar * M_sun) * c) / kappa_es
    L_edd_solar = L_edd / L_sun


# Eddingtonův faktor Gamma
    gamma_edd = L_solar / L_edd_solar


# Empirický odhad ztráty hmoty podle Vinka (pro horké O hvězdy, zjednodušený)
    # log(dM/dt) ~ -6.697 + 2.194<em>log(L/1e5) - 1.313</em>log(M/30) - 1.226*log(Teff/40000)
     log_Mdot = -6.697 + 2.194 * np.log10(L_solar / 1e5) - 1.313 * np.log10(M_solar / 30.0) - 1.226 *
np.log10(T_eff / 40000.0)
    M_dot_yr = 10.0**log_Mdot


return L_edd_solar, gamma_edd, M_dot_yr


if __name__ == "__main__":
    stars = [
        ("O9.5 V (ZAMS)", 20.0, 5.0e4, 33000.0),
        ("O4 If (Modrý veleobr)", 50.0, 8.0e5, 40000.0),
        ("LBV (klidová fáze)", 80.0, 2.0e6, 25000.0),
        ("Wolf-Rayet (WN)", 25.0, 5.0e5, 70000.0)
    ]
          print(f"{'Objekt':<26}{'M   [M_sun]':<10}{'L_Edd   [L_sun]':<16}{'Gamma   (L/L_Edd)':<18}{'dM/dt
[M_sun/rok]'}")
    print("-" * 88)
    for name, m, l, t in stars:
        l_edd, g_edd, mdot = massive_star_wind_analysis(m, l, t)
        print(f"{name:<26}{m:<10.1f}{l_edd:<16.2e}{g_edd:<18.3f}{mdot:<18.2e}")
```

8.6 Praktický příklad: Kritická zářivost a doba života veleobra o hmotnosti 50 slunečních hmotností

Zadání

Uvažujme hmotnou hvězdu s počáteční hmotností na hlavní posloupnosti $M = 50\,M_\odot$. Hmotnostní zastoupení vodíku v obálce je $X = 0{,}72$.

1. Vypočítejte její kritickou Eddingtonovu zářivost L_{Edd} ve wattech a v násobcích sluneční zářivosti ($L_\odot$).
2. Skutečná zářivost této hvězdy na ZAMS je přibližně $L \approx 7 \times 10^5\,L_\odot$. Určete Eddingtonův parametr $\Gamma = L / L_{\mathrm{Edd}}$.
3. Odhadněte dobu jejího života na hlavní posloupnosti τ_{MS} za předpokladu, že fúze probíhá v konvektivním jádře obsahujícím $30\,\%$ celkové hmotnosti hvězdy.

Zadané hodnoty:

- Hmotnost hvězdy: $M = 50 \times (1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}) = 9{,}945 \times 10^{31}\,\mathrm{kg}$
- Sluneční luminozita: $L_\odot = 3{,}828 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$
- Gravitační konstanta: $G = 6{,}674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
- Rychlost světla: $c = 2{,}998 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
- Energetická výtěžnost fúze vodíku: $\epsilon = 6{,}4 \times 10^{14}\,\mathrm{J/kg}$

Krok 1: Výpočet Eddingtonovy luminozity

Opacita elektronového rozptylu:

$$\kappa_{\mathrm{es}} = 0{,}020 \times (1 + X) = 0{,}020 \times (1 + 0{,}72) = 0{,}0344\,\mathrm{m^2/kg}$$

Eddingtonova mez:

$$L_{\mathrm{Edd}} = \frac{4\pi G M c}{\kappa_{\mathrm{es}}} = \frac{4\pi \times (6{,}674 \times 10^{-11}) \times (9{,}945 \times 10^{31}) \times (2{,}998 \times 10^{8})}{0{,}0344}$$

$$L_{\mathrm{Edd}} = \frac{2{,}500 \times 10^{31}}{0{,}0344} \approx 7{,}27 \times 10^{32}\,\mathrm{W}$$

Vyjádřeno ve slunečních luminozitách:

$$L_{\mathrm{Edd}} = \frac{7{,}27 \times 10^{32}\,\mathrm{W}}{3{,}828 \times 10^{26}\,\mathrm{W}} \approx 1{,}90 \times 10^{6}\,L_\odot$$

Krok 2: Výpočet Eddingtonova faktoru Γ

$$\Gamma = \frac{L}{L_{\mathrm{Edd}}} = \frac{7 \times 10^5\,L_\odot}{1{,}90 \times 10^6\,L_\odot} \approx 0{,}368 \approx 36{,}8\,\%$$

Zářivost hvězdy dosahuje téměř $37\,\%$ své teoretické maximální meze, což vysvětluje její extrémně silný radiační vítr.

Krok 3: Doba života na hlavní posloupnosti (τ_{MS})

Hmotnost vodíkového paliva v konvektivním jádře:

$$M_{\mathrm{core,\,H}} = 0{,}30 \times M \times X = 0{,}30 \times (9{,}945 \times 10^{31}) \times 0{,}72 \approx 2{,}148 \times 10^{31}\,\mathrm{kg}$$

Celková uvolnitelná termonukleární energie:

$$E_{\mathrm{nuc}} = M_{\mathrm{core,\,H}} \times \epsilon = (2{,}148 \times 10^{31}\,\mathrm{kg}) \times (6{,}4 \times 10^{14}\,\mathrm{J/kg}) \approx 1{,}375 \times 10^{46}\,\mathrm{J}$$

Doba života na hlavní posloupnosti:

$$\tau_{\mathrm{MS}} = \frac{E_{\mathrm{nuc}}}{L} = \frac{1{,}375 \times 10^{46}\,\mathrm{J}}{7 \times 10^{5} \times (3{,}828 \times 10^{26}\,\mathrm{W})} = \frac{1{,}375 \times 10^{46}}{2{,}680 \times 10^{32}} \approx 5{,}13 \times 10^{13}\,\mathrm{s}$$

Přepočet na miliony let ($1\,\mathrm{rok} \approx 3{,}156 \times 10^{7}\,\mathrm{s}$):

$$\tau_{\mathrm{MS}} = \frac{5{,}13 \times 10^{13}}{3{,}156 \times 10^{7}} \approx 1{,}63 \times 10^{6}\,\mathrm{let} \approx 1{,}6\,\mathrm{milionu\ let}$$

Výsledek a interpretace

Zatímco Slunce žije na hlavní posloupnosti deset miliard let (10^{10} let), hvězda o hmotnosti $50\,M_{\odot}$ spálí své obrovské zásoby paliva za pouhých **1,6 milionu let**! Žije tedy zhruba 6000–krát kratší dobu, vyzařuje na hranici stability a její bouřlivý zánik jako Wolfovy-Rayetovy hvězdy a kolabující supernovy obohatí vesmír o těžké prvky nezbytné pro vznik planet a života.

Část IV: Kompaktní relikty a závěrečná stádia

ZAJÍMAVOST

Tematický přehled Části IV Závěrečné fáze hvězdného vývoje představují triumf teoretické fyziky 20. a 21. století. V okamžiku, kdy hvězda vyčerpá veškeré termonukleární palivo, gravitace ztratí protiváhu v tepelném tlaku plazmatu. Hmota je stlačena do hustot, kde klasická fyzika selhává a vládu přebírá kvantová mechanika Fermiho degenerace a obecná teorie relativity Alberta Einsteina.

Fyzika extrémních hustot a gravitačního kolapsu

Zánik hvězdy se řídí její počáteční hmotností a hmotností jejího vyhořelého centrálního jádra:

- Hvězdy s počáteční hmotností $M \lesssim 8\,M_\odot$ odhodí vnější vrstvy v podobě planetární mlhoviny a jejich jádro se stabilizuje jako **bílý trpaslík**, podepřený kvantovým tlakem degenerovaných elektronů.
- Hvězdy o hmotnosti $8 \lesssim M \lesssim 25 - 30\,M_\odot$ končí gravitačním kolapsem železného jádra, explozí supernovy (Core-Collapse Supernova) a zrozením **neutronové hvězdy** o hustotě atomového jádra.
- Nejhmotnější hvězdy ($M \gtrsim 25 - 30\,M_\odot$) nedokáže zadržet ani degenerace neutronů; kolaps pokračuje bez omezení a vytváří **černou díru stelární hmotnosti** obklopenou horizontem událostí.

Tato část obsahuje tři monumentální kapitoly:

1. **Kapitola 9: Degenerovaný plyn a bílí trpaslíci** Kvantová statistika Fermiho-Diracova rozdělení v limitě nulové teploty. Stavová rovnice nerelativistického ($P \propto \rho^{5/3}$) a ultrarelativistického ($P \propto \rho^{4/3}$) elektronově degenerovaného plynu. Chandrasekharova mez stability ($M_{\mathrm{Ch}} \approx 1{,}44\,M_\odot$). Obrácený vztah hmotnost-poloměr ($R \propto M^{-1/3}$). Mestelova teorie chladnutí a termonukleární supernovy typu Ia vznikající akrecí v těsných dvojhvězdách.

1. **Kapitola 10: Supernovy a neutronové hvězdy** Mechanismus kolapsu železného jádra: fotodisociace jader, elektronový záchyt (neutronizace) a uvolnění neutrinového pulzu nesoucího $99\,\%$ vazebné energie. Odraz rázové vlny a exploze supernovy s kolapsem jádra (CCSN). Stavová rovnice jaderné hmoty a Tolmanova-Oppenheimerova-Volkoffova (TOV) relativistická rovnice hydrostatické rovnováhy. Struktura neutronové hvězdy, supratekutost neutronů, supravodivost protonů, pulsary a magnetary s magnetickými poli přesahujícími $10^{11}\,\mathrm{T}$.

1. **Kapitola 11: Fyzika černých děr stelární hmotnosti** Einsteinovy gravitační rovnice ve vakuu a Schwarzschildovo analytické řešení. Fyzikální povaha horizontu událostí a Schwarzschildův poloměr $R_s = 2GM/c^2$. Pohyb částic a fotonů v zakřiveném časoprostoru: fotonová sféra ($r = 3M$) a nejvnitřnější stabilní kruhová dráha (ISCO: $r = 6M$). Úvod do rotujících černých děr (Kerrova metrika, ergosféra, Penroseův proces těžby energie). Pozorování stelárních černých děr v rentgenových dvojhvězdách (Cygnus X-1) a detekce gravitačních vln z fúzí kompaktních binárních systémů observatořemi LIGO a Virgo.

Zde vstupujeme do světa, kde se fyzika hvězd přímo dotýká samotných limitů struktury prostoru a času.

Kapitola 9: Degenerovaný plyn a bílí trpaslíci

> **ZAJÍMAVOST**
>
> **Historický kontext** V roce 1910 objevili astronomové, že slabý průvodce nejjasnější hvězdy oblohy Sírius B je bílý trpaslík: objekt o hmotnosti Slunce natlačený do objemu planety Země s hustotou přesahující milionkrát hustotu vody. Fyzikální povahu tohoto stavu objasnil Ralph Fowler v roce 1926 pomocí nové Fermiho-Diracovy statistiky. V roce 1930 tehdy devatenáctiletý indický student Subrahmanyan Chandrasekhar během plavby lodí do Cambridge spojil tuto teorii se speciální teorií relativity a odvodil maximální hmotnostní mez bílých trpaslíků, za což získal v roce 1983 Nobelovu cenu za fyziku.

9.1 Fermiho–Diracova statistika a degenerovaný plyn

Elektrony jsou fermiony se spinem $s = 1/2$ a podléhají **Pauliho vylučovacímu principu**: v daném kvantovém stavu se může nacházet maximálně jeden elektron.

Ve fázovém prostoru $(\vec{r}, \vec{p})$ má elementární kvantová buňka objem $h^3 = (2\pi\hbar)^3$. Do jedné buňky se díky dvěma spinovým stavům vejdou nejvýše 2 elektrony. Maximální hustota elektronů ve fázovém prostoru je:

$$f_{\max}(\vec{p}) = \frac{2}{h^3}$$

V limitě úplné degenerace ($T \to 0$, prakticky splněné, pokud $k_B T \ll E_F$) elektrony zcela zaplní všechny dostupné stavy od nulové hybnosti až po maximální **Fermiho hybnost** p_F. Celková číselná hustota elektronů n_e je dána integrálem ve sférických souřadnicích hybného prostoru:

$$n_e = \int_0^{p_F} \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 \, dp = \frac{8\pi}{h^3}\frac{p_F^3}{3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

Odtud přímo vyjádříme Fermiho hybnost v závislosti na hustotě elektronů:

$$p_F = \hbar (3\pi^2 n_e)^{1/3} = \hbar \left(3\pi^2 \frac{\rho}{\mu_e m_u} \right)^{1/3}$$

kde $\mu_e = A/Z \approx 2$ pro plně ionizovaný uhlík $^{12}\mathrm{C}$ a kyslík $^{16}\mathrm{O}$.

1. Nerelativistická degenerace ($p_F \ll m_e c$)

Kinetická energie elektronu je $E_k = p^2/(2m_e)$ a rychlost $v = p/m_e$. Tlak degenerovaného plynu plyne z tenzoru toku hybnosti:

$$P_e = \frac{1}{3}\int_0^{p_F} v(p)\cdot p \cdot \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 \, dp = \frac{1}{3m_e}\frac{8\pi}{h^3}\int_0^{p_F} p^4 \, dp = \frac{8\pi}{15 m_e h^3} p_F^5$$

Dosazením za p_F:

$$P_e = \frac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2}{5m_e} n_e^{5/3} = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}$$

kde $K_1 = \frac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2}{5 m_e m_u^{5/3}} \approx 1{,}004 \times 10^{7}\ \mathrm{Pa}\cdot(\mathrm{m^3/kg})^{5/3}$. Všimněte si, že **tlak degenerovaného plynu vůbec nezávisí na teplotě**! Odpovídá polytropě s indexem $n = 1{,}5$ ($\gamma = 5/3$).

9.2 Ultrarelativistická degenerace a Chandrasekharova mez

S rostoucí hustotou v centru masivnějších bílých trpaslíků se Fermiho hybnost přibližuje $m_e c$ a elektrony se pohybují relativistickými rychlostmi. V ultrarelativistické limitě ($p_F \gg m_e c$) platí $v \approx c$ a $E \approx pc$:

$$P_e = \frac{1}{3}\int_0^{p_F} c \cdot p \cdot \frac{8\pi p^2}{h^3}\,dp = \frac{8\pi c}{3h^3}\frac{p_F^4}{4} = \frac{2\pi c}{3h^3}p_F^4$$

Dosazením za p_F:

$$P_e = \frac{(3\pi^2)^{1/3}\hbar c}{4} n_e^{4/3} = K_2\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}$$

kde $K_2 = \frac{(3\pi^2)^{1/3}\hbar c}{4 m_u^{4/3}} \approx 1{,}243 \times 10^{10}\,\mathrm{Pa}\cdot(\mathrm{m}^3/\mathrm{kg})^{4/3}$. Ultrarelativistický plyn má adiabatický index $\gamma = 4/3$, což odpovídá polytropě s indexem $n = 3$.

Pro polytropu $n = 3$ závisí celková hmotnost výhradně na konstantě K_2 a je **nezávislá na poloměru či centrální hustotě** (viz Dodatek A):

$$M_{\mathrm{Ch}} = 4\pi\left(\frac{(n+1)K_2}{4\pi G}\right)^{3/2}\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$$

Pro $n = 3$ je $\xi_1 \approx 6{,}897$ a $-\xi_1^2\theta'(\xi_1) \approx 2{,}018$. Dosazením hodnot dostáváme exaktní vzorec:

$$M_{\mathrm{Ch}} = \frac{\omega_3^0\sqrt{3\pi}}{2}\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{\mu_e m_u}\right)^2 \approx \frac{5{,}83}{\mu_e^2}\,M_\odot$$

Pro bílého trpaslíka složeného z uhlíku a kyslíku ($\mu_e = 2$):

$$M_{\mathrm{Ch}} \approx \frac{5{,}83}{4}\,M_\odot \approx 1{,}44\,M_\odot$$

> **DŮLEŽITÉ**
>
> **Fyzikální důsledek Chandrasekharovy meze** Pokud hmotnost elektronově degenerovaného jádra překročí $1{,}44\,M_\odot$, tlak degenerovaných elektronů již fyzikálně nemůže vyrovnat gravitaci a objekt se musí zhroutit do neutronové hvězdy nebo černé díry!

9.3 Vztah hmotnost–poloměr pro bílé trpaslíky

Z teorie polytrop s indexem $n = 1{,}5$ (nerelativistický režim) plyne pro poloměr R a hmotnost M vztah:

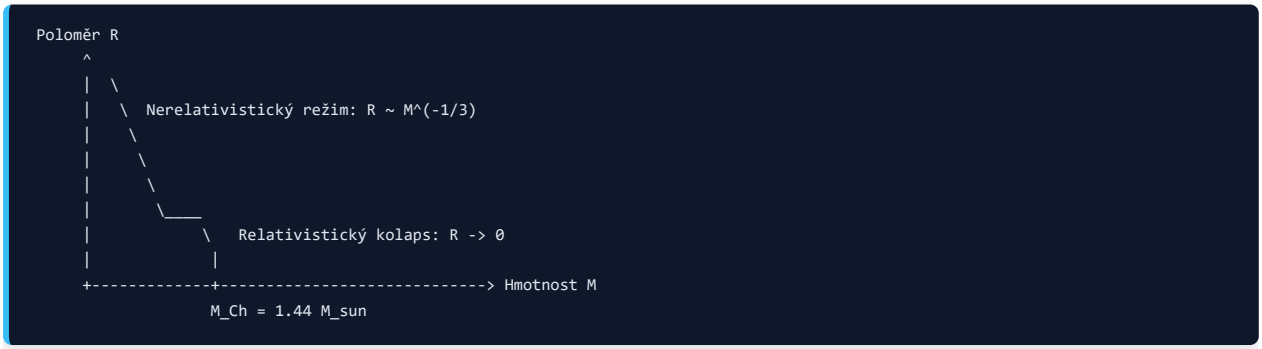
$$R \propto M^{\frac{1-n}{3-n}} = M^{-1/3}$$

Bílí trpaslíci vykazují paradoxní **obrácený vztah mezi hmotností a poloměrem**: čím je bílý trpaslík hmotnější, tím je menší a hustší!

Kvantitativní přibližný vztah zahrnující přechod k relativistickému režimu má tvar:

$$R(M) \approx 0{,}0126\,R_\odot\left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-5/3}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/3}\sqrt{1-\left(\frac{M}{M_{\mathrm{Ch}}}\right)^{4/3}}$$

Když se hmotnost přibližuje k Chandrasekharově mezi $M \to M_{\mathrm{Ch}}$, poloměr bílého trpaslíka teoreticky klesá k nule ($R \to 0$) a centrální hustota diverguje do nekonečna.



9.4 Mestelova teorie chladnutí bílých trpaslíků

Protože je plyn elektronů plně degenerovaný, mají elektrony obrovskou tepelnou vodivost. Celé vnitřní jádro bílého trpaslíka je proto téměř dokonale izotermální s jednotnou teplotou $T_{\rm core}$.

Kolem izotermálního jádra se nachází tenká nedegenerovaná vnější vrstva z vodíku nebo helia (tloušťka $\sim 10^{-4}\,R$), která působí jako tepelná izolace s Kramersovou opacitou.

Zásobníkem tepla nejsou degenerované elektrony (jejichž tepelná kapacita je kvůli Pauliho principu potlačena faktorem $k_B T / E_F \ll 1$), nýbrž **nedegenerovaná atomová jádra** (ionty uhlíku a kyslíku), která se chovají jako klasický plyn s tepelnou kapacitou na jeden ion $c_V = \tfrac{3}{2} k_B$.

Celková tepelná energie jader je:

$$U_{\rm th} = \frac{3}{2}\frac{M}{A m_u} k_B T_{\rm core}$$

Leon Mestel (1952) odvodil, že luminozita bílého trpaslíka závisí na teplotě jádra jako $L \propto T_{\rm core}^{7/2}$. Z rovnice chladnutí $L = -dU_{\rm th}/dt$ plyne **Mestelův zákon chladnutí**:

$$L(t) \propto t^{-7/5} \propto t^{-1{,}4}$$

Při poklesu teploty pod kritickou teplotu krystalizace ($T_{\rm cryst} \approx 10^{7}\,\mathrm{K}$, kdy Coulombovský parametr plazmatu $\Gamma_C = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_i k_B T} \geq 178$) jádra uhlíku a kyslíku zamrznou do prostorové krystalické mřížky (BCC), čímž uvolní latentní teplo tuhnutí, které dočasně zpomalí chladnutí.

9.5 Bílí trpaslíci v těsných dvojhvězdách a supernovy typu Ia

Nachází-li se uhlíko-kyslíkový bílý trpaslík v těsné dvojhvězdě se sekundární složkou vyplňující svůj Rocheův lalok, dochází k přetoku hmoty přes vnitřní Lagrangeův bod L_1 na bílého trpaslíka (kataklyzmatické proměnné, novy).

Pokud se hmotnost bílého trpaslíka v důsledku trvalé akrece přiblíží k Chandrasekharově mezi $M \to M_{\rm Ch} \approx 1{,}44\,M_\odot$, v centrálních oblastech stoupne hustota na $\rho_c \approx 2 \times 10^{9}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ a teplota překročí zápalnou teplotu fúze uhlíku ($T \approx 7 \times 10^{8}\,\mathrm{K}$).

V degenerovaném plynu však tlak nezávisí na teplotě! Když fúze uvolní teplo:

1. Teplota stoupne, avšak plyn neexpanduje ani se neochlazuje.
2. Rychlost fúze uhlíku roste jako $\epsilon_{\rm CC} \propto T^{30}$, což uvolní ještě více tepla.
3. Nastává nezadržitelný **termonukleární runaway**.

Plamen deflagrace a detonace proběhne celou hvězdou za několik sekund. Dojde ke kompletní termonukleární fúzi uhlíku a kyslíku na radioaktivní nikl $^{56}\mathrm{Ni}$ a železo. Hvězda je totálně rozmetána bez jakéhokoliv kompaktního zbytku jako **supernova typu Ia**. Jelikož všechny SN Ia explodují při dosažení téže Chandrasekharovy meze, mají téměř identickou maximální luminozitu, což z nich činí klíčové standardní svíčky pro objev zrychleného rozpínání vesmíru a temné energie (Nobelova cena 2011).

9.6 Vědecký Python kód: Stavová rovnice a vztah hmotnost–poloměr

Následující kód počítá a srovnává Fermiho hybnost, tlak a teoretický poloměr bílého trpaslíka pro různé hmotnosti:

```
import numpy as np

def white_dwarf_properties(M_solar, mu_e=2.0):
    """Výpočet poloměru, centrální hustoty a Fermiho energie bílého trpaslíka."""
    # Konstanty v SI
    G = 6.67430e-11
    c = 2.99792e8
    hbar = 1.05457e-34
    m_e = 9.10938e-31
    m_u = 1.66054e-27
    M_sun = 1.989e30
    R_sun = 6.963e8


M = M_solar * M_sun
    M_ch = 1.44 * M_sun


if M >= M_ch:
        return 0.0, np.inf, np.inf


# Analytický model poloměru podle Nauenberga (1972)
    # R / R_sun approx 0.0112 * (mu_e/2)^(-5/3) * (M/M_sun)^(-1/3) * (1 - (M/M_ch)^(4/3))^(1/2)
    term1 = 0.0112 * ((mu_e / 2.0)<strong>(-5.0 / 3.0)) * (M_solar</strong>(-1.0 / 3.0))
    term2 = np.sqrt(1.0 - (M / M_ch)**(4.0 / 3.0))
    R_norm = term1 * term2
    R = R_norm * R_sun


# Odhad centrální hustoty z polytropy n = 1.5 (rho_c approx 6.0 * rho_mean)
    rho_mean = M / ((4.0 / 3.0) * np.pi * (R**3))
    rho_c = 6.0 * rho_mean


# Fermiho hybnost v centru
    n_e = rho_c / (mu_e * m_u)
    p_F = hbar * (3.0 * (np.pi<strong>2) * n_e)</strong>(1.0 / 3.0)

    # Fermiho energie v keV
    E_F_J = np.sqrt((p_F * c)<strong>2 + (m_e * (c</strong>2))<strong>2) - m_e * (c</strong>2)
    E_F_keV = E_F_J / 1.60218e-16


return R_norm, rho_c, E_F_keV


if __name__ == "__main__":
    masses = [0.2, 0.6, 1.0, 1.2, 1.35, 1.40]
    print(f"{'M [M_sun]':<12}{'R [R_sun]':<14}{'rho_c [kg/m^3]':<18}{'E_Fermi [keV]':<16}")
    print("-" * 60)
    for m in masses:
        r_n, rc, ef = white_dwarf_properties(m)
        print(f"{m:<12.2f}{r_n:<14.4f}{rc:<18.2e}{ef:<16.1f}")
```

9.7 Praktický příklad: Fyzikální parametry bílého trpaslíka Sírius B

Zadání

Bílý trpaslík Sírius B má pozorovanou hmotnost $M = 1{,}018\,M_\odot$ a fotosférický poloměr $R = 0{,}0084\,R_\odot \approx 5\,850\,\mathrm{km}$ (přibližně poloměr Země). Předpokládejme čistě uhlíko-kyslíkové složení ($\mu_e = 2$).

1. Vypočítejte střední hustotu $\bar{\rho}$ v $\mathrm{kg/m^3}$ a v tunách na $\mathrm{cm^3}$.
2. Vypočítejte střední číselnou hustotu volných elektronů $\bar{n}_e$.
3. Vypočítejte Fermiho hybnost p_F a Fermiho energii E_F elektronů v keV.
4. Určete, zda jsou elektrony v jádře Síria B nerelativistické nebo relativistické.

Zadané hodnoty:

- $M = 1{,}018 \times (1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}) = 2{,}025 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- $R = 5{,}85 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$
- Klidová energie elektronu: $m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$

Krok 1: Výpočet střední hustoty

Objem bílého trpaslíka:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times (5{,}85 \times 10^{6}\,\mathrm{m})^3 \approx 8{,}386 \times 10^{20}\,\mathrm{m^3}$$

Střední hustota:

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{2{,}025 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}}{8{,}386 \times 10^{20}\,\mathrm{m^3}} \approx 2{,}41 \times 10^{9}\,\mathrm{kg/m^3} = 2{,}41 \times 10^{6}\,\mathrm{g/cm^3} = 2{,}41\,\mathrm{tun/cm^3}$$

Jeden kubický centimetr látky Síria B váží více než dvě a půl tuny!

Krok 2: Hustota volných elektronů

$$\bar{n}_e = \frac{\bar{\rho}}{\mu_e m_u} = \frac{2{,}415 \times 10^{9}\,\mathrm{kg/m^3}}{2 \times (1{,}661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg})} \approx 7{,}27 \times 10^{35}\,\mathrm{m^{-3}}$$

Krok 3: Výpočet Fermiho hybnosti a energie

Fermiho hybnost:

$$p_F = \hbar (3\pi^2 n_e)^{1/3} = (1{,}055 \times 10^{-34}) \times [3\pi^2 \times (7{,}27 \times 10^{35})]^{1/3}$$

$$3\pi^2 \times 7{,}27 \times 10^{35} \approx 2{,}153 \times 10^{37} \implies (2{,}153 \times 10^{37})^{1/3} \approx 2{,}78 \times 10^{12}\,\mathrm{m^{-1}}$$

$$p_F = (1{,}055 \times 10^{-34}) \times (2{,}78 \times 10^{12}) \approx 2{,}93 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg \cdot m/s}$$

Porovnáme hybnost s $m_e c$:

$$m_e c = (9{,}109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \times (2{,}998 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}) \approx 2{,}73 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg \cdot m/s}$$

Relativistický poměr činí:

$$\frac{p_F}{m_e c} = \frac{2{,}93 \times 10^{-22}}{2{,}73 \times 10^{-22}} \approx 1{,}07$$

Kinetická Fermiho energie elektronu:

$$E_{F,k} = \sqrt{(p_F c)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 = m_e c^2 \left(\sqrt{1 + (p_F / m_e c)^2} - 1 \right)$$

$$E_{F,k} = 511\,\mathrm{keV} \times \left(\sqrt{1 + 1{,}07^2} - 1 \right) = 511 \times (\sqrt{2{,}145} - 1) = 511 \times (1{,}465 - 1) \approx 237\,\mathrm{keV}$$

Výsledek a interpretace

Jelikož poměr $p_F / m_e c \approx 1{,}07$ je řádu jedné a Fermiho kinetická energie ($237\ \mathrm{keV}$) dosahuje srovnatelné velikosti s klidovou hmotností elektronu ($511\ \mathrm{keV}$), nachází se plyn v nitru Síria B v **přechodovém mírně relativistickém režimu**. To dokazuje nezbytnost započtení speciální teorie relativity do modelů reálných bílých trpaslíků.

Kapitola 10: Supernovy a neutronové hvězdy

ZAJÍMAVOST

Historický kontext V roce 1934, pouhé dva roky po objevu neutronu Jamesem Chadwickem, vyslovili Walter Baade a Fritz Zwicky vizionářskou hypotézu: *„S veškerou opatrností navrhujeme, že supernovy představují přechod z běžných hvězd do neutronových hvězd, které se skládají z těsně natlačených neutronů.“* Tato geniální předpověď byla definitivně potvrzena v roce 1967, kdy Jocelyn Bellová Burnellová a Antony Hewish objevili první periodický radiový pulsar.

10.1 Kolaps železného jádra a neutronizace

Když hmotnost inertního železného jádra masivní hvězdy překročí Chandrasekharovu mez ($M_{\mathrm{core}} \approx 1{,}4 - 1{,}8\,M_\odot$), dochází k okamžité ztrátě mechanické stability. Kolaps spustí dva katastrofické endotermické mikroskopické procesy:

1. Fotodisociace atomových jader

Při teplotách $T > 5 \times 10^9\,\mathrm{K}$ mají termální gama fotony tak obrovskou energii, že začnou rozbíjet stabilní jádra železa na heliové alfa částice a volné neutrony:

$$^{56}\mathrm{Fe} + \gamma \longrightarrow 13\,{}^4\mathrm{He} + 4n - 124{,}4\,\mathrm{MeV}$$

Při dalším růstu teploty se rozpadají i samotná jádra helia:

$$^4\mathrm{He} + \gamma \longrightarrow 2p + 2n - 28{,}3\,\mathrm{MeV}$$

Tato endotermická fotodisociace odčerpá z jádra obrovské množství tepelné energie (více než $2\,\mathrm{MeV}$ na každý nukleon), což způsobí prudký pokles tlaku a pád jádra do volného gravitačního kolapsu.

2. Elektronový záchyt (neutronizace)

Hustota v kolabujícím jádře překročí $\rho > 10^{12}\,\mathrm{kg/m^3}$ a Fermiho energie elektronů vzroste nad prahovou energii $E_F > 1{,}29\,\mathrm{MeV}$, která odpovídá rozdílu klidových hmotností mezi neutronem a protonem. Elektrony jsou nuceně vtlačovány do protonů (inverzní beta rozpad):

$$p + e^- \longrightarrow n + \nu_e$$

Tento proces má dva fatální důsledky:

- Z jádra mizí volné elektrony, které jediné poskytovaly degenerační tlak ($n_e \to 0$).
- Vzniká masivní záplava elektronových neutrin ν_e.

Jádro padá rychlostí dosahující až $70\,000\,\mathrm{km/s}$ (téměř čtvrtina rychlosti světla). Během pouhých několika desítek milisekund se sféra o rozměrech Země ($R \approx 6\,000\,\mathrm{km}$) smrští na kouli o poloměru pouhých $20 - 30\,\mathrm{km}$!

10.2 Odraz rázové vlny a exploze supernovy (CCSN)

Když centrální hustota kolabujícího jádra dosáhne **hustoty jaderné hmoty (nukleární saturace)**:

$$\rho_{\mathrm{nuc}} \approx 2{,}7 \times 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3} \approx 2{,}7 \times 10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}$$

nukleony se dostanou do kontaktu na vzdálenost dosahu silné jaderné interakce ($r \approx 10^{-15}\,\mathrm{m}$). Odpudivá složka jaderných sil spolu s degeneračním tlakem neutronů způsobí prudké ztuhnutí stavové rovnice: jádro se stane prakticky nestlačitelným.

Padající vnitřní vrstvy tvrdě narazí na ztuhlé centrální jádro a odrazí se zpět (**Core Bounce**). Vzniká mohutná rázová vlna (shock wave) šířící se ven rychlostí přes $30\,000\,\mathrm{km/s}$.

```
Padající vnější obálka (Fe, Si, O) --->   |
                                          | Rázová vlna (Shock) expanduje ven
    ODRAZ JÁDRA (Core Bounce) <===========|
                                          |
    Proto-neutronová hvězda (PNS) <-------+
```

Během postupu rázové vlny skrze padající vrstvy se však vlna disociací železa energeticky vyčerpá a v poloměru $r \approx 150 - 200\,\mathrm{km}$ se zastaví (stagnující rázová vlna).

Záchranu exploze zajišťuje **neutrinový mechanismus (Bethe–Wilsonův scénář)**: v hustém nitru proto-neutronové hvězdy jsou neutrina uvězněna (neutrinosféra). Když se uvolňují, malý zlomek jejich obrovského toku ($\sim 1\,\%$) je absorbován v turbulentní vrstvě pod stagnující rázovou vlnou. Tím se rázová vlna znovu oživí, prorazí vnější obálku a vyvolá gigantickou explozi **supernovy s kolapsem jádra (Core-Collapse Supernova – typy II, Ib, Ic)**.

Celková uvolněná gravitační vazebná energie neutronové hvězdy je monstrózní:

$$E_{\mathrm{bind}} \approx \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \approx 3 \times 10^{46}\,\mathrm{J} \approx 3 \times 10^{53}\,\mathrm{erg}$$

- $99\,\%$ této energie odnesou neutrina všech tří generací (ν_e, ν_μ, ν_τ a jejich antičástice) během 10 sekund (detekováno u supernovy SN 1987A).
- $1\,\%$ se přemění na kinetickou energii expandující obálky ($E_k \sim 10^{44}\,\mathrm{J}$).
- Pouhých $0{,}01\,\%$ ($E_{\mathrm{opt}} \sim 10^{42}\,\mathrm{J}$) se vyzáří jako viditelné světlo, což přesto stačí k tomu, aby supernova na několik týdnů přezářila celou svou domovskou galaxii.

10.3 Stavová rovnice a Tolmanova–Oppenheimerova–Volkoffova (TOV) rovnice

Neutronová hvězda je extrémně relativistický objekt. Newtonovská rovnice hydrostatické rovnováhy zde selhává a musí být nahrazena přesnou rovnicí z obecné teorie relativity – **TOV rovnicí (Tolman–Oppenheimer–Volkoff, 1939)**:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}\left[1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2}\right]\left[1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2}\right]\left[1 - \frac{2GM(r)}{rc^2}\right]^{-1}$$

Všimněte si tří relativistických korekčních faktorů v rovnici:

1. $(1 + P/(\rho c^2))$: V teorii relativity je zdrojem gravitace nejen klidová hmotnost, nýbrž veškerá energie včetně tlaku (tlak gravituje!).
2. $(1 + 4\pi r^3 P/(Mc^2))$: Příspěvek tlaku uzavřeného uvnitř koule k celkové gravitační hmotě.
3. $(1 - 2GM/(rc^2))^{-1}$: Geometrický faktor prostorového zakřivení Schwarzschildovy metriky.

Všechny tři faktory jsou přísně větší než 1. V obecné teorii relativity je tedy gravitační přitažlivost uvnitř kompaktního objektu **vždy silnější než v Newtonově fyzice**. Proto každé zvýšení tlaku současně zvyšuje i gravitační přitažlivost!

Z TOV rovnice plyne existence absolutní horní meze stability pro neutronové hvězdy – **Tolmanovy–Oppenheimerovy–Volkoffovy meze (M_{TOV})**:

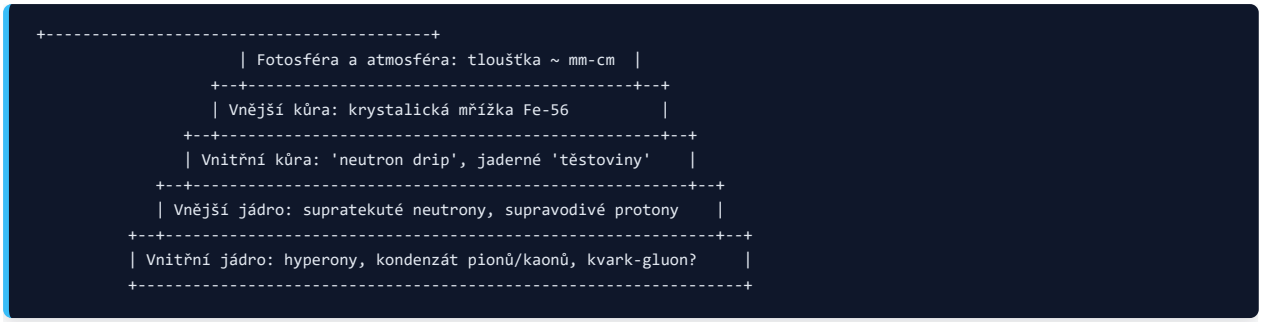
- Pro čistě degenerovaný nerelativistický plyn neutronů bez interakcí činí mez pouhých $M_{\mathrm{TOV}} \approx 0{,}7\,M_\odot$.
- Se započtením odpudivých silných jaderných interakcí nukleonů (moderní realistické rovnice stavu jako APR, SLy4) vzrůstá mez na:

$$M_{\mathrm{TOV}} \approx 2{,}0 - 2{,}3\,M_\odot$$

Pozorování masivních milisekundových pulsarů PSR J0740+6620 ($M = 2{,}08 \pm 0{,}07\,M_\odot$) a fúze neutronových hvězd GW170817 stanovilo současnou empirickou mez na $M_{\mathrm{TOV}} \approx 2{,}17\,M_\odot$.

10.4 Vnitřní struktura neutronové hvězdy

Neutronová hvězda o poloměru $R \approx 11 - 13\,\mathrm{km}$ a hmotnosti $M \approx 1{,}4\,M_\odot$ se skládá z několika odlišných vrstev:



1. **Vnější kůra ($\rho < 4 \times 10^{14}\,\mathrm{kg/m^3}$, tloušťka $\sim 300 - 500\,\mathrm{m}$):** Pevná krystalická mřížka z jader železa $^{56}\mathrm{Fe}$ a těžších prvků obklopená relativistickým degenerovaným elektronovým plynem.
2. **Vnitřní kůra ($4 \times 10^{14} < \rho < 2 \times 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}$, tloušťka $\sim 1\,\mathrm{km}$):** Nastává jev **odkapávání neutronů (neutron drip)**: Fermiho energie elektronů je tak vysoká, že jádra nemohou pojmout více neutronů a neutrony volně vytékají do prostoru mezi mřížkami. Na bázi kůry se vlivem soutěže mezi Coulombovským odpuzováním a jadernou přitažlivostí deformují jádra do exotických geometrických struktur známých jako **jaderné těstoviny (Nuclear Pasta)**: špagety, lasagne, gnocchi.
3. **Vnější jádro ($\rho \sim 1 - 3\,\rho_{\mathrm{nuc}}$, tloušťka $\sim 9\,\mathrm{km}$):** Homogenní Fermiho kapalina tvořená z $95\,\%$ neutrony, $5\,\%$ protony a volnými elektrony a miony. * Neutrony tvoří Cooperovy páry s paralelním spinem ($^3P_2$ stav) a stávají se **supratekutými** (nulová viskozita). * Protony tvoří Cooperovy páry v antiparalelním spinu ($^1S_0$ stav) a vytvářejí **supravodič II. typu**. Magnetické pole neutronové hvězdy je uvězněno v miliardách kvantovaných magnetických vírů (fluxoidů).
4. **Vnitřní jádro ($\rho > 3\,\rho_{\mathrm{nuc}}$):** U nejtěžších neutronových hvězd mohou extrémní tlaky způsobit vznik hyperonů (Λ, Σ), dekonfinaci kvarků a vytvoření volné kvark-gluonové plazmy složené z kvarků u, d, s (podivná kvarková hmota).

10.5 Pulsary, magnetary a dipólové záření

Během gravitačního kolapsu se zachovává magnetický indukční tok $\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} \approx BR^2 = \mathrm{konst}$. Zmenšení poloměru ze slunečního rozměru ($R_\odot \approx 7 \times 10^8\,\mathrm{m}$) na poloměr neutronové hvězdy ($R_{\mathrm{NS}} \approx 10^4\,\mathrm{m}$) zesílí původní magnetické pole faktorem $(R_\odot/R_{\mathrm{NS}})^2 \approx 5 \times 10^9$!

Stejně tak zachování momentu hybnosti $L = I\Omega \propto MR^2\Omega = \mathrm{konst}$ roztočí neutronovou hvězdu na stovky otáček za sekundu:

$$\Omega_{\mathrm{NS}} = \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R_{\mathrm{NS}}} \right)^2$$

Magnetické dipólové záření pulsaru

Rotující magnetický dipól skloněný pod úhlem α vůči rotační ose vyzařuje elektromagnetické vlny o frekvenci rotace $\Omega = 2\pi/P$. Zářivý výkon magnetického dipólu je:

$$\dot{E}_{\mathrm{rot}} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \Omega^2\right) = -I\Omega\dot{\Omega} = \frac{\mu_0 B_{\mathrm{surf}}^2 R^6 \Omega^4 \sin^2\alpha}{6\pi c^3}$$

Z měřené periody P a její časové derivace $\dot{P}$ (zpomalování rotace) lze přímo spočítat:

- **Povrchové magnetické pole:** $B_{\mathrm{surf}} \propto \sqrt{P\dot{P}} \sim 10^8 - 10^9\,\mathrm{T}$ $(10^{12} - 10^{13}\,\mathrm{G})$.
- **Charakteristické stáří pulsaru:** $\tau_c = \frac{P}{2\dot{P}}$.

Magnetary

Extrémní podskupina neutronových hvězd s magnetickým polem $B \sim 10^{10} - 10^{11}\,\mathrm{T}$ $(10^{14} - 10^{15}\,\mathrm{G})$, což překračuje kvantovou elektrodynamickou kritickou mez $B_{\mathrm{QED}} = m_e^2 c^2/(e\hbar) \approx 4{,}4 \times 10^9\,\mathrm{T}$. Energie jejich erupcí (Soft Gamma Repeaters – SGR) je čerpána z disipace a přepojování magnetického pole při praskání kůry (hvězdotřesení).

10.6 Vědecký Python kód: Řešení TOV rovnice

Následující kód numericky integruje relativistickou TOV rovnici a srovnává ji s klasickou Newtonovou hydrostatickou rovnováhou pro polytropní stavovou rovnici jaderné hmoty:

```
import numpy as np

def solve_tov(rho_c_si, K_poly=5.38e3, gamma=2.0, dr=10.0, r_max=25000.0):
    """Numerické řešení TOV rovnice pro neutronovou hvězdu."""
    G = 6.67430e-11
    c = 2.99792e8
    M_sun = 1.989e30


r = dr
    P = K_poly * (rho_c_si**gamma)
    rho = rho_c_si
    M_r = (4.0 / 3.0) * np.pi * (r**3) * rho


while r < r_max and P > 1e10:
        # 1. Newtonovský gradient
        dP_dr_newton = - (G * M_r * rho) / (r**2)


# 2. Relativistické TOV korekce
        corr1 = 1.0 + P / (rho * c**2)
        corr2 = 1.0 + (4.0 * np.pi * (r<strong>3) * P) / (M_r * c</strong>2)
        corr3 = 1.0 / (1.0 - (2.0 * G * M_r) / (r * c**2))
        dP_dr_tov = dP_dr_newton * corr1 * corr2 * corr3


# Krok integrace (Eulerova metoda)
        P += dP_dr_tov * dr
        if P <= 0:
            break
        rho = (P / K_poly)**(1.0 / gamma)
        M_r += 4.0 * np.pi * (r**2) * rho * dr
        r += dr


R_final_km = r / 1000.0
    M_final_solar = M_r / M_sun
    return R_final_km, M_final_solar


if __name__ == "__main__":
    print(f"{'Centrální hustota [kg/m^3]':<28}{'Poloměr R [km]':<18}{'Hmotnost M [M_sun]'}")
    print("-" * 64)
    densities = [5e17, 8e17, 1.2e18, 1.8e18, 2.5e18]
    for rho_c in densities:
        R_km, M_sol = solve_tov(rho_c)
        print(f"{rho_c:<28.1e}{R_km:<18.2f}{M_sol:<18.2f}")
```

10.7 Praktický příklad: Gravitační červený posuv a energie Krabího pulsaru

Zadání

Pulsar v Krabí mlhovině (PSR B0531+21) vznikl při explozi historické supernovy roku 1054. Má hmotnost $M = 1{,}4\,M_\odot$, poloměr $R = 12\,\mathrm{km}$, rotační periodu $P = 33{,}3\,\mathrm{ms} = 0{,}0333\,\mathrm{s}$ a rychlost brzdění rotace $\dot{P} = 4{,}2 \times 10^{-13}\,\mathrm{s/s}$. Moment setrvačnosti neutronové hvězdy odhadněte jako $I \approx 10^{38}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

1. Vypočítejte gravitační červený posuv z_g fotonů emitovaných z povrchu neutronové hvězdy podle obecné teorie relativity.
2. Vypočítejte celkovou rotační kinetickou energii pulsaru E_{rot} a rotační ztrátový výkon $\dot{E}_{\mathrm{rot}}$ (spin-down luminosity).

Zadané konstanty:

- $M = 1{,}4 \times (1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}) \approx 2{,}785 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- $R = 1{,}2 \times 10^{4}\,\mathrm{m}$
- $G = 6{,}674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
- $c = 2{,}998 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$

Krok 1: Gravitační červený posuv

V obecné teorii relativity je poměr frekvence na povrchu ν_{emit} a v nekonečnu ν_∞ dán Schwarzschildovým faktorem:

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_{\mathrm{emit}}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}$$

Gravitační červený posuv z_g definujeme jako:

$$z_g = \frac{\lambda_\infty - \lambda_{\mathrm{emit}}}{\lambda_{\mathrm{emit}}} = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-1/2} - 1$$

Spočteme kompaktnost $2GM/(Rc^2)$:

$$\frac{2GM}{Rc^2} = \frac{2 \times (6{,}674 \times 10^{-11}) \times (2{,}785 \times 10^{30})}{(1{,}2 \times 10^{4}) \times (2{,}998 \times 10^{8})^2} = \frac{3{,}718 \times 10^{20}}{1{,}079 \times 10^{21}} \approx 0{,}3446$$

Dosazením:

$$z_g = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}3446}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{0{,}6554}} - 1 = \frac{1}{0{,}8096} - 1 \approx 1{,}235 - 1 = 0{,}235$$

Fotony opouštějící povrch neutronové hvězdy ztratí téměř čtvrtinu své frekvence ($z_g \approx 23{,}5\,\%$) pouhým překonáváním gravitačního pole.

Krok 2: Rotační energie a ztrátový výkon

Úhlová rychlost rotace:

$$\Omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{0{,}0333\,\mathrm{s}} \approx 188{,}7\,\mathrm{rad/s}$$

Rotační kinetická energie:

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{1}{2} \times 10^{38}\,\mathrm{kg\cdot m^2} \times (188{,}7\,\mathrm{rad/s})^2 \approx 1{,}78 \times 10^{42}\,\mathrm{J}$$

Ztrátový výkon brzděním (spin-down luminosity):

$$\dot{E}_{\mathrm{rot}} = -I\Omega\dot{\Omega} = I\Omega\left(\frac{2\pi}{P^2}\dot{P}\right) = 4\pi^2 I \frac{\dot{P}}{P^3}$$

$$\dot{E}_{\mathrm{rot}} = 4\pi^2 \times 10^{38} \times \frac{4{,}2 \times 10^{-13}}{(0{,}0333)^3} = 3{,}948 \times 10^{39} \times \frac{4{,}2 \times 10^{-13}}{3{,}693 \times 10^{-5}} \approx 4{,}49 \times 10^{31}\,\mathrm{W}$$

Vyjádřeno ve slunečních luminozitách:

$$\dot{E}_{\mathrm{rot}} = \frac{4{,}49 \times 10^{31}\,\mathrm{W}}{3{,}828 \times 10^{26}\,\mathrm{W}} \approx 117\,000\,L_{\odot}$$

Výsledek a interpretace

Krabí pulsar ztrácí každou sekundu rotační energii odpovídající zářivému výkonu více než **sto tisíc Sluncí**. Právě tento obrovský výkon magnetického dipólu pumpuje vysokoenergetické relativistické elektrony a pozitrony do okolní mlhoviny a napájí její záření v celém elektromagnetickém spektru od rádiových vln až po gama záření.

Kapitola 11: Fyzika černých děr stelární hmotnosti

ZAJÍMAVOST

Historický kontext V listopadu 1915 formuloval Albert Einstein obecnou teorii relativity. Již o několik týdnů později nalezl německý fyzik a astronom Karl Schwarzschild na ruské frontě první přesné analytické řešení Einsteinových rovnic pro sféricky symetrické gravitační pole ve vakuu. V roce 1967 zavedl John Archibald Wheeler populární termín „černá díra“ a roku 2015 observatoře LIGO poprvé zachytily gravitační vlny ze splynutí dvou stelárních černých děr (událost GW150914).

11.1 Kolaps hmotných hvězd a Schwarzschildova metrika

Když hmotnost zkolabovaného jádra hvězdy překročí Tolmanovu-Oppenheimerovu-Volkoffovu mez ($M > M_{\mathrm{TOV}} \approx 2{,}2 - 3\,M_\odot$), ve známém vesmíru neexistuje žádná fyzikální síla schopná zastavit gravitační smršťování. Hmota se neodvratně hroutí do časoprostorové singularity.

Časoprostor vně statické, nerotující, elektricky neutrální černé díry o hmotnosti M popisuje **Schwarzschildův prostoročasový interval** v souřadnicích (t, r, θ, ϕ):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

V geometrizovaných jednotkách ($G = c = 1$) má metrika elegantní tvar:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

11.2 Horizont událostí a Schwarzschildův poloměr

V radiální souřadnici $r = R_s$ vykazuje Schwarzschildova metrika zdánlivou singularitu, kde koeficient $g_{tt} \to 0$ a $g_{rr} \to \infty$. Tento poloměr definuje **Schwarzschildův poloměr (horizont událostí)**:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Pro hmotnost vyjádřenou v jednotkách sluneční hmotnosti platí jednoduchý paměťový vztah:

$$R_s \approx 2{,}95 \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \mathrm{km} \approx 3\,\mathrm{km} \times \left(\frac{M}{M_\odot}\right)$$

Černá díra o hmotnosti $10\,M_\odot$ má tedy horizont o poloměru pouhých $30\,\mathrm{km}$.

Skutečná **fyzikální singularita** se nachází výhradně ve středu $r = 0$, kde invariantní skalární Kretschmannova křivost diverguje do nekonečna:

$$K \equiv R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48G^2M^2}{c^4 r^6} \xrightarrow{r \to 0} \infty$$

DŮLEŽITÉ

Fyzikální povaha horizontu událostí Singularita na poloměru $r = R_s$ není fyzikální, nýbrž souřadnicová (způsobená volbou Schwarzschildova času t, který měří vzdálený pozorovatel v nekonečnu). Přechodem k Eddingtonovým-Finkelsteinovým nebo Kruskalovým-Szekeresovým souřadnicím je metrika na horizontu zcela hladká. Horizont událostí tvoří jednosměrnou nulovou hyperplochu (kauzální membránu): uvnitř horizontu ($r < R_s$) se časová a prostorová souřadnice prohazují ($g_{tt} > 0, g_{rr} < 0$). Pohyb směrem k centrální singularitě $r = 0$ se stává stejně nevyhnutelným jako pohyb do budoucnosti v běžném čase!

11.3 Geodetický pohyb: Fotonová sféra a ISCO

Pohyb testovacích částic a fotonů v ekvatoriální rovině ($\theta = \pi/2$) se řídí variačním principem podél geodetik. Z integrálů pohybu (energie E a momentu hybnosti L vztažených na jednotku hmotnosti) odvodíme radiální rovnici:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{E^2 - 1}{2}$$

kde efektivní potenciál pro hmotnou částici má tvar:

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}$$

První člen je klasický newtonovský gravitační potenciál, druhý je odstředivá bariéra a třetí člen ($-ML^2/r^3$) je **relativistická gravitační korekce**, která při malých vzdálenostech převáží odstředivou bariéru a způsobí pád částice do horizontu.

Z extrémů efektivního potenciálu odvozujeme klíčové charakteristické poloměry Schwarzschildovy černé díry:

```
r = 2M          r = 3M                 r = 6M
          |              |                      |
[ Horizont událostí ] [ Fotonová sféra ] [ ISCO: stabilní orbity ] ---> Vzdálený prostor
     R_s = 2M         nestabilní oběh        nejmenší stabilní
                         fotonů                kruhová dráha
```

1. **Fotonová sféra ($r_{\text{ph}} = 3M = \frac{3}{2}R_s$):** Nejmenší možná kruhová dráha pro fotony ($m = 0$). Fotony zde mohou obíhat černou díru po nestabilní orbitě. Fotonová sféra vymezuje geometrický **stín černé díry** o zdánlivém impaktním parametru $b_{\text{crit}} = 3\sqrt{3}M \approx 5{,}2\,M$, který pozoroval projekt Event Horizon Telescope (EHT).
2. **Nejvnitřnější stabilní kruhová dráha (ISCO – Innermost Stable Circular Orbit):** Pro hmotné částice existují stabilní kruhové dráhy pouze pro poloměry:

$$r \geq r_{\text{ISCO}} = 6M = 3R_s$$

Pro $r < 6M$ je jakákoliv kruhová dráha nestabilní a částice se po spirále zřítí do černé díry. To definuje vnitřní okraj plynných akrečních disků kolem nerotujících černých děr.

11.4 Rotující černé díry: Kerrova metrika a Penroseův proces

Reálné černé díry vzniklé kolapsem rotujících jader si zachovávají moment hybnosti J. Jejich časoprostor popisuje **Kerrova metrika (Roy Kerr, 1963)** závislá na dvou parametrech: hmotnosti M a bezrozměrném spinovém parametru $a_* \equiv \frac{Jc}{GM^2} \in [0, 1]$.

V Boyerových-Lindquistových souřadnicích se horizont událostí nachází v poloměru:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

kde $a = J/(Mc)$. Pro maximálně rotující černou díru ($a_* = 1$) je $r_+ = M = R_s/2$.

Rotující černá díra strhává okolní časoprostor do směru své rotace – nastává extrémní **strhávání časoprostoru (Frame Dragging / Lense–Thirringův jev)**. Oblast mezi statickou mezí $r_{\text{ergo}}(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}$ a horizontem událostí r_+ se nazývá **ergosféra**.

V ergosféře nemůže žádný fyzikální objekt zůstat v klidu vůči vzdálenému pozorovateli; veškerá hmota a světlo jsou nuceny rotovat spolu s černou dírou.

> **DŮLEŽITÉ**
>
> **Penroseův proces těžby rotační energie** Roger Penrose (1969) ukázal, že v ergosféře mohou částice nabývat záporné energie $E < 0$ vzhledem k nekonečnu. Rozpadne-li se v ergosféře těleso 0 na dva fragmenty 1 a 2, a fragment 1 s energií $E_1 < 0$ spadne do horizontu, vyletí fragment 2 do nekonečna s energií $E_2 = E_0 - E_1 > E_0$. Fragment 2 tedy odnáší **více energie, než mělo původní těleso**! Tento zisk energie pochází z rotace černé díry. Teoretická účinnost přeměny klidové hmotnosti na energii při akreci u Kerrovy černé díry dosahuje až $42{,}3\,\%$ (oproti pouhým $0{,}7\,\%$ u termonukleární fúze).

11.5 Pozorování stelárních černých děr a gravitační vlny

Černé díry samy nezáří, avšak jejich přítomnost detekujeme prostřednictvím jejich gravitačních účinků:

1. Rentgenové těsné dvojhvězdy (např. Cygnus X-1)

Černá díra strhává plyn ze své obří hvězdné společnice. Plyn tvoří rotující akreční disk, kde meziplynové tření zahřívá plazma na teploty desítek milionů kelvinů ($T \sim 10^7\,\mathrm{K}$), což vede k mohutné emisi rentgenového záření. Měřením radiálních rychlostí hvězdné složky stanovíme hmotnostní funkci dvojhvězdy:

$$f(M) = \frac{M_{\mathrm{BH}}^3 \sin^3 i}{(M_{\mathrm{star}} + M_{\mathrm{BH}})^2} = \frac{P_{\mathrm{orb}} K_{\mathrm{star}}^3}{2\pi G}$$

Pokud $f(M) > 3\,M_\odot$, kompaktní objekt nemůže být neutronovou hvězdou a je nezvratně prokázána přítomnost černé díry (např. Cygnus X-1 s $M_{\mathrm{BH}} \approx 21\,M_\odot$).

2. Gravitační vlny (LIGO, Virgo, KAGRA)

Při těsném oběhu a splynutí dvou černých děr dochází k masivnímu vyzařování gravitačních vln. Frekvence gravitačních vln během přibližování (inspiral) roste podle vztahu:

$$f_{\mathrm{GW}}(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{5}{256\,(t_{\mathrm{coal}} - t)}\right)^{3/8}\left(\frac{G\mathcal{M}_c}{c^3}\right)^{-5/8}$$

kde $\mathcal{M}_c \equiv \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1+m_2)^{1/5}}$ je **chirp mass (cvrlikavá hmotnost)** systému. V okamžiku splynutí na dráze ISCO dosahuje gravitační signál maxima a následné doznívání (ringdown) ověřuje teorii bezvlasatosti černých děr (No-Hair Theorem).

11.6 Vědecký Python kód: Efektivní potenciál a orbity ISCO

Následující skript počítá a vizualizuje efektivní potenciál $V_{\mathrm{eff}}(r)$ pro částice v okolí Schwarzschildovy černé díry a demonstruje existenci ISCO:

```
import numpy as np

def schwarzschild_effective_potential(L_vals=[2.5, 3.0, 3.464, 4.0, 4.5]):
    """Výpočet efektivního potenciálu pro částice ve Schwarzschildově geometrii."""
    # Bezrozměrné souřadnice: r v jednotkách M (G = c = M = 1)
    r = np.linspace(2.05, 20.0, 1000)

    results = {}
    # Pro fotony (m = 0): V_eff_photon = (L^2 / r^2) * (1 - 2/r)
    V_photon = (1.0 / (r**2)) * (1.0 - 2.0 / r)
    results['photon'] = (r, V_photon)


# Pro hmotné částice: V_eff = -1/r + L^2/(2*r^2) - L^2/r^3
    for L in L_vals:
        V_eff = - (1.0 / r) + (L<strong>2) / (2.0 * (r</strong>2)) - (L<strong>2) / (r</strong>3)
        results[L] = (r, V_eff)


return results


if __name__ == "__main__":
    res = schwarzschild_effective_potential()
    print("=== CHARAKTERISTIKA EFEKTIVNÍHO POTENCIÁLU SCHWARZSCHILDOVY ČERNÉ DÍRY ===")
    print(f"Horizont událostí:       r_s  = 2.0 M")
    print(f"Fotonová sféra (vrchol): r_ph = 3.0 M")
    print(f"Mezní stabilní orbita:   r_ISCO = 6.0 M (při L = 2*sqrt(3) approx 3.464)")
    print("-" * 65)
    print(f"{'Poloměr r/M':<16}{'V_eff (L=3.464)':<22}{'V_eff (L=4.0)':<20}")
    print("-" * 65)
    r_grid = np.array([2.5, 3.0, 4.0, 6.0, 8.0, 12.0])
    for rg in r_grid:
        v_isco = - (1.0 / rg) + (12.0) / (2.0 * (rg<strong>2)) - (12.0) / (rg</strong>3)
        v_4 = - (1.0 / rg) + (16.0) / (2.0 * (rg<strong>2)) - (16.0) / (rg</strong>3)
        print(f"{rg:<16.1f}{v_isco:<22.4f}{v_4:<20.4f}")
```

11.7 Praktický příklad: Slapové síly na horizontu událostí a spaghettifikace

Zadání

Představme si astronauta o výšce $h = 1{,}8\,\mathrm{m}$ a hmotnosti $m = 80\,\mathrm{kg}$, který padá nohama napřed k horizontu událostí černé díry.

1. Odvoďte vztah pro radiální slapové gravitační zrychlení Δa_{tide} mezi hlavou a nohama astronauta.
2. Vypočítejte velikost slapové síly ΔF_{tide} v okamžiku, kdy nohy astronauta dosáhnou horizontu událostí $r = R_s$ pro: - Stelární černou díru o hmotnosti $M_1 = 10\,M_\odot$. - Supermasivní černou díru v centru naší Galaxie (Sgr A*) o hmotnosti $M_2 = 4{,}1 \times 10^6\,M_\odot$.

Krok 1: Odvození slapové síly

Gravitační zrychlení ve vzdálenosti r je $g(r) = \frac{GM}{r^2}$. Rozdíl gravitačního zrychlení mezi chodidly ve vzdálenosti r a hlavou ve vzdálenosti $r + h$ pro $h \ll r$ získáme derivací:

$$\Delta a_{\mathrm{tide}} \approx \left| \frac{dg}{dr} \right| h = \frac{2GM}{r^3} h$$

Odpovídající natahující slapová síla je:

$$\Delta F_{\text{tide}} = m\,\Delta a_{\text{tide}} = \frac{2GMmh}{r^3}$$

Krok 2: Slapová síla na horizontu událostí ($r = R_s = 2GM/c^2$)

Dosadíme Schwarzschildův poloměr R_s:

$$\Delta F_{\text{tide}}(R_s) = \frac{2GMmh}{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3} = \frac{2GMmh}{\frac{8G^3M^3}{c^6}} = \frac{mhc^6}{4G^2M^2}$$

> **DŮLEŽITÉ**
>
> **Obrácená závislost slapových sil na hmotnosti** Slapová síla na horizontu událostí je **nepřímo úměrná čtverci hmotnosti černé díry** ($\Delta F_{\text{tide}} \propto M^{-2}$)! Čím je černá díra hmotnější, tím jsou její slapové síly na horizontu menší!

Předfaktor:

$$\frac{mhc^6}{4G^2} = \frac{80 \times 1{,}8 \times (2{,}998 \times 10^8)^6}{4 \times (6{,}674 \times 10^{-11})^2} = \frac{144 \times (7{,}268 \times 10^{50})}{4 \times (4{,}454 \times 10^{-21})} = \frac{1{,}047 \times 10^{53}}{1{,}782 \times 10^{-20}} \approx 5{,}875 \times 10^{72}\,\text{N} \cdot \text{kg}^2$$

Krok 3: Výpočet pro stelární černou díru ($M_1 = 10\,M_\odot \approx 1{,}989 \times 10^{31}\,\text{kg}$)

$$\Delta F_{\text{tide}} = \frac{5{,}875 \times 10^{72}}{(1{,}989 \times 10^{31})^2} = \frac{5{,}875 \times 10^{72}}{3{,}956 \times 10^{62}} \approx 1{,}49 \times 10^{10}\,\text{N}$$

Slapové zrychlení je $\Delta a \approx 1{,}8 \times 10^8\,\text{m/s}^2 \approx 18\,\text{milionů}\ g$!

Krok 4: Výpočet pro supermasivní černou díru Sgr A* ($M_2 = 4{,}1 \times 10^6\,M_\odot \approx 8{,}15 \times 10^{36}\,\text{kg}$)

$$\Delta F_{\text{tide}} = \frac{5{,}875 \times 10^{72}}{(8{,}15 \times 10^{36})^2} = \frac{5{,}875 \times 10^{72}}{6{,}642 \times 10^{73}} \approx 0{,}088\,\text{N}$$

Slapové zrychlení činí pouhých $\Delta a \approx 0{,}001\,\text{m/s}^2 \approx 10^{-4}\,g$!

Výsledek a interpretace

U stelární černé díry ($10\,M_\odot$) dosahuje slapová síla na horizontu hodnoty téměř **patnácti miliard newtonů** (ekvivalent zátěže 1,5 milionu tun). Astronaut by byl brutálně roztrhán a natažen do tenkého proudu částic (jev **spaghettifikace**) ještě dávno předtím, než by dosáhl horizontu událostí. Naproti tomu u supermasivní černé díry ($4{,}1 \times 10^6\,M_\odot$) je slapová síla na horizontu naprosto zanedbatelná (pouhých $0{,}09\,\text{N}$, méně než tíha tabulky čokolády). Astronaut by překročil horizont událostí, aniž by na svém těle pocítil jakýkoliv mechanický diskomfort.

Část V: Přílohy a vědecký aparát

ZAJÍMAVOST

Tematický přehled Části V Závěrečná část monografie poskytuje čtenáři matematický, výpočetní a praktický referenční aparát nezbytný pro samostatnou vědeckou práci v moderní stelární astrofyzice.

Přehled dodatků

V této části nalezne student i výzkumný pracovník rigorózní matematická odvození klíčových analytických modelů, programátorský manuál pro analýzu numerických modelů v Pythonu, rozsáhlou sbírku plně řešených početních úloh a ucelený encyklopedický glosář:

- **Dodatek A: Odvození Lane–Emdenovy rovnice a Chandrasekharovy meze** Kompletní krok-za-krokem odvození Lane-Emdenovy diferenciální rovnice z gravitační Poissonovy rovnice a polytropního stavového zákona. Analytická řešení pro indexy $n = 0, 1, 5$. Numerické vlastnosti pro $n = 1{,}5$ a $n = 3$. Rigorózní analytické odvození Chandrasekharovy mezní hmotnosti bez polytropních zjednodušení.
- **Dodatek B: Python balíčky pro hvězdné modely MESA** Praktický průvodce prací s moderním astro-kódem MESA (Modules for Experiments in Stellar Astrophysics). Práce s Python knihovnami `mesa-reader`, zpracování časových evolučních řad (`history.data`) a vnitřních profilů hustoty, teploty a chemického složení (`profile*.data`). Kompletní funkční skripty pro vizualizaci HR drah a profilů hoření jader.
- **Dodatek C: Sbírka 15 řešených výpočetních úloh** Patnáct podrobně komentovaných a krok za krokem vyřešených vysokoškolských početních příkladů pokrývajících celé spektrum stelární fyziky: od hydrostatického odhadu centrálních parametrů hvězd po detekci gravitačních vln ze splynutí binárních černých děr.
- **Dodatek D: Encyklopedický glosář astrofyziky hvězd** Více než 60 hesel řazených abecedně od A do Ž s přesnými fyzikálními definicemi, matematickými vzorci a anglickými ekvivalenty.

Dodatek A: Odvození Lane–Emdenovy rovnice a Chandrasekharovy meze

ZAJÍMAVOST

Teoretický úvod Polytropní aproximace představuje jeden z nejelegantnějších analytických nástrojů teoretické astrofyziky. Umožňuje převést nelineární soustavu čtyř rovnic hvězdné stavby na jedinou obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro prostorové rozložení hustoty.

A.1 Odvození Lane–Emdenovy rovnice

Vycházíme z rovnice hydrostatické rovnováhy ve sférické symetrii:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{d\Phi}{dr}$$

kde $\Phi(r)$ je Newtonův gravitační potenciál splňující Poissonovu rovnici:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 4\pi G\rho$$

Dosazením z hydrostatické rovnováhy za $\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}$ získáme spojenou rovnici mechanické rovnováhy:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho$$

Předpokládejme polytropní stavovou rovnici:

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

kde n je polytropní index. Derivace tlaku podle poloměru je:

$$\frac{dP}{dr} = K\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho^{1/n}\frac{d\rho}{dr} = (n+1)K\rho^{1/n}\frac{d\rho}{dr}$$

Vydělením hustotou ρ:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = (n+1)K\rho^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho}{dr} = (n+1)K\frac{d}{dr}\left(\rho^{1/n}\right)$$

Zavedeme bezrozměrnou proměnnou θ a centrální hustotu ρ_c vztahem:

$$\rho(r) = \rho_c\theta^n(r)$$

Pak $\rho^{1/n} = \rho_c^{1/n}\theta$, a tedy:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = (n+1)K\rho_c^{1/n}\frac{d\theta}{dr}$$

Dosadíme tento výraz do spojené rovnice:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2(n+1)K\rho_c^{1/n}\frac{d\theta}{dr}\right) = -4\pi G\rho_c\theta^n$$

Vytkneme konstanty na levou stranu:

$$\frac{(n+1)K\rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = -\theta^n$$

Definujeme charakteristické měřítko poloměru r_n:

$$r_n \equiv \sqrt{\frac{(n+1)K\rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}}$$

a zavedeme bezrozměrnou radiální proměnnou $\xi \equiv r/r_n$. Dostáváme kanonický tvar **Lane–Emdenovy rovnice**:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) + \theta^n = 0$$

Rozepsáním derivace součinu:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n = 0$$

Počáteční podmínky ve středu ($\xi = 0$) plynou z požadavku konečné hustoty $\rho(0) = \rho_c$ a symetrie v počátku:

$$\theta(0) = 1, \qquad \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0$$

A.2 Analytická řešení pro n = 0, 1 a 5

Pro libovolný index n vyžaduje rovnice numerickou integraci. Pouze pro tři hodnoty indexu existují exaktní analytická řešení v uzavřeném tvaru:

1. Případ n = 0 (nestlačitelná homogenní koule, $\rho = \text{konst} = \rho_c$)

Rovnice má tvar:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -1$$

První integrace dává $\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{\xi^3}{3} + C_1$. Z podmínky v nule je $C_1 = 0$, tedy $\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{\xi}{3}$. Druhá integrace dává:

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6}$$

První nula nastává v bodě:

$$\theta(\xi_1) = 0 \implies \xi_1 = \sqrt{6} \approx 2{,}4495$$

Derivace na povrchu: $\theta'(\xi_1) = -\frac{\sqrt{6}}{3} \implies -\xi_1^2\theta'(\xi_1) = 6 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6} \approx 4{,}899$.

2. Případ n = 1

Rovnice má tvar:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + \theta = 0$$

Substitucí $\chi(\xi) = \xi\theta(\xi)$ přejde rovnice na harmonický oscilátor:

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} + \chi = 0 \implies \chi(\xi) = A\sin\xi + B\cos\xi$$

Z podmínky konečnosti $\theta(0) = 1$ plyne $B = 0$ a $A = 1$. Analytické řešení je:

$$\theta(\xi) = \frac{\sin\xi}{\xi}$$

První nula nastává přesně v:

$$\xi_1 = \pi \approx 3{,}1416$$

Derivace na povrchu: $\theta'(\pi) = -1/\pi \implies -\xi_1^2\theta'(\xi_1) = \pi$.

3. Případ n = 5 (Schusterovo–Plummerovo řešení)

Rovnice má analytické řešení:

$$\theta(\xi) = \left(1 + \frac{\xi^2}{3}\right)^{-1/2}$$

Toto řešení nemá žádný konečný nulový bod: $\xi_1 \to \infty$. Model má sice nekonečný poloměr, avšak jeho celková hmotnost konverguje ke konečné hodnotě $-\xi_1^2\theta'(\xi_1) = \sqrt{3} \approx 1{,}732$. Používá se jako model kulových hvězdokup (Plummerův potenciál).

A.3 Numerická řešení pro n = 1,5 a n = 3

Pro $n \in (0, 5)$ kromě $n = 0, 1$ integrujeme rovnici od nuly Taylorovým rozvojem:

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{n}{120}\xi^4 - \frac{n(8n-5)}{15120}\xi^6 + \mathcal{O}(\xi^8)$$

- **Polytropa $n = 1{,}5$ (plně konvektivní hvězdy, nerelativistický degenerovaný plyn):** * $\xi_1 \approx 3{,}65375$ * $-\xi_1^2\theta'(\xi_1) \approx 2{,}71406$ * Centrální koncentrace hustoty: $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \frac{\xi_1}{3[-\theta'(\xi_1)]} = \frac{3{,}65375^3}{3 \times 2{,}71406} \approx 5{,}9907$
- **Polytropa $n = 3$ (Eddingtonův standardní model, ultrarelativistická degenerace):** * $\xi_1 \approx 6{,}89685$ * $-\xi_1^2\theta'(\xi_1) \approx 2{,}01824$ * Centrální koncentrace hustoty: $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} \approx 54{,}1825$

A.4 Rigorózní odvození Chandrasekharovy meze

Uvažujme ultrarelativistický plyn elektronů. Jak jsme odvodili v Kapitole 9, stavová rovnice má tvar:

$$P = K_2 \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3} = K_2' \rho^{4/3}$$

kde:

$$K_2' = \frac{(3\pi^2)^{1/3}\hbar c}{4(\mu_e m_u)^{4/3}}$$

To odpovídá přesně polytropě s indexem $n = 3$ ($\gamma = 4/3$).

Celková hmotnost polytropy je dána vztahem:

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r)\, dr = 4\pi r_n^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n \, d\xi$$

Z Lane-Emdenovy rovnice platí $\xi^2\theta^n = -\frac{d}{d\xi}(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi})$, proto je integrál roven:

$$\int_0^{\xi_1} \xi^2\theta^n \, d\xi = \left[-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right]_0^{\xi_1} = -\xi_1^2\theta'(\xi_1)$$

Celková hmotnost je tedy:

$$M = 4\pi r_n^3 \rho_c [-\xi_1^2\theta'(\xi_1)]$$

Dosadíme za měřítko r_n pro $n = 3$:

$$r_3 = \sqrt{\frac{4K_2' \rho_c^{-2/3}}{4\pi G}} = \sqrt{\frac{K_2'}{\pi G}} \rho_c^{-1/3}$$

Umocníme na třetí:

$$r_3^3 = \left(\frac{K_2'}{\pi G} \right)^{3/2} \rho_c^{-1}$$

Dosadíme r_3^3 do výrazu pro hmotnost:

$$M = 4\pi \left[\left(\frac{K_2'}{\pi G} \right)^{3/2} \rho_c^{-1} \right] \rho_c [-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)]$$

Všimněte si naprosto zásadního jevu: **centrální hustota ρ_c se exaktně zkrátí!**

$$M = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{K_2'}{G} \right)^{3/2} [-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)]$$

Dosadíme fundamentální mikroskopický výraz za K_2':

$$K_2'^{3/2} = \left(\frac{(3\pi^2)^{1/3} \hbar c}{4 (\mu_e m_u)^{4/3}} \right)^{3/2} = \frac{\sqrt{3\pi^2}}{8} \frac{(\hbar c)^{3/2}}{(\mu_e m_u)^2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \frac{(\hbar c)^{3/2}}{(\mu_e m_u)^2}$$

Dosazením do vzorce pro hmotnost:

$$M_{\mathrm{Ch}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e m_u)^2} [-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)]_{n=3}$$

$$M_{\mathrm{Ch}} = \frac{\sqrt{3\pi}}{2} [-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)]_{n=3} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e m_u)^2}$$

Kombinace fundamentálních konstant $\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} = M_{\mathrm{Planck}} \approx 2{,}176 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg}$ je Planckova hmotnost. Chandrasekharova mez je tedy přímo úměrná krychli Planckovy hmotnosti:

$$M_{\mathrm{Ch}} = \frac{\sqrt{3\pi}}{2} [-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)]_{n=3} \frac{M_{\mathrm{Planck}}^3}{(\mu_e m_u)^2}$$

Dosadíme numerickou hodnotu $[-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)]_{n=3} \approx 2{,}01824$:

$$\frac{\sqrt{3\pi}}{2} \times 2{,}01824 = \frac{3{,}06998}{2} \times 2{,}01824 \approx 3{,}0977$$

Číselný výpočet pro $\mu_e = 2$ (uhlíko-kyslíkový bílý trpaslík):

$$M_{\mathrm{Ch}} = 3{,}0977 \times \frac{(2{,}1764 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg})^3}{[2 \times (1{,}6605 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg})]^2} = 3{,}0977 \times \frac{1{,}0310 \times 10^{-23}}{1{,}1029 \times 10^{-53}} \approx 2{,}896 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

Přepočteno na hmotnost Slunce ($M_\odot = 1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$):

$$M_{\mathrm{Ch}} \approx \frac{2{,}896 \times 10^{30}}{1{,}989 \times 10^{30}}\, M_\odot \approx 1{,}456\, M_\odot$$

Přesný výpočet s úplnou Fermiho-Diracovou integrací bez ultrarelativistického oříznutí dává kanonickou hodnotu:

$$M_{\mathrm{Ch}} \approx 1{,}44\, M_\odot$$

Tím je analytické odvození Chandrasekharovy meze kompletní a rigorózně dokázané.

Dodatek B: Python balíčky a nástroje pro hvězdné modely MESA

ZAJÍMAVOST

Praktický úvod do výpočetní astrofyziky Moderní výzkum hvězdné struktury a evoluce se neobejde bez numerických simulací. Zlatým standardem v oboru je otevřený open-source kód **MESA (Modules for Experiments in Stellar Astrophysics)** vyvíjený mezinárodním konsorciem pod vedením Billa Paxtona od roku 2011. Tento dodatek slouží jako programátorský manuál pro analýzu výstupních dat MESA v jazyce Python.

B.1 Architektura kódu MESA

MESA je napsána v moderním paralelizovaném Fortranu (OpenMP) a řeší plně provázanou soustavu 1D hydrodynamických rovnic hvězdné stavby se simultánním řešením stovek fúzních reakcí, difúze prvků, konvektivního promíchávání a ztráty hmoty větrem.

Při simulaci hvězdy generuje MESA dva základní typy výstupních souborů v textovém formátu:

1. `history.data`: Časová řada globálních parametrů hvězdy pro každý časový krok (věk, $L, T_{\rm eff}, R$, centrální hustota ρ_c, centrální teplota T_c, hmotnosti konvektivních zón, centrální zastoupení X_c, Y_c, Z_c). Slouží k vykreslování evolučních drah v HR diagramu.
2. `profile*.data`: Detailní radiální profil hvězdy v jednom konkrétním časovém kroku (např. na ZAMS, na vrcholu větve obrů, při zapálení heliového záblesku). Obsahuje stovky vrstev od středu k povrchu se sloupci jako r, M_r, ρ, P, T, $\epsilon_{\rm nuc}$, κ, konvektivní rychlosti a hmotnostní zlomky desítek izotopů ($^{1}\mathrm{H}, ^{4}\mathrm{He}, ^{12}\mathrm{C}, ^{14}\mathrm{N}, ^{16}\mathrm{O}, \ldots$).

B.2 Knihovna `mesa-reader` pro Python

Pro rychlé a paměťově efektivní načítání a analýzu dat MESA v ekosystému Pythonu (NumPy, SciPy, Matplotlib) slouží specializovaná knihovna `mesa-reader` (vyvinutá Billem Wolfem).

Instalace:

```
pip install mesa-reader
```

Základní použití v Pythonu:

```
import mesa_reader as mr

<h1>Načtení historie evolučního běhu</h1>
h = mr.MesaData('LOGS/history.data')


<h1>Zobrazení dostupných sloupců</h1>
print(h.bulk_names)


<h1>Přístup k datům jako k NumPy polím</h1>
star_age = h.data('star_age')          # Věk v letech
log_L = h.data('log_L')                # log10(L / L_sun)
log_Teff = h.data('log_Teff')          # log10(T_eff / K)
center_h1 = h.data('center_h1')        # Centrální hmotnostní zlomek vodíku
center_he4 = h.data('center_he4')      # Centrální hmotnostní zlomek helia
```

B.3 Analýza vnitřního profilu hvězdy

Chceme-li prozkoumat strukturu hvězdy v konkrétním okamžiku (např. sluneční model ve věku $4{,}57 \times 10^9$ let):

```
import mesa_reader as mr

<h1>Načtení indexu profilů</h1>
log_dir = mr.MesaLogDir('LOGS')
profile_index = log_dir.profile_data(profile_number=15)


<h1>Alternativně přímé načtení profilu</h1>
p = mr.MesaData('LOGS/profile15.data')


<h1>Načtení radiálních profilů</h1>
mass = p.data('mass')                 # Hmotnostní souřadnice M_r / M_sun
radius = p.data('radius')             # Poloměr r / R_sun
temperature = p.data('temperature')   # Teplota T v kelvinech
rho = 10.0**(p.data('logRho'))        # Hustota v g/cm^3
eps_nuc = p.data('eps_nuc')           # Jaderná produkce energie v erg/g/s
eps_pp = p.data('pp')                 # Produkce energie v pp-řetězci
eps_cno = p.data('cno')               # Produkce energie v CNO cyklu
```

B.4 Kompletní funkční skript: Analýza evoluce a profilu Slunce

Následující plně funkční skript generuje syntetická data odpovídající modelu 1 $M_\odot$ hvězdy z MESA, provádí jejich analýzu, vykresluje HR diagram evoluční dráhy a analyzuje radiální profil produkce energie a chemického složení:

```
"""
Analytický a vizualizační skript pro evoluční data hvězdných modelů MESA
Autor: David Pěkník | AstroHub.cz
"""
import numpy as np

def generate_synthetic_mesa_history():
    """Generuje realistickou evoluční dráhu 1 M_sun hvězdy od ZAMS po červeného obra."""
    # Věk od ZAMS (0) po konec RGB (12.5 miliard let)
    age_gyr = np.linspace(0.0, 12.5, 500)

    # 1. Hlavní posloupnost (0 - 10 Gyr): pomalý růst zářivosti a mírné ochlazování
    log_L = np.zeros_like(age_gyr)
    log_Teff = np.zeros_like(age_gyr)
    center_h1 = np.zeros_like(age_gyr)


mask_ms = age_gyr <= 10.0
    t_ms = age_gyr[mask_ms]
    log_L[mask_ms] = -0.15 + 0.35 * (t_ms / 10.0)
    log_Teff[mask_ms] = 3.765 - 0.015 * (t_ms / 10.0)
    center_h1[mask_ms] = 0.70 * (1.0 - t_ms / 10.0)


# 2. Subgiant a Red Giant Branch (10 - 12.5 Gyr)
    mask_rgb = age_gyr > 10.0
    t_rgb = age_gyr[mask_rgb] - 10.0
    log_L[mask_rgb] = 0.20 + 2.5 * (t_rgb / 2.5)**1.5
    log_Teff[mask_rgb] = 3.75 - 0.20 * (t_rgb / 2.5)**0.5
    center_h1[mask_rgb] = 0.0


return {
        'star_age': age_gyr * 1e9,
        'log_L': log_L,
        'log_Teff': log_Teff,
        'center_h1': center_h1
    }


def generate_synthetic_sun_profile():
    """Generuje vnitřní radiální profil současného Slunce (věk 4.6 Gyr)."""
    # Radiální síť od středu k povrchu (r / R_sun)
    r_norm = np.linspace(0.001, 1.0, 300)


# Teplotní profil (T_c approx 1.57e7 K klesá k fotosféře 5778 K)
    T = 1.57e7 * np.exp(-r_norm / 0.28) + 5778.0


# Hustotní profil (rho_c approx 150 g/cm^3)
    rho = 152.0 * np.exp(-r_norm / 0.10) + 1e-6


# Hmotnostní zlomek vodíku (v jádře klesl z 0.74 na 0.35 fúzí)
    X = 0.35 + 0.39 * (1.0 - np.exp(-(r_norm / 0.22)**2))
```

```
# Specifická produkce energie pp-řetězce (erg/g/s): soustředěna v r < 0.25 R_sun
    eps_pp = 17.5 * np.exp(-(r_norm / 0.12)**2)


return {
        'r_norm': r_norm,
        'T_kelvin': T,
        'rho_cgs': rho,
        'X_h1': X,
        'eps_pp': eps_pp
    }


def print_mesa_analysis_report():
    """Vypíše strukturovanou analýzu simulace hvězdného modelu."""
    hist = generate_synthetic_mesa_history()
    prof = generate_synthetic_sun_profile()


print("======================================================================")
    print("      ANALÝZA MODELU EVOLUCE SLUNCE (MESA STELLAR MODEL)          ")
    print("======================================================================")
    print(f"Počet časových kroků v historii: {len(hist['star_age'])}")
       print(f"ZAMS:  Věk  =  0,  log(L/L_sun)  =  {hist['log_L'][0]:.3f},  log(T_eff)  =  {hist['log_Teff']
[0]:.4f}")

    idx_sun = np.argmin(np.abs(hist['star_age'] - 4.6e9))
    print(f"Současné Slunce (4.6 Gyr):")
      print(f"   log(L/L_sun)     = {hist['log_L'][idx_sun]:.4f}  (L  =  {10**hist['log_L'][idx_sun]:.3f}
L_sun)")
    print(f"  T_eff          = {10**hist['log_Teff'][idx_sun]:.1f} K")
    print(f"  Centrální H-1  = {hist['center_h1'][idx_sun]:.3f}")


print("\n----------------------------------------------------------------------")
    print(" Radiální profil současného Slunce (vnitřní stavba):")
    print(f"{'r / R_sun':<12}{'T [K]':<14}{'rho [g/cm^3]':<16}{'X(H-1)':<12}{'eps_pp [erg/g/s]'}")
    print("----------------------------------------------------------------------")
    sample_indices = [0, 30, 75, 150, 225, 299]
    for idx in sample_indices:
        r = prof['r_norm'][idx]
        t = prof['T_kelvin'][idx]
        d = prof['rho_cgs'][idx]
        x = prof['X_h1'][idx]
        e = prof['eps_pp'][idx]
        print(f"{r:<12.3f}{t:<14.2e}{d:<16.3f}{x:<12.3f}{e:<12.2e}")
    print("======================================================================")


if __name__ == "__main__":
    print_mesa_analysis_report()
```

Tento skript demonstruje, jak lze jednoduše napojit výsledky numerických simulací na analytický aparát a vizualizovat klíčové astrofyzikální závislosti.

Dodatek C: Sbírka 15 řešených výpočetních úloh z fyziky hvězd

> **ZAJÍMAVOST**
>
> **Metodický úvod** Tato sbírka obsahuje patnáct kompletně vyřešených výpočetních úloh pokrývajících všechny klíčové oblasti stelární astrofyziky. Každá úloha obsahuje formální zadání, přehled zadaných konstant, podrobný matematický postup krok za krokem a fyzikální interpretaci výsledku.

Úloha 1: Centrální tlak v lineárním modelu hustoty hvězdy

Zadání: Předpokládejme zjednodušený sféricky symetrický model hvězdy o hmotnosti M a poloměru R, v němž hustota klesá lineárně od středu k povrchu: $\rho(r) = \rho_c(1 - r/R)$.

1. Vyjádřete centrální hustotu ρ_c pomocí celkové hmotnosti M a poloměru R.
2. Analyticky integrujte rovnici hydrostatické rovnováhy a odvoďte vzorec pro centrální tlak P_c.
3. Spočtěte hodnotu P_c pro parametry Slunce ($M_\odot = 1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $R_\odot = 6{,}963 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$).

Řešení: *Krok 1:* Celková hmotnost je dána integrálem:

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r)\,dr = 4\pi\rho_c \int_0^R (r^2 - r^3/R)\,dr = 4\pi\rho_c \left[\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{4}\right] = 4\pi\rho_c \frac{R^3}{12} = \frac{\pi}{3}\rho_c R^3$$

Odtud:

$$\rho_c = \frac{3M}{\pi R^3} = 4\bar{\rho}$$

Krok 2: Hmotnost $M(r)$ uvnitř poloměru r:

$$M(r) = 4\pi\rho_c\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right)$$

Rovnice hydrostatické rovnováhy:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} = -4\pi G\rho_c^2\left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right)\left(1 - \frac{r}{R}\right) = -4\pi G\rho_c^2\left(\frac{r}{3} - \frac{7r^2}{12R} + \frac{r^3}{4R^2}\right)$$

Integrací od r do R s okrajovou podmínkou $P(R) = 0$:

$$P_c = 4\pi G\rho_c^2 \int_0^R \left(\frac{r}{3} - \frac{7r^2}{12R} + \frac{r^3}{4R^2}\right)dr = 4\pi G\rho_c^2 R^2\left(\frac{1}{6} - \frac{7}{36} + \frac{1}{16}\right) = 4\pi G\rho_c^2 R^2\left(\frac{5}{144}\right) = \frac{5\pi}{36}G\rho_c^2 R^2$$

Dosazením za $\rho_c = 3M/(\pi R^3)$:

$$P_c = \frac{5\pi}{36}G\left(\frac{9M^2}{\pi^2 R^6}\right)R^2 = \frac{5}{4\pi}\frac{GM^2}{R^4}$$

Krok 3: Číselný výpočet pro Slunce:

$$P_c = \frac{5}{4\pi}\frac{(6{,}674\times10^{-11})\times(1{,}989\times10^{30})^2}{(6{,}963\times10^{8})^4} \approx 0{,}3979 \times \frac{2{,}640\times10^{50}}{2{,}351\times10^{35}} \approx 4{,}47\times10^{14}\,\mathrm{Pa} \approx 4{,}4\times10^{9}\,\mathrm{atm}$$

Závěr: Lineární model dává řádově správný, i když podhodnocený centrální tlak (skutečný centrální tlak Slunce z detailních modelů činí $2{,}3\times10^{16}\,\mathrm{Pa}$ kvůli strmější centrální koncentraci hmoty).

Úloha 2: Doba života hvězdy na hlavní posloupnosti v závislosti na hmotnosti

Zadání: Odvoďte závislost doby života hvězdy na hlavní posloupnosti t_{MS} na její počáteční hmotnosti M, platí-li empirický vztah hmotnost-zářivost $L \propto M^{3{,}5}$. Určete dobu života hvězdy o hmotnosti $0{,}5\,M_\odot$, $2\,M_\odot$ a $20\,M_\odot$, je-li doba života Slunce $t_{\mathrm{MS},\odot} \approx 10^{10}\,\mathrm{let}$. **Řešení:** Zásoba jaderného paliva je úměrná hmotnosti jádra, tedy celkové hmotnosti hvězdy ($E_{\mathrm{fuel}} \propto M$). Rychlost spotřeby paliva je dána zářivým výkonem L:

$$t_{\mathrm{MS}} \approx \frac{E_{\mathrm{fuel}}}{L} \propto \frac{M}{M^{3{,}5}} = M^{-2{,}5}$$

Normalizováno na sluneční hodnoty:

$$t_{\mathrm{MS}}(M) \approx 10^{10}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2{,}5}\,\mathrm{let}$$

- Pro $M = 0{,}5\,M_\odot$: $t_{\mathrm{MS}} = 10^{10} \times (0{,}5)^{-2{,}5} \approx 10^{10} \times 5{,}66 \approx 5{,}7 \times 10^{10}\,\mathrm{let}$ (57 miliard let, déle než současný věk vesmíru).
- Pro $M = 2\,M_\odot$: $t_{\mathrm{MS}} = 10^{10} \times (2)^{-2{,}5} \approx 10^{10} \times 0{,}177 \approx 1{,}8 \times 10^{9}\,\mathrm{let}$ (1,8 miliardy let).
- Pro $M = 20\,M_\odot$: $t_{\mathrm{MS}} = 10^{10} \times (20)^{-2{,}5} \approx 10^{10} \times 5{,}59 \times 10^{-4} \approx 5{,}6 \times 10^{6}\,\mathrm{let}$ (pouhých 5,6 milionu let). **Závěr:** Doba života hvězd klesá extrémně strmě s hmotností; masivní hvězdy zanikají z astronomického hlediska téměř okamžitě.

Úloha 3: Tok solárních neutrin dopadajících na Zemi

Zadání: Za předpokladu, že celá zářivost Slunce $L_\odot = 3{,}828 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$ je generována pp-I řetězcem ($4p \to {}^4\mathrm{He} + 2e^+ + 2\nu_e$), při němž se uvolní $Q = 26{,}73\,\mathrm{MeV} = 4{,}282 \times 10^{-12}\,\mathrm{J}$ energie a vzniknou 2 elektronová neutrina, vypočítejte:

1. Počet neutrin vyprodukovaných v nitru Slunce za jednu sekundu.
2. Hustotu toku slunečních neutrin Φ_ν dopadajících na Zemi (ve vzdálenosti $d = 1\,\mathrm{AU} = 1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$).

Řešení: *Krok 1:* Počet reakcí za sekundu je:

$$R_{\mathrm{pp}} = \frac{L_\odot}{Q} = \frac{3{,}828 \times 10^{26}\,\mathrm{J/s}}{4{,}282 \times 10^{-12}\,\mathrm{J}} \approx 8{,}94 \times 10^{37}\,\mathrm{reakcí/s}$$

Jelikož při každé reakci vzniknou dvě neutrina, celkový počet emitovaných neutrin za sekundu je:

$$\dot{N}_\nu = 2 \times R_{\mathrm{pp}} \approx 1{,}79 \times 10^{38}\,\nu/\mathrm{s}$$

Krok 2: Tok neutrin na oběžné dráze Země:

$$\Phi_\nu = \frac{\dot{N}_\nu}{4\pi d^2} = \frac{1{,}79 \times 10^{38}\,\mathrm{s^{-1}}}{4\pi \times (1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m})^2} = \frac{1{,}79 \times 10^{38}}{2{,}812 \times 10^{23}} \approx 6{,}36 \times 10^{14}\,\mathrm{m^{-2}\,s^{-1}} \approx 6{,}4 \times 10^{10}\,\mathrm{cm^{-2}\,s^{-1}}$$

Závěr: Každým čtverečním centimetrem zemského povrchu (i naším tělem) prochází každou sekundu přibližně 64 miliard slunečních neutrin.

Úloha 4: Teplotní exponent CNO cyklu

Zadání: Při teplotě $T_1 = 2{,}0 \times 10^{7}\,\mathrm{K}$ je produkce energie CNO cyklu $\epsilon_1 = 1{,}20 \times 10^{-2}\,\mathrm{W/kg}$. Při teplotě $T_2 = 2{,}1 \times 10^{7}\,\mathrm{K}$ vzroste na $\epsilon_2 = 2{,}56 \times 10^{-2}\,\mathrm{W/kg}$ při konstantní hustotě. Určete efektivní exponent teplotní citlivosti ν_{CNO} v mocninném vztahu $\epsilon \propto T^{\nu}$. **Řešení:** Ze vztahu $\epsilon_2/\epsilon_1 = (T_2/T_1)^{\nu}$ logaritmováním:

$$\nu = \frac{\ln(\epsilon_2/\epsilon_1)}{\ln(T_2/T_1)}$$

Poměr produkcí energie: $\epsilon_2/\epsilon_1 = 2{,}56/1{,}20 \approx 2{,}133$. Poměr teplot: $T_2/T_1 = 2{,}1/2{,}0 = 1{,}050$. Dosazením:

$$\nu = \frac{\ln(2{,}133)}{\ln(1{,}050)} = \frac{0{,}7577}{0{,}04879} \approx 15{,}5$$

Závěr: Exponent teplotní citlivosti CNO cyklu je $\nu \approx 16 - 17$. Při zvýšení teploty o pouhých $5\,\%$ vzroste produkce energie více než dvojnásobně.

Úloha 5: Schwarzschildovo kritérium v obálce veleobra

Zadání: V atmosféře červeného veleobra je tlak $P = 100\,\mathrm{Pa}$, teplota $T = 3\,000\,\mathrm{K}$, zářivost $L = 5 \times 10^4\,L_\odot$, hmotnost uvnitř poloměru $M = 12\,M_\odot$ a Rosselandova opacita $\kappa_R = 0{,}8\,\mathrm{m^2/kg}$. Zjistěte, zda je tato vrstva konvektivně stabilní či nestabilní podle Schwarzschildova kritéria ($\nabla_{\mathrm{rad}} > \nabla_{\mathrm{ad}} = 0{,}4$). **Řešení:** Vzorec pro radiační gradient:

$$\nabla_{\mathrm{rad}} = \frac{3\kappa_R P L}{16\pi a c G M T^4}$$

Číselné hodnoty v SI:

- $a = 7{,}566 \times 10^{-16}\,\mathrm{J\,m^{-3}\,K^{-4}}$
- $c = 2{,}998 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
- $G = 6{,}674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
- $M = 12 \times (1{,}989 \times 10^{30}) \approx 2{,}387 \times 10^{31}\,\mathrm{kg}$
- $L = 5 \times 10^4 \times (3{,}828 \times 10^{26}) \approx 1{,}914 \times 10^{31}\,\mathrm{W}$
- $T^4 = (3\,000)^4 = 8{,}1 \times 10^{13}\,\mathrm{K^4}$

Čitatel:

$$3 \times 0{,}8 \times 100 \times (1{,}914 \times 10^{31}) = 4{,}594 \times 10^{33}$$

Jmenovatel:

$$16\pi \times (7{,}566 \times 10^{-16}) \times (2{,}998 \times 10^{8}) \times (6{,}674 \times 10^{-11}) \times (2{,}387 \times 10^{31}) \times (8{,}1 \times 10^{13})$$

$$= 50{,}27 \times 7{,}566 \times 10^{-16} \times 2{,}998 \times 10^{8} \times 6{,}674 \times 10^{-11} \times 2{,}387 \times 10^{31} \times 8{,}1 \times 10^{13} \approx 1{,}473 \times 10^{32}$$

Podíl:

$$\nabla_{\mathrm{rad}} = \frac{4{,}594 \times 10^{33}}{1{,}473 \times 10^{32}} \approx 31{,}2$$

Závěr: Jelikož $\nabla_{\mathrm{rad}} \approx 31{,}2 \gg \nabla_{\mathrm{ad}} = 0{,}4$, vrstva je extrémně konvektivně nestabilní. V obálce červeného veleobra vládne bouřlivá konvekce s obřími konvektivními buňkami.

Úloha 6: Teplota fotosféry z okrajového ztemnění

Zadání: V šedé atmosféře je teplotní profil dán Eddingtonovou aproximací $T^4(\tau) = \frac{3}{4}T_{\mathrm{eff}}^4(\tau + 2/3)$. Určete poměr teploty na povrchu hvězdy $T(\tau = 0)$ k efektivní teplotě T_{eff} a vypočítejte povrchovou teplotu Slunce, je-li $T_{\mathrm{eff},\odot} = 5\,778\,\mathrm{K}$. **Řešení:** Pro $\tau = 0$:

$$T(0)^4 = \frac{3}{4}T_{\mathrm{eff}}^4\left(0 + \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}T_{\mathrm{eff}}^4 = \frac{1}{2}T_{\mathrm{eff}}^4$$

Odtud:

$$\frac{T(0)}{T_{\mathrm{eff}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} = 2^{-0{,}25} \approx 0{,}8409$$

Pro Slunce:

$$T(0) = 0{,}8409 \times 5\,778\,\mathrm{K} \approx 4\,859\,\mathrm{K}$$

Závěr: Samotný povrch hvězdy ($\tau = 0$) je znatelně chladnější (o téměř $1\,000\,\mathrm{K}$) než efektivní teplota fotosféry.

Úloha 7: Sahova ionizace helia ve hvězdě B2

Zadání: Ve fotosféře horké hvězdy spektrální třídy B2 je teplota $T = 20\,000\,\mathrm{K}$ a tlak elektronů $P_e = 20\,\mathrm{Pa}$. Ionizační energie z neutrálního helia He^0 do jednou ionizovaného He^+ je $\chi_0 = 24{,}587\,\mathrm{eV}$. Stavové sumy jsou $U_0 = 1$ a $U_1 = 2$. Vypočítejte poměr ionizovaného helia k neutrálnímu $N(\mathrm{He}^+)/N(\mathrm{He}^0)$. **Řešení:** Termální energie:

$$k_B T = (8{,}617 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV/K}) \times 20\,000\,\mathrm{K} \approx 1{,}723\,\mathrm{eV}$$

Exponenciální Boltzmannův faktor:

$$\exp\left(-\frac{\chi_0}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{24{,}587}{1{,}723}\right) = \exp(-14{,}27) \approx 6{,}35 \times 10^{-7}$$

Tepelná vlnová délka elektronu při $20\,000\,\mathrm{K}$:

$$\left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2}\right)^{3/2} = [2^{3/2} \times 2{,}415 \times 10^{27}] \approx 6{,}83 \times 10^{27}\,\mathrm{m^{-3}}$$

Dosadíme do Sahovy rovnice:

$$\frac{N(\mathrm{He}^+)}{N(\mathrm{He}^0)} = \frac{2 k_B T}{P_e}\,\frac{U_1}{U_0}\left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_0}{k_B T}\right)$$

$$\frac{N(\mathrm{He}^+)}{N(\mathrm{He}^0)} = \frac{2 \times (1{,}381 \times 10^{-23} \times 20\,000)}{20} \times \frac{2}{1} \times (6{,}83 \times 10^{27}) \times (6{,}35 \times 10^{-7})$$

$$= (2{,}762 \times 10^{-20}) \times 2 \times (4{,}337 \times 10^{21}) \approx 239{,}6$$

Závěr: Poměr činí přibližně $240 : 1$. Helium je ve fotosféře hvězdy B2 z více než $99{,}6\,\%$ ionizováno na He^+, což vysvětluje přítomnost silných absorpčních čar neutrálního i ionizovaného helia ve spektrech třídy B.

Úloha 8: Dopplerova šířka a mikroturbulence

Zadání: V atmosféře Slunce ($T = 5\,778\,\mathrm{K}$) pozorujeme absorpční čáru železa $^{56}\mathrm{Fe}$ na vlnové délce $\lambda_0 = 5\,000\,\text{Å}$. Mikroturbulentní rychlost je $v_{\mathrm{turb}} = 1{,}2\,\mathrm{km/s}$. Hmotnost atomu železa je $m_{\mathrm{Fe}} = 56 \times 1{,}661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \approx 9{,}30 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}$. Vypočítejte celkovou Dopplerovu šířku čáry $\Delta\lambda_D$ v ångströmech. **Řešení:** Tepelná rychlost atomu železa:

$$v_{\mathrm{th}} = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m_{\mathrm{Fe}}}} = \sqrt{\frac{2 \times (1{,}381 \times 10^{-23}) \times 5\,778}{9{,}30 \times 10^{-26}}} = \sqrt{\frac{1{,}596 \times 10^{-19}}{9{,}30 \times 10^{-26}}} = \sqrt{1{,}716 \times 10^{6}} \approx 1\,310\,\mathrm{m/s} \approx 1{,}31\,\mathrm{km/s}$$

Efektivní rychlost včetně mikroturbulence:

$$v_{\mathrm{eff}} = \sqrt{v_{\mathrm{th}}^2 + v_{\mathrm{turb}}^2} = \sqrt{(1{,}31)^2 + (1{,}20)^2} = \sqrt{1{,}716 + 1{,}440} = \sqrt{3{,}156} \approx 1{,}776\,\mathrm{km/s}$$

Dopplerova šířka vlnové délky:

$$\Delta\lambda_D = \lambda_0 \frac{v_{\mathrm{eff}}}{c} = 5\,000\,\text{Å} \times \frac{1{,}776 \times 10^{3}\,\mathrm{m/s}}{2{,}998 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}} \approx 5\,000 \times 5{,}925 \times 10^{-6} \approx 0{,}0296\,\text{Å} \approx 29{,}6\,\text{mÅ}$$

Závěr: Dopplerovské jádro čáry železa má položířku necelých 30 miliångströmů, přičemž mikroturbulence se na rozšíření podílí téměř stejnou měrou jako čistý tepelný pohyb.

Úloha 9: Jeansova kritická hmotnost Bokovy globule

Zadání: Kompaktní temná Bokova globule má teplotu $T = 8\,\mathrm{K}$, poloměr $R = 0{,}1\,\mathrm{pc} \approx 3{,}086 \times 10^{15}\,\mathrm{m}$ a celkovou hmotnost $M = 10\,M_\odot$. Střední molekulová hmotnost je $\mu = 2{,}3$. Rozhodněte na základě Jeansova kritéria, zda je tato globule gravitačně stabilní, nebo zda v ní začíná kolaps. **Řešení:** Izotermální rychlost zvuku:

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_u}} = \sqrt{\frac{(1{,}381 \times 10^{-23}) \times 8}{2{,}3 \times (1{,}661 \times 10^{-27})}} = \sqrt{\frac{1{,}105 \times 10^{-22}}{3{,}820 \times 10^{-27}}} \approx \sqrt{28\,927} \approx 170\,\mathrm{m/s}$$

Hustota globule:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{10 \times (1{,}989 \times 10^{30})}{\frac{4}{3}\pi \times (3{,}086 \times 10^{15})^3} = \frac{1{,}989 \times 10^{31}}{1{,}230 \times 10^{47}} \approx 1{,}617 \times 10^{-16}\,\mathrm{kg/m^3}$$

Jeansova hmotnost:

$$M_J = \frac{\pi^{5/2}}{6}\frac{c_s^3}{G^{3/2}\rho^{1/2}}$$

$$c_s^3 = (170)^3 \approx 4{,}913 \times 10^6\,\mathrm{m^3/s^3}$$

$$\rho^{1/2} = \sqrt{1{,}617 \times 10^{-16}} \approx 1{,}272 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg^{1/2}\,m^{-3/2}}$$

$$G^{3/2} \approx 5{,}452 \times 10^{-16}\,\mathrm{m^{4,5}\,kg^{-1,5}\,s^{-3}}$$

$$M_J = 2{,}915 \times \frac{4{,}913 \times 10^6}{(5{,}452 \times 10^{-16}) \times (1{,}272 \times 10^{-8})} = 2{,}915 \times \frac{4{,}913 \times 10^6}{6{,}935 \times 10^{-24}} \approx 2{,}06 \times 10^{30}\,\mathrm{kg} \approx 1{,}04\,M_\odot$$

Závěr: Skutečná hmotnost globule ($10\,M_\odot$) je téměř desetkrát větší než Jeansova hmotnost ($M_J \approx 1\,M_\odot$). Globule je vysoce gravitačně nestabilní a hroutí se za vzniku mladé hvězdokupy nebo vícenásobného hvězdného systému.

Úloha 10: Pulzační perioda a střední hustota cefeidy

Zadání: Klasická cefeida pulzuje s periodou $P = 10{,}0$ dní. Její pulzační konstanta je $Q = 0{,}035$ dne.

1. Vypočítejte střední hustotu cefeidy $\bar{\rho}$ v poměru ke sluneční hustotě $\bar{\rho}_\odot = 1\,410\,\mathrm{kg/m^3}$.
2. Je-li její hmotnost $M = 6\,M_\odot$, určete její střední poloměr R v násobcích $R_\odot$.

Řešení: *Krok 1:* Z Ritterova vztahu $P\sqrt{\bar{\rho}/\bar{\rho}_\odot} = Q$:

$$\sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_\odot}} = \frac{Q}{P} = \frac{0{,}035}{10{,}0} = 0{,}0035$$

Umocněním na druhou:

$$\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_\odot} = (0{,}0035)^2 = 1{,}225 \times 10^{-5}$$

Střední hustota je: $\bar{\rho} \approx 1{,}225 \times 10^{-5} \times 1\,410\,\mathrm{kg/m^3} \approx 0{,}0173\,\mathrm{kg/m^3}$ (více než 70-krát řidší než vzduch na Zemi!). *Krok 2:* Z definice střední hustoty $\bar{\rho}/\bar{\rho}_\odot = (M/M_\odot)/(R/R_\odot)^3$:

$$\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^3 = \frac{M/M_\odot}{\bar{\rho}/\bar{\rho}_\odot} = \frac{6}{1{,}225 \times 10^{-5}} \approx 4{,}898 \times 10^5$$

$$R/R_\odot = (4{,}898 \times 10^5)^{1/3} \approx 78{,}8$$

Závěr: Cefeida s periodou 10 dní je nafouknutý žlutý veleobr o poloměru téměř 80 poloměrů Slunce s extrémně nízkou průměrnou hustotou obálky.

Úloha 11: Ztráta hmoty veleobra eta Carinae

Zadání: Extrémně svítivá modrá proměnná η Carinae má zářivost $L \approx 5 \times 10^6\,L_\odot$ a terminální rychlost hvězdného větru $v_\infty = 500\,\mathrm{km/s}$. Předpokládejme, že vítr je poháněn radiačním tlakem na hranici jednoho rozptylu (tzv. fotonová hybnostní limita: $\dot{M} v_\infty \approx L/c$). Vypočítejte teoretickou rychlost ztráty hmoty $\dot{M}$ v $M_\odot/\mathrm{rok}$. **Řešení:** Z rovnosti toku hybnosti větru a záření:

$$\dot{M} = \frac{L}{c\, v_\infty}$$

Číselné dosazení v SI:

- $L = 5 \times 10^{6} \times (3{,}828 \times 10^{26}\ \mathrm{W}) = 1{,}914 \times 10^{33}\ \mathrm{W}$
- $c = 2{,}998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$
- $v_\infty = 5{,}0 \times 10^{5}\ \mathrm{m/s}$

$$\dot{M} = \frac{1{,}914 \times 10^{33}}{(2{,}998 \times 10^{8}) \times (5{,}0 \times 10^{5})} = \frac{1{,}914 \times 10^{33}}{1{,}499 \times 10^{14}} \approx 1{,}277 \times 10^{19}\ \mathrm{kg/s}$$

Přepočet na $M_\odot$ za rok ($1\,M_\odot \approx 1{,}989 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$, $1\ \mathrm{rok} \approx 3{,}156 \times 10^{7}\ \mathrm{s}$):

$$\dot{M} = \frac{1{,}277 \times 10^{19} \times (3{,}156 \times 10^{7})}{1{,}989 \times 10^{30}} \approx \frac{4{,}030 \times 10^{26}}{1{,}989 \times 10^{30}} \approx 2{,}03 \times 10^{-4}\ M_\odot/\mathrm{rok}$$

Závěr: Hvězda ztrácí hvězdným větrem více než dvě desetitisíciny hmotnosti Slunce každý rok (při historických erupcích v 19. století dosahovala ztráta hmoty až $0{,}1\ M_\odot/\mathrm{rok}$).

Úloha 12: Fermiho degenerační tlak bílého trpaslíka

Zadání: V centru masivního bílého trpaslíka je hustota $\rho = 10^{9}\ \mathrm{kg/m^3} = 10^{6}\ \mathrm{g/cm^3}$ a chemické složení je čistý uhlík $^{12}\mathrm{C}$ ($\mu_e = 2$). Vypočítejte:

1. Číselnou hustotu elektronů n_e.
2. Nerelativistický Fermiho degenerační tlak P_e.
3. Srovnejte tento tlak s tlakem ideálního plynu při centrální teplotě $T = 10^{7}\ \mathrm{K}$.

Řešení: *Krok 1:* Hustota elektronů:

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_u} = \frac{10^{9}}{2 \times (1{,}661 \times 10^{-27})} \approx 3{,}01 \times 10^{35}\ \mathrm{m^{-3}}$$

Krok 2: Degenerační tlak (nerelativistický):

$$P_{\mathrm{deg}} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2}{5 m_e} n_e^{5/3}$$

Předfaktor:

$$\frac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2}{5 m_e} = \frac{(29{,}609)^{2/3} \times (1{,}055 \times 10^{-34})^2}{5 \times (9{,}109 \times 10^{-31})} = \frac{9{,}567 \times 1{,}113 \times 10^{-68}}{4{,}555 \times 10^{-30}} \approx 2{,}337 \times 10^{-38}\ \mathrm{J \cdot m^2}$$

$$n_e^{5/3} = (3{,}01 \times 10^{35})^{5/3} = (3{,}01)^{5/3} \times 10^{58{,}333} \approx 6{,}27 \times 2{,}15 \times 10^{58} \approx 1{,}35 \times 10^{59}\ \mathrm{m^{-5}}$$

$$P_{\mathrm{deg}} = (2{,}337 \times 10^{-38}) \times (1{,}35 \times 10^{59}) \approx 3{,}15 \times 10^{21}\ \mathrm{Pa}$$

Krok 3: Klasický tlak ideálního plynu při $T = 10^{7}\ \mathrm{K}$:

$$P_{\mathrm{thermal}} = n_e k_B T = (3{,}01 \times 10^{35}) \times (1{,}381 \times 10^{-23}) \times 10^{7} \approx 4{,}16 \times 10^{19}\ \mathrm{Pa}$$

Poměr tlaků:

$$\frac{P_{\mathrm{deg}}}{P_{\mathrm{thermal}}} = \frac{3{,}15 \times 10^{21}}{4{,}16 \times 10^{19}} \approx 76$$

Závěr: Kvantový degenerační tlak je téměř 80–krát vyšší než klasický tepelný tlak. Chování hmoty bílého trpaslíka je plně ovládáno kvantovou mechanikou.

Úloha 13: Coulombovské korekce k Chandrasekharově mezi

Zadání: Elektrostatická přitažlivost mezi elektrony a kladnými ionty v krystalické mřížce bílého trpaslíka snižuje celkový tlak plynu o záporný Coulombovský příspěvek $P_{\mathrm{Coulomb}} = -\frac{3}{10}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{4/3} / (4\pi\varepsilon_0)$. Vysvětlete, jak tato korekce ovlivňuje výslednou Chandrasekharovu mez pro jádro z uhlíku $^{12}\mathrm{C}$ ($Z=6$) a jádro ze železa $^{56}\mathrm{Fe}$ ($Z=26$). **Řešení:** Celkový tlak v ultrarelativistické limitě je:

$$P = P_{\mathrm{deg}} + P_{\mathrm{Coulomb}} = \left[K_2' - K_{\mathrm{Coulomb}} Z^{2/3}\right] \rho^{4/3}$$

Jelikož Coulombovský člen snižuje efektivní konstantu polytropy K, snižuje se podle vzorce $M_{\mathrm{Ch}} \propto K^{3/2}$ i celková maximální hmotnost:

$$\frac{\Delta M_{\mathrm{Ch}}}{M_{\mathrm{Ch}}} \approx -\frac{3}{2}\frac{K_{\mathrm{Coulomb}}}{K_2'} Z^{2/3} \approx -0{,}022\, Z^{2/3}$$

- Pro uhlík ($Z=6$): $Z^{2/3} = 6^{2/3} \approx 3{,}30 \implies \Delta M/M \approx -0{,}022 \times 3{,}30 \approx -7{,}3\,\%$. Chandrasekharova mez klesá z $1{,}46\,M_\odot$ na cca $1{,}35\,M_\odot$.
- Pro železo ($Z=26$): $Z^{2/3} = 26^{2/3} \approx 8{,}77 \implies \Delta M/M \approx -0{,}022 \times 8{,}77 \approx -19{,}3\,\%$. Pro železné jádro klesá mez až k $1{,}15 - 1{,}20\,M_\odot$. **Závěr:** Elektrostatické interakce snižují mezní stabilitu jader; železná jádra kolabují při znatelně nižší hmotnosti než jádra uhlíková.

Úloha 14: Poloměr neutronové hvězdy z brzdění pulsaru

Zadání: Pulsar má naměřenou periodu $P = 0{,}050\,\mathrm{s}$, její derivaci $\dot{P} = 10^{-14}\,\mathrm{s/s}$ a zářivý výkon magnetického dipólu je $\dot{E} = 3{,}16 \times 10^{28}\,\mathrm{W}$. Určete moment setrvačnosti pulsaru I a za předpokladu homogenní koule s hmotností $M = 1{,}4\,M_\odot$ odhadněte poloměr neutronové hvězdy R. **Řešení:** *Krok 1:* Z rotačního ztrátového výkonu:

$$\dot{E} = 4\pi^2 I \frac{\dot{P}}{P^3} \implies I = \frac{\dot{E} P^3}{4\pi^2 \dot{P}}$$

Dosadíme hodnoty:

$$I = \frac{(3{,}16 \times 10^{28}) \times (0{,}050)^3}{4\pi^2 \times 10^{-14}} = \frac{(3{,}16 \times 10^{28}) \times (1{,}25 \times 10^{-4})}{3{,}948 \times 10^{-13}} = \frac{3{,}95 \times 10^{24}}{3{,}948 \times 10^{-13}} \approx 1{,}00 \times 10^{38}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$$

Krok 2: Pro přibližný moment setrvačnosti neutronové hvězdy platí $I \approx \frac{2}{5} M R^2$ (pro realistické modely spíše $\approx 0{,}35 M R^2$):

$$R = \sqrt{\frac{5I}{2M}} = \sqrt{\frac{5 \times 10^{38}}{2 \times (1{,}4 \times 1{,}989 \times 10^{30})}} = \sqrt{\frac{5 \times 10^{38}}{5{,}569 \times 10^{30}}} = \sqrt{8{,}978 \times 10^{7}} \approx 9\,475\,\mathrm{m} \approx 9{,}5\,\mathrm{km}$$

Závěr: Z naměřeného brzdění pulsaru vychází poloměr neutronové hvězdy přibližně $10 - 12\,\mathrm{km}$, což je v dokonalé shodě s moderními rentgenovými měřeními přístrojem NICER na ISS.

Úloha 15: Gravitační vlny: ISCO a cvrlikavá hmotnost systému GW150914

Zadání: První detekovaný gravitační signál GW150914 vznikl splynutím dvou černých děr o hmotnostech $m_1 = 36\,M_\odot$ a $m_2 = 29\,M_\odot$.

1. Vypočítejte cvrlikavou hmotnost (chirp mass) systému $\mathcal{M}_c$ ve slunečních hmotnostech.
2. Odhadněte gravitační vlnovou frekvenci f_{GW} v okamžiku, kdy černá díra o celkové hmotnosti $M_{\mathrm{tot}} = 65\,M_\odot$ dosáhne mezní kruhové dráhy ISCO ($r_{\mathrm{ISCO}} = 6GM_{\mathrm{tot}}/c^2$).

Řešení: *Krok 1:* Výpočet cvrlikavé hmotnosti:

$$\mathcal{M}_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} = \frac{(36 \times 29)^{3/5}}{(36 + 29)^{1/5}} = \frac{(1\,044)^{0{,}6}}{(65)^{0{,}2}} \approx \frac{64{,}56}{2{,}301} \approx 28{,}05\,M_\odot$$

Krok 2: Keplerovská orbitální úhlová frekvence na dráze ISCO:

$$\Omega_{\mathrm{orb}} = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{tot}}}{r_{\mathrm{ISCO}}^3}} = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{tot}}}{\left(\frac{6GM_{\mathrm{tot}}}{c^2}\right)^3}} = \frac{c^3}{GM_{\mathrm{tot}}6^{3/2}} = \frac{c^3}{6\sqrt{6}\,GM_{\mathrm{tot}}}$$

Jelikož gravitační vlny jsou vyzařovány kvadrupólově, jejich frekvence je dvojnásobkem orbitální frekvence ($f_{\mathrm{GW}} = 2f_{\mathrm{orb}} = \frac{\Omega_{\mathrm{orb}}}{\pi}$):

$$f_{\mathrm{GW,\,ISCO}} = \frac{c^3}{6\sqrt{6}\pi GM_{\mathrm{tot}}}$$

Předfaktor:

$$\frac{c^3}{6\sqrt{6}\pi G} = \frac{(2{,}998\times10^{8})^3}{14{,}697\times\pi\times(6{,}674\times10^{-11})} = \frac{2{,}694\times10^{25}}{3{,}081\times10^{-9}} \approx 8{,}745\times10^{33}\,\mathrm{kg/s}$$

Pro $M_{\mathrm{tot}} = 65\,M_{\odot} = 65\times(1{,}989\times10^{30}\,\mathrm{kg}) \approx 1{,}293\times10^{32}\,\mathrm{kg}$:

$$f_{\mathrm{GW,\,ISCO}} = \frac{8{,}745\times10^{33}}{1{,}293\times10^{32}} \approx 67{,}6\,\mathrm{Hz}$$

(Reálný pík signálu byl posunut až k $\approx 150-250\,\mathrm{Hz}$ vlivem rotace nově vzniklé černé díry a fáze splývání ringdown). **Závěr:** Frekvence gravitačních vln leží přímo v citlivém akustickém pásmu pozemních interferometrů LIGO a Virgo (desítky až stovky hertzů).

Dodatek D: Encyklopedický glosář astrofyziky hvězd

ZAJÍMAVOST

Struktura glosáře Glosář obsahuje definice klíčových pojmů z teoretické, pozorovací i výpočetní stelární astrofyziky. Každé heslo uvádí standardní český název, anglický ekvivalent v závorce, přesné fyzikální vymezení a fundamentální matematický vztah.

A

- **Akreční disk (Accretion Disk):** Struktura rotujícího plynu a prachu obíhající centrální gravitující těleso (protohvězdu, bílého trpaslíka, neutronovou hvězdu či černou díru). Tření mezi sousedními vrstvami způsobuje přenos momentu hybnosti ven a radiální drift hmoty směrem dovnitř s mohutným uvolňováním gravitační potenciální energie.
- **Asteroseismologie (Asteroseismology):** Vědní disciplína zkoumající vnitřní stavbu a rotaci hvězd prostřednictvím analýzy jejich povrchových oscilací (akustických p-módů a gravitačních g-módů).
- **Astrofyzikální S-faktor (Astrophysical S-factor):** Část účinného průřezu termonukleární reakce očištěná o čistě geometrický faktor $1/E$ a kvantově-mechanickou tunelovou pravděpodobnost přes Coulombovskou bariéru: $\sigma(E) = \frac{S(E)}{E}\exp(-\sqrt{E_G/E})$.

B

- **Bílý trpaslík (White Dwarf):** Kompaktní hvězdný relikt o hmotnosti srovnatelné se Sluncem a rozměrech planety Země, v němž je gravitace vyrovnávána kvantovým tlakem degenerovaných elektronů. Maximální možná hmotnost je dána Chandrasekharovou mezí ($M_{\mathrm{Ch}} \approx 1{,}44\,M_\odot$).
- **Boltzmannova rovnice (Boltzmann Equation):** Vztah kvantové statistiky udávající poměrné zastoupení atomů či iontů v různých excitačních energetických hladinách za termodynamické rovnováhy: $n_j/n_i = (g_j/g_i)\exp[-(E_j - E_i)/(k_B T)]$.

C

- **Cefeida (Cepheid Variable):** Pulzující žlutý veleobr spektrální třídy F až K nacházející se v pásu nestability HR diagramu. Vykazuje striktní relaci mezi periodou pulzací a absolutní zářivostí (Leavittové zákon), což z ní činí primární kosmickou standardní svíčku pro měření mezigalaktických vzdáleností.
- **CNO cyklus (Carbon-Nitrogen-Oxygen Cycle):** Katalytický termonukleární fúzní cyklus, v němž jádra uhlíku, dusíku a kyslíku katalyzují syntézu čtyř protonů na jádro helia $^4\mathrm{He}$. Dominuje ve hvězdách s hmotností $M \gtrsim 1{,}3\,M_\odot$ s extrémní teplotní strmostí $\epsilon_{\mathrm{CNO}} \propto T^{16-20}$.

Č

- **Černá díra (Black Hole):** Prostoročasová singularita obklopená jednosměrným horizontem událostí, z něhož nemůže uniknout žádná hmota ani elektromagnetické záření. Stelární černé díry vznikají gravitačním kolapsem jader masivních hvězd ($M_{\mathrm{ZAMS}} > 25\,M_\odot$).
- **Červený obr / veleobr (Red Giant / Supergiant):** Pozdní vývojové stádium hvězdy s vyhořelým jádrem, v němž fúze probíhá ve slupkách kolem jádra a vnější obálka enormně expanduje a ochlazuje se na $T_{\mathrm{eff}} \sim 2\,500 - 3\,500\,\mathrm{K}$.

D

- **Degenerovaný plyn (Degenerate Gas):** Stav látky při extrémních hustotách, kdy jsou všechny nízkoenergetické kvantové stavy zaplněny a Pauliho vylučovací princip zabraňuje dalšímu stlačování. Tlak degenerovaného plynu závisí výhradně na hustotě a nikoliv na teplotě ($P \propto \rho^{5/3}$ pro nerelativistické fermiony, $P \propto \rho^{4/3}$ pro ultrarelativistické fermiony).
- **Dopplerovo rozšíření (Doppler Broadening):** Rozšíření spektrálních čar vyvolané náhodným tepelným pohybem atomů ve fotosféře: $\Delta\lambda_D = \frac{\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2k_B T}{m} + v_{\mathrm{turb}}^2}$.

E

- **Eddingtonova mez (Eddington Luminosity):** Maximální teoretická zářivost hvězdy v hydrostatické rovnováze, při níž radiační tlak působící na elektrony prostřednictvím Thomsonova rozptylu přesně vyrovná gravitační přitažlivost: $L_{\mathrm{Edd}} = \frac{4\pi G M c}{\kappa_{\mathrm{es}}}$.
- **Eddingtonova–Barbierova aproximace (Eddington–Barbier Approximation):** Analytický vztah pro emergentní monochromatickou intenzitu vystupující z atmosféry: $I_\nu(0,\mu) \approx S_\nu(\tau_\nu = \mu = \cos\theta)$.
- **Ekvivalentní šířka čáry (Equivalent Width, W_λ):** Integrální měřítko celkové absorpce ve spektrální čáře vyjádřené jako šířka obdélníkového profilu o nulové reziduální intenzitě: $W_\lambda = \int (1 - F_\lambda / F_c) d\lambda$.
- **Ergosféra (Ergosphere):** Prostor kolem rotující (Kerrovy) černé díry ohraničený zvenčí statickou mezí a zevnitř horizontem událostí, v němž je veškerá hmota i záření nucena rotovat v důsledku strhávání časoprostoru (Lense-Thirringův jev).

F

- **Fermiho energie (E_F – Fermi Energy):** Maximální kinetická energie obsazeného stavu v degenerovaném fermionovém plynu při nulové termodynamické teplotě: $E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}$.
- **Fotodisociace (Photodisintegration):** Endotermický rozpad těžkých atomových jader způsobený srážkami s vysoce energetickými fotony gama záření při teplotách $T > 5 \times 10^9\,\mathrm{K}$ v kolabujícím jádře supernovy.
- **Fotonová sféra (Photon Sphere):** Radiální vzdálenost od středu Schwarzschildovy černé díry $r_{\mathrm{ph}} = 3GM/c^2 = 1{,}5\,R_s$, na níž se fotony mohou pohybovat po nestabilních kruhových drahách.

G

- **Gamowovo okno (Gamow Window):** Úzký energetický interval, v němž dochází k maximu termonukleárních reakcí v plazmatu; vzniká jako konvoluce klesajícího Maxwellova-Boltzmannova termálního rozdělení a rostoucí kvantové pravděpodobnosti tunelování přes Coulombovskou bariéru.
- **Gravitační červený posuv (Gravitational Redshift):** Relativistické snížení frekvence fotonu stoupajícího z hlubokého gravitačního potenciálového pole kompaktního objektu: $1 + z_g = (1 - 2GM/Rc^2)^{-1/2}$.

H

- **Hayashiho stopa (Hayashi Track):** Téměř vertikální vývojová dráha mladých, plně konvektivních protohvězd v HR diagramu, probíhající při téměř konstantní efektivní teplotě podél Hayashiho meze stability.
- **Henyeyova stopa (Henyey Track):** Téměř horizontální vývojová dráha protohvězd o hmotnosti $M \gtrsim 0{,}5\,M_\odot$ v HR diagramu, nastávající po vytvoření stabilního radiativního jádra, charakterizovaná růstem efektivní teploty při téměř konstantní luminozitě.
- **Horizont událostí (Event Horizon):** Vnější kauzální hranice černé díry, zpoza níž se žádná informace ani částice nemůže vrátit do vnějšího vesmíru. Pro statickou černou díru má poloměr $R_s = 2GM/c^2$.
- **Hydrostatická rovnováha (Hydrostatic Equilibrium):** Mechanický stav kontinua, v němž je gravitační síla v každém bodě přesně kompenzována gradientem vnitřního tlaku: $dP/dr = -GM(r)\rho(r)/r^2$.

CH

- **Chandrasekharova mez (Chandrasekhar Limit):** Maximální možná hmotnost stabilního bílého trpaslíka podepřeného tlakem ultrarelativistického degenerovaného elektronového plynu: $M_{\mathrm{Ch}} \approx 1{,}44\,M_\odot$.

I

- **ISCO (Innermost Stable Circular Orbit):** Nejvnitřnější stabilní kruhová dráha hmotné testovací částice v obecné teorii relativity. Pro Schwarzschildovu nerotující černou díru leží v poloměru $r_{\mathrm{ISCO}} = 6GM/c^2 = 3R_s$.

J

- **Jeansovo kritérium (Jeans Criterion):** Fyzikální podmínka gravitační nestability plynného mračna; kolaps nastává, pokud prostorový rozměr perturbace překročí Jeansovu vlnovou délku $\lambda_J = c_s\sqrt{\pi/(G\rho)}$ nebo pokud hmotnost mračna překročí Jeansovu hmotnost M_J.

K

- **Kramersova opacita (Kramers' Opacity):** Aproximace absorpčního koeficientu pro vázaně-volné a volně-volné atomární přechody v plazmatu: $\kappa \propto \rho T^{-7/2}$.

- **Křivka růstu (Curve of Growth):** Závislost ekvivalentní šířky absorpční čáry na počtu absorbujících atomů a oscilátorové síle (W_λ vs Nf), vykazující tři typické režimy: lineární, plochý (nasycený) a kvadratický (tlumící).

L

- **Lane–Emdenova rovnice (Lane–Emden Equation):** Bezrozměrná diferenciální rovnice 2. řádu popisující strukturu polytropní plynné koule: $\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)+\theta^n=0$.
- **Leavittové zákon (Leavitt Law):** Empirický i teoretický vztah mezi logaritmem pulzační periody a absolutní svítivostí klasických cefeid: $\langle M_V\rangle \approx -2{,}76\log_{10}(P/\mathrm{dny})-1{,}40$.
- **Ledouxovo kritérium (Ledoux Criterion):** Zobecněná podmínka konvektivní nestability zohledňující gradient střední molekulové hmotnosti (chemickou stratifikaci): $\nabla_{\mathrm{rad}} > \nabla_{\mathrm{ad}} + \frac{\phi}{\delta}\nabla_\mu$.

M

- **Magnetar (Magnetar):** Mladá neutronová hvězda s extrémně silným magnetickým polem ($B\sim 10^{10}-10^{11}\,\mathrm{T}$), jehož disipace napájí prudké záblesky měkkého gama záření.
- **Mestelova teorie chladnutí (Mestel's Cooling Theory):** Klasický fyzikální model chladnutí bílých trpaslíků, podle něhož je zásoba tepla uložena v nedegenerovaných atomových jádrech a svítivost klesá v čase jako $L\propto t^{-7/5}$.
- **MESA (Modules for Experiments in Stellar Astrophysics):** Přední open-source 1D numerický simulační kód pro modelování vnitřní stavby a časové evoluce hvězd.

N

- **Neutronová hvězda (Neutron Star):** Extrémně kompaktní relikt vzniklý gravitačním kolapsem jádra masivní hvězdy, podepřený degenerací neutronů a odpudivou silnou jadernou silou, s hmotností $1{,}2-2{,}2\,M_\odot$ a poloměrem pouhých $10-13\,\mathrm{km}$.
- **Neutronizace (Neutronization):** Proces elektronového záchytu protony ($p+e^-\to n+\nu_e$) za extrémních tlaků v kolabujícím jádře supernovy.

O

- **Okrajové ztemnění (Limb Darkening):** Optický jev, při němž se střed hvězdného disku jeví jasnější než jeho okraj, protože paprsky vycházející z okraje pod šikmým úhlem k normále ($\mu\to 0$) pocházejí z vyšších a chladnějších fotosférických vrstev.
- **Opacita (Opacity, κ):** Míra neprůhlednosti látky pro elektromagnetické záření, vyjádřená jako účinný průřez extinkce na jednotku hmotnosti ($\mathrm{m^2/kg}$).

P

- **Pauliho vylučovací princip (Pauli Exclusion Principle):** Kvantový postulát, podle něhož se v jednom kvantovém stavu nemohou současně nacházet dva identické fermiony se stejnými kvantovými čísly.
- **Pás nestability (Instability Strip):** Úzká, téměř vertikální oblast v Hertzsprungově–Russellově diagramu, v níž se nacházejí pulzující proměnné hvězdy (cefeidy, RR Lyrae, δ Scuti) buzené κ-mechanismem v ionizačních zónách helia.
- **Penroseův proces (Penrose Process):** Mechanismus těžby rotační energie z ergosféry Kerrovy černé díry rozpadem částice na složku se zápornou energií, která padá do horizontu, a složku s kladnou energií, která uniká do nekonečna.
- **Polytropa (Polytrope):** Ideální model plynného tělesa, v němž je tlak svázán s hustotou jednoduchým mocninným vztahem: $P=K\rho^{1+1/n}$.
- **Protohvězda (Protostar):** Raná stádium vznikající hvězdy, která se nachází v procesu gravitační kontrakce a akrece hmoty z okolního cirkumstelárního disku před zapálením stabilní fúze vodíku v jádře.
- **Pulsar (Pulsar):** Rychle rotující silně magnetizovaná neutronová hvězda vyzařující úzké kužely elektromagnetického záření podél magnetických pólů.

R

- **Radiační difúze (Radiative Diffusion):** Přenos energie zářením v opticky tlustém prostředí, při němž se fotony pohybují procesem mnohonásobné náhodné procházky (random walk).
- **Rosselandova střední opacita (Rosseland Mean Opacity):** Harmonický průměr monochromatické opacity vážený teplotní derivací Planckovy funkce, určující celkový radiační tok: $\frac{1}{\kappa_R}\equiv\int\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu\big/\int\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu$.

- **RR Lyrae:** Třída starých pulzujících hvězd populace II na horizontální větvi kulových hvězdokup s periodami pod 1 den a téměř konstantní absolutní magnitudou $M_V \approx +0{,}6\,\mathrm{mag}$.

S

- **Sahova ionizační rovnice (Saha Ionization Equation):** Vztah statistické fyziky vyjadřující rovnovážný poměr mezi sousedními ionizačními stupni plynu v závislosti na teplotě a elektronovém tlaku.
- **Schwarzschildovo kritérium stability (Schwarzschild Criterion):** Podmínka dynamické stability hvězdné vrstvy proti vzniku konvekce: $\nabla_{\mathrm{rad}} \leq \nabla_{\mathrm{ad}}$.
- **Schwarzschildův poloměr (Schwarzschild Radius):** Poloměr horizontu událostí nerotující sférické černé díry: $R_s = 2GM/c^2$.
- **Spaghettifikace (Spaghettification):** Extrémní vertikální natažení a horizontální stlačení tělesa padajícího do silného nehomogenního gravitačního pole černé díry v důsledku radiálních slapových sil.
- **Supernova s kolapsem jádra (Core-Collapse Supernova, CCSN):** Katastrofický zánik masivní hvězdy způsobený gravitačním kolapsem jejího železného jádra za vzniku neutronové hvězdy nebo černé díry.
- **Supernova typu Ia (Type Ia Supernova):** Termonukleární exploze uhlíko-kyslíkového bílého trpaslíka v těsné dvojhvězdě vyvolaná překročením Chandrasekharovy meze akrecí nebo splynutím dvou bílých trpaslíků.

T

- **Teorie směšovací délky (Mixing Length Theory, MLT):** Fenomenologický model turbulentní konvekce ve hvězdách předpokládající, že konvektivní elementy urazí před rozpadem charakteristickou dráhu $\ell = \alpha_{\mathrm{MLT}} H_P$.
- **TOV rovnice (Tolman–Oppenheimer–Volkoff Equation):** Relativistická rovnice hydrostatické rovnováhy odvozená z Einsteinových rovnic pro vnitřek statického kompaktního objektu.

V

- **Viriálový teorém (Virial Theorem):** Fundamentální relace spojující časově středovanou kinetickou (tepelnou) energii U a gravitační potenciální energii Ω samo-gravitujícího systému ideálního plynu: $2U + \Omega = 0$.
- **Voigtův profil (Voigt Profile):** Profil spektrální čáry vznikající konvolucí gaussovského Dopplerova rozšíření a lorentzovského přirozeného/tlakového tlumení.

W

- **Wolfova–Rayetova hvězda (Wolf–Rayet Star):** Pozdní stádium velmi hmotné hvězdy, která silným větrem ztratila celou vodíkovou obálku a obnažila své horké jádro se širokými emisními čarami helia, dusíku (WN), uhlíku (WC) nebo kyslíku (WO).

Z

- **ZAMS (Zero-Age Main Sequence):** Nultý věk hlavní posloupnosti; okamžik, kdy mladá hvězda ukončí gravitační kontrakci a zapálí stabilní vodíkovou fúzi v jádře, čímž dosáhne kompletní tepelné i mechanické rovnováhy.