

Astronomická spektroskopie

Od laboratorního spektrografu k chemickému složení hvězd

AUTOR

David Pěkník

OBSAH KNIHY

•	Úvod a předmluva: Světlo jako posel z hlubin vesmíru	4
---	--	---

ČÁST I: TEORIE A OPTIKA SPEKTROGRAFŮ

Kapitola 1	Difrakční mřížky a mřížková rovnice	8
1.1	Fyzika difrakce na periodických strukturách a Fraunhoferův integrál	8
1.2	Mřížková rovnice v reflexi i transmisi	8
1.3	Blaze úhel a Littrowova autokolimační konfigurace	9
1.4	Úhlová, lineární a reciproká disperze	10
1.5	Rozlišovací schopnost a Rayleighovo kritérium	10
1.6	Moderní objemové fázové holografické mřížky (VPHG)	11
Kapitola 2	Klasické šterbinové a bezšterbinové spektrografy	14
2.1	Optické schéma klasického šterbinového spektrografu	14
2.2	Zobrazovací rovnice a anamorfní faktor	14
2.3	Šířka šterbiny a kompromis mezi seeingem a rozlišením	15
2.4	Ztráty na šterbině (Slit Losses) a prostorové seeingové profily	15
2.5	Bezšterbinová spektroskopie: objektivový hranol a grismy	16
Kapitola 3	Echelle spektrografie s křížovou disperzí	19
3.1	Geometrie echelle mřížky: R2 a R4 strmé mřížky	19
3.2	Volný spektrální interval (Free Spectral Range, FSR)	20
3.3	Křížová disperze: hranoly vs. nízkodisperzní mřížky	20
3.4	Špičkové astronomické echelle spektrografy (HARPS, ESPRESSO)	21
3.5	Požadavky na vakuovou a teplotní sub-mK stabilitu	21

ČÁST II: REDUKCE A KALIBRACE SPEKTRÁLNÍCH DAT

Kapitola 4	Extrakce spekter z CCD a flat-fielding	25
4.1	Digitální redukční řetězec: od surového 2D FITS k 1D spektru	25
4.2	Kalibrační snímky: Bias a temný proud	25
4.3	Flat-fielding a blaze normalizace	26
4.4	Trasování spektrální stopy (Aperture Tracing)	26
4.5	Horneův algoritmus optimální vážené extrakce	27
Kapitola 5	Kalibrace vlnových délek a spektrofotometrie	31
5.1	Výbojky s dutou katodou (ThAr a U-Ne)	31
5.2	Kalibrátory nové generace: Etalony a frekvenční hřebeny	31
5.3	Matematika fitování disperzní funkce ortogonálními polynomy	32
5.4	Barycentrická korekce orbitální rychlosti pozorovatele	32
5.5	Spektrofotometrická kalibrace toku a citlivostní funkce	33
5.6	Atmosférická extinkce a Bouguerův zákon	33
Kapitola 6	Korekce telurických atmosférických absorpcí	35
6.1	Hlavní atmosférické absorbéry a jejich spektrální pásy	35
6.2	Proměnlivost atmosféry: Precipitable Water Vapor (PWV)	35
6.3	Empirická metoda telurických standardních hvězd	36
6.4	Fyzikální modelování přenosu záření v atmosféře (Molecfit)	36
6.5	Konvoluce transmisní funkce s instrumentálním profilem	37

OBSAH KNIHY (POKRAČOVÁNÍ)

ČÁST III: FYZIKÁLNÍ INTERPRETACE SPEKTER

Kapitola 7	Spektrální klasifikace Morgan-Keenan	41
7.1	Od harvardské posloupnosti k systému Morgan-Keenan	41
7.2	Fyzikální podstata spektrálních tříd: O, B, A, F, G, K, M, L, T, Y	41
7.3	Třídy svítivosti a tlakové Starkovo rozšíření čar	42
7.4	Boltzmannova a Sahaova rovnice: vrchol Balmerovy série	44
7.5	Spektra neobvyklých hvězd: Wolf-Rayetovy a uhlíkové hvězdy	45
Kapitola 8	Měření ekvivalentních šířek a chemických abundancí	48
8.1	Definice a geometrický význam ekvivalentní šířky	48
8.2	Fyzikální mechanismy rozšíření spektrálních čar a Voigtův profil	49
8.3	Křivka růstu (Curve of Growth): lineární, plochá a tlumící větve	50
8.4	Modelování hvězdných atmosfér a LTE vs. non-LTE efekty	51
8.5	Notace chemických abundancí a nukleosyntetické procesy	51
Kapitola 9	Dopplerova tomografie a radiální rychlosti	54
9.1	Dopplerův jev a precizní měření rychlostí	54
9.2	Metoda křížové korelace (CCF) podle Tonryho a Davise	54
9.3	Asymetrie čar a bisektor: odlišení hvězdné aktivity od exoplanet	55
9.4	Detekce extrasolárních planet a Keplerovské radiální křivky	56
9.5	Dopplerova tomografie rotujících hvězd a Zeeman-Doppler Imaging	57
9.6	Dopplerova tomografie akrečních disků v těsných dvojhvězdách	57

ČÁST IV: SPEKTROSKOPIE ROZLEHLÝCH OBJEKTŮ

Kapitola 10	Vláknová spektroskopie a multiobjektové systémy	62
10.1	Fyzika optických vláken pro astronomii	62
10.2	Degradace světelnosti (FRD) a scramblery	63
10.3	Multiobjektová spektroskopie: štěrbinové masky vs. robotická vlákna	64
10.4	Masivní spektroskopické přehledky vesmíru (SDSS, DESI, 4MOST)	64
10.5	Klíčové metodické výzvy vláknové spektroskopie	65
Kapitola 11	Integrální pole IFU a 3D spektroskopie galaxií	68
11.1	Koncept 3D datové krychle (x, y, λ) a spaxelu	68
11.2	Tři hlavní optické koncepce IFU: mikročočky, vlákna a kráječe	68
11.3	Špičkové IFU spektrografy: MUSE na VLT a NIRSpec na JWST	69
11.4	Kinematické mapování galaxií a adaptivní Voronoiho binnace	70
11.5	Emisní diagnostické diagramy BPT (AGN vs. hvězdotvorba)	70

ČÁST V: PŘÍLOHY

Dodatek A	Odvození rozlišovací schopnosti difrakční mřížky	75
A.1	Vlnová interference na soustavě N štěrbin	75
A.2	Hlavní maxima a mřížková rovnice	75
A.3	Poloha prvních sousedních minim	76
A.4	Rayleighovo kritérium a odvození $R = mN$	76
A.5	Geometrická interpretace přes maximální dráhový rozdíl	77
A.6	Difrakční vs. seeingový limit ve spektrografu	77
Dodatek B	Redukce a analýza spekter v Pythonu	78
B.1	Datový objekt Spectrum1D v balíčku Specutils	78
B.2	Kontinuální fitování a normalizace spektra	78
B.3	Měření ekvivalentních šířek a parametrů spektrálních čar	79
B.4	Výpočet barycentrické korekce v PyAstronomy	79
B.5	Křížová korelace spekter v PyAstronomy	80
Dodatek C	Sbírka 15 řešených výpočetních úloh	83
Dodatek D	Encyklopedický glosář astronomické spektroskopie	92

Úvod a předmluva: Světlo jako posel z hlubin vesmíru

V roce 1835 publikoval významný francouzský pozitivistický filosof Auguste Comte ve svém monumentálním díle *Cours de philosophie positive* kategorické prohlášení týkající se limitů lidského poznání:

📌 ZAJÍMAVOST

„Rozumíme možností přesného určení tvarů, vzdáleností, velikostí a pohybů nebeských těles; avšak nikdy a žádným způsobem nebudeme schopni zkoumat jejich chemické složení či jejich mineralogickou strukturu... Naše vědomosti o hvězdách jsou nutně omezeny výhradně na jevy geometrické a mechanické.“

Dějiny vědy málokdy nabídly tak rychlé a drtivé vyvrácení filosofického dogmatu. O pouhé čtvrtstoletí později, v roce 1859, položili fyzik Gustav Kirchhoff a chemik Robert Bunsen v Heidelbergu základy spektrální analýzy. Dokázali, že každý chemický prvek má nezaměnitelný soubor spektrálních čar — jakýsi optický otisk prstu či čárový kód —, a identifikovali sodík, železo, vápník a další pozemské prvky v záření našeho Slunce. Astronomie tímto okamžikem prošla nehlubší metamorfózou ve své historii: z pouhé polohové astrometrie a kinematické nebeské mechaniky se stala plnohodnotná **astrofyzika**.

Od Fraunhoferových čar ke kvantové elektrodynamice

Již v roce 1802 zaznamenal William Hyde Wollaston temné předěly ve spojitém spektru slunečního světla rozloženého skleněným hranolem. Teprve Joseph von Fraunhofer však v roce 1814 proměnil kvalitativní postřeh v exaktní laboratorní měření. Sestrojením prvního moderního spektroskopu s dalekohledem a štěrbínou zmapoval 574 temných absorpčních čar, označil ty nejvýraznější písmeny A až K (konvence dodnes užívaná v astrofyzice) a změřil jejich vlnové délky s bezprecedentní přesností.

Fyzikální podstata těchto čar však zůstávala záhadou až do nástupu kvantové mechaniky ve 20. století. Dnes víme, že spektrum hvězdy je přímým manifestem kvantových přechodů vázaných elektronů v atomech, iontech a molekulách:

$$E_2 - E_1 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

kde h je Planckova konstanta, c je rychlost světla ve vakuu, ν představuje frekvenci fotonu a λ je jeho vlnová délka. Spojité záření vznikající v hlubokých, opticky hustých vrstvách hvězdné fotosféry prochází chladnějšími vnějšími vrstvami plynu. Tyto vnější vrstvy selektivně pohlcují fotony přesně těch energií, jež odpovídají excitačním a ionizačním potenciálům přítomných atomů.

Spektroskopie nám tak umožňuje měřit veličiny, které by se Comtovi zdály zcela nepředstavitelné:

- **Chemické složení hvězd a mezihvězdné hmoty:** Relativní zastoupení prvků od lehkého vodíku a helia až po těžké prvky vznikající záchytem neutronů (procesy r a s).
- **Termodynamické parametry fotosféry:** Efektivní povrchovou teplotu T_{eff} , povrchovou gravitaci $\log g$, hustotu elektronového plynu a stupeň ionizace.
- **Kinematiku a dynamiku těles:** Pomocí Dopplerova jevu měříme radiální rychlosti s přesností na centimetry za sekundu, což umožňuje odhalovat obíhající extrasolární planety o hmotnostech srovnatelných se Zemí.
- **Magnetická pole hvězd:** Měření Zeemanova a Paschenova-Backova štěpení spektrálních čar mapujeme magnetismus bílých trpaslíků i magneticky aktivních chladných hvězd.
- **Strukturu a rotaci těles:** Prostřednictvím Dopplerovy tomografie rekonstruujeme prostorové mapy hvězdných skvrn a akrečních disků v těsných dvojhvězdách.

ZAJÍMAVOST

Zajímavost z historie: V roce 1868 pozorovali nezávisle na sobě francouzský astronom Jules Janssen a britský vědec Norman Lockyer během zatmění Slunce jasnou žlutou emisní čáru o vlnové délce přibližně $587,49 \text{ nm}$ v chromosféře Slunce. Protože neodpovídala žádnému tehdy známému pozemskému prvku, Lockyer navrhl existenci nového prvku a pojmenoval jej podle řeckého boha slunce Hélios — **helium**. Helium bylo na Zemi izolováno Williamem Ramsayem až o 27 let později (1895). Spektroskopie tak objevila základní prvek vesmíru dříve na hvězdě než v pozemské laboratoři!

Cíle a koncepce této monografie

Tato vysokoškolská monografie a učebnice edice **AstroHub.cz** je koncipována jako komplexní most mezi fyzikální instrumentací, rigorózní matematickou analýzou spektrálních dat a teoretickým modelováním hvězdných atmosfér. Dnešní astrofyzik již nemůže být pouhým teoretikem ignorujícím optická specifika přístroje, ani pouhým pozorovatelem, který bez porozumění spouští automatizované redukční skripty.

Kniha je rozdělena do pěti logicky provázaných částí:

- Část I: Teorie a optika spektrografů** — Seznamuje čtenáře s vlnovou optikou difrakčních mřížek, mřížkovou rovnicí, blaze úhlem, geometrií štěrbinových a bezštěrbinových přístrojů a principem moderní echelle spektrografie s křížovou disperzí, která vládne současným velkým observatořím.
- Část II: Redukce a kalibrace spektrálních dat** — Krok za krokem provádí celý řetězec digitálního zpracování obrazu na detektorech CCD. Do hloubky vysvětluje flat-fielding, blaze normalizaci, Horneův algoritmus optimální extrakce, sub-pixelovou kalibraci vlnových délek pomocí výbojek ThAr a frekvenčních hřebenů i moderní fyzikální postupy odstraňování telurických absorpcí zemské atmosféry.
- Část III: Fyzikální interpretace spekter** — Představuje srdce astrofyzikálního výkladu. Od klasické dvourozměrné spektrální klasifikace Morgan-Keenan přes aplikaci Sahovy a Boltzmannovy rovnice se dostáváme k měření ekvivalentních šířek, teorii křivky růstu a detailnímu určování chemických abundancí v režimu LTE i non-LTE. Závěr části je věnován precizním radiálním rychlostem a Dopplerově tomografii.
- Část IV: Spektroskopie rozlehlých objektů** — Věnuje se technologiím, které transformovaly moderní extragalaktickou astronomii a kosmologii: vláknové multiobjektové spektroskopii (desítky tisíc galaxií zkoumané současně přehlídkami jako SDSS či DESI) a 3D spektroskopii integrálního pole (IFU), jež umožňuje získat kompletní spektrum pro každý prostorový pixel galaxie (např. přístroj MUSE na VLT).
- Část V: Přílohy** — Obsahuje rigorózní matematické odvození rozlišovací schopnosti difrakční mřížky, ucelený programátorský manuál pro analýzu spekter v jazyce Python s balíčky ``specutils`` a ``PyAstronomy``, sbírku 15 detailně řešených výpočetních úloh a encyklopedický česko-anglický glosář.

Požadavky na čtenáře a softwarové zázemí

Text předpokládá základní znalost vysokoškolské matematické analýzy (diferenciální a integrální počet, Fourierova transformace), základů vlnové optiky a klasické termodynamiky. Všechny specializované koncepty — od Fraunhoferovy difrakce po statistickou rovnováhu populací atomových hladin — jsou v textu systematicky odvozeny a vysvětleny z elementárních principů.

Moderní vědecká práce je nerozlučně spjata s výpočetní technikou. Všechny algoritmy, simulace disperze, extrakce spekter a modelování atmosfér jsou demonstrovány v jazyce **Python 3** s využitím standardního vědeckého ekosystému:

- ``numpy`` a ``scipy`` pro maticové operace, konvoluce a nelineární fitování,
- ``astropy`` a ``specutils`` pro standardizovanou manipulaci se spektroskopickými FITS soubory a fyzikálními jednotkami,
- ``matplotlib`` pro tvorbu vědeckých vizualizací publikační kvality.

Vstupme tedy do fascinujícího světa, kde každý proužek světla vypráví ucelený příběh o zrodu, životě a zániku vzdálených světů.

Část I: Teorie a optika spektrografů

Astronomický spektrograf je ve své podstatě optický převodník, který transformuje prostorovou informaci o dopadajícím fotonovém toku na informaci vlnovou. Zatímco lidské oko či fotografická kamera integrují elektromagnetické záření přes široká pásma vlnových délek a vytvářejí dvourozměrný obraz oblohy, spektrograf rozkládá světlo přicházející z vybrané prostorové apertury na jeho elementární monochromatické složky.

Základní fyzikální výzvou astronomické spektroskopie je extrémní fotonová chudoba astronomických zdrojů v kombinaci s nutností rozprostřít dostupný světelný tok do stovek, tisíců či dokonce stovek tisíc spektrálních elementů (tzv. *rozlišených prvků* neboli *reselů*). Návrh spektrografu proto představuje neustálé hledání kompromisu mezi:

1. **Spektrální rozlišovací schopností** $R = \lambda/\Delta\lambda$,
2. **Celkovou propustností fotonů** (throughput) optické soustavy,
3. **Simultánním rozsahem vlnových délek** zachyceným na plochu jediného detektoru,
4. **Mechanickou a teplotní stabilitou** celého přístroje.

Tato úvodní část monografie položí rigorózní optické základy nezbytné pro pochopení konstrukce a limitů spektrografů:

- **V Kapitole 1** prozkoumáme fyziku difrakce na periodických strukturách. Odvodíme obecnou mřížkovou rovnici, definujeme úhlovou a reciprokou lineární disperzi a ukážeme, jak speciální profilování vrypů (blaze úhel) umožňuje soustředit až 80 % difraktovaného světla do konkrétního difrakčního řádu.
- **V Kapitole 2** rozebereme klasický štěrbinový spektrograf. Odvodíme vztahy pro optické zvětšení, anamorfní faktor a ukážeme, proč je šířka vstupní štěrbiny kritickým parametrem určujícím kompromis mezi propustností seeingu a rozlišením. Prozkoumáme také bezštěrbinové spektrografy s grismy využívané na kosmických dalekohledech.
- **V Kapitole 3** se ponoříme do královské disciplíny moderní spektroskopie — **echelle spektrografie**. Ukážeme, jak využití vysokých difrakčních řádů ($m \sim 30 - 150$) v kombinaci s křížovým disperzním prvkem umožňuje zaznamenat celé optické spektrum s ultravysokým rozlišením ($R > 100\,000$) na jediný CCD čip bez jakýchkoliv pohyblivých součástí.

Kapitola 1: Difrakční mřížky a mřížková rovnice

Optický rozklad světla v moderních astronomických spektrografech je téměř výhradně realizován pomocí **difrakčních mřížek**. Ačkoliv historické spektrografy 19. a počátku 20. století spoléhaly na disperzní hranoly využívající vlnovou závislost indexu lomu skla $n(\lambda)$, mřížky nabízejí zásadní přednosti: vyšší úhlovou disperzi, lineárnější závislost rozkladu na vlnové délce, širší spektrální propustnost bez absorpce v ultrafialové a infračervené oblasti a možnost volby geometrie i rozlišovací schopnosti.

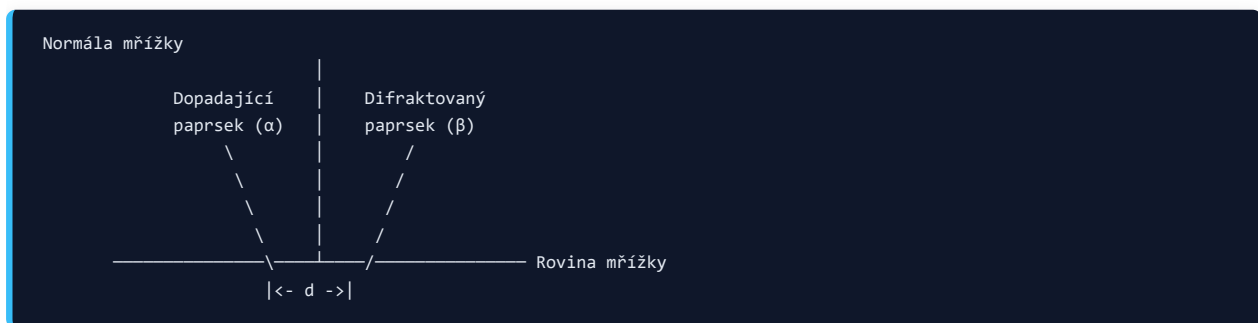
1.1 Fyzika difrakce na periodických strukturách a Fraunhoferův integrál

Uvažujme rovinnou monochromatickou elektromagnetickou vlnu o vlnové délce λ , která dopadá pod úhlem α na periodickou planární strukturu tvořenou N rovnoběžnými ekvidistantními vrypů s mřížkovou periodou (konstantou) d . Podle Huygensova-Fresnelova principu se každý bod vrypu stává zdrojem elementární sekundární kulové vlny. Vlnové pole ve velké vzdálenosti (Fraunhoferova aproximace v ohniskové rovině zobrazovací čočky či zrcadla) je dáno interferencí těchto vln.

Optický dráhový rozdíl Δs mezi vlnami vycházejícími ze dvou sousedních vrypů vzdálených o periodu d je dán geometrickým součtem dráhových rozdílů před a po odrazu (či lomu):

$$\Delta s = d(\sin \alpha + \sin \beta)$$

kde α je úhel dopadu a β je úhel difrakce (odrazu), měřené vůči normále k rovině mřížky. Podle běžné optické konvence mají úhly α a β stejné znaménko, pokud leží na téže straně normály.



Konstruktivní interference nastává tehdy a jen tehdy, když je celkový dráhový rozdíl roven celistvému násobku vlnové délky: $\Delta s = m\lambda$, kde $m \in \mathbb{Z}$ představuje **difrakční řád**.

1.2 Mřížková rovnice

Tento fundamentální vztah nazýváme **mřížkovou rovnicí**:

$$m\lambda = d(\sin \alpha + \sin \beta)$$

Vyjádříme-li periodu mřížky pomocí hustoty vrypů σ (obvykle udávané v počtu vrypů na milimetr, $\sigma = 1/d$), získá rovnice tvar:

$$m\sigma\lambda = \sin \alpha + \sin \beta$$

Z mřížkové rovnice plynou bezprostřední fyzikální důsledky:

- Nultý řád ($m = 0$):** Pro $m = 0$ dostáváme $\sin \beta = -\sin \alpha$, respektive $|\beta| = |\alpha|$. Nultý řád představuje pouhý zrcadlový odraz (u reflexní mřížky) či přímý průchod (u transmisní mřížky) a nevykazuje žádnou disperzi – všechny vlnové délky se odrážejí pod stejným úhlem.

2. **Úhlová disperze v řádech $m \neq 0$:** Pro nenulový řád m závisí úhel difrakce β na vlnové délce λ :

$$\beta(\lambda) = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{d} - \sin\alpha\right)$$

Červené světlo (delší vlnová délka) se difraktuje pod větším úhlem než modré světlo (kratší vlnová délka), což je přesně opačný trend než u disperzního hranolu, kde se nejvíce láme světlo modré.

1.3 Blaze úhel a Littrowova konfigurace

Standardní mřížka s pravoúhlým či symetrickým profilem vrypů koncentruje většinu záření do nultého řádu ($m = 0$), který je z hlediska spektroskopie neužitečný. Pro astronomické účely je proto naprosto zásadní technika tzv. **blazování** (blazing) – naklonění činných plošek vrypů o specifický úhel θ_B , zvaný **blaze úhel** (úhel lesku).

Profil vrypu je zkonstruován jako miniaturní zrcátko skloněné pod úhlem θ_B vůči rovině mřížky. Maximální difrakční účinnost nastává v podmínce, kdy zrcadlový odraz od jednotlivých plošek přesně souhlasí se směrem difrakčního maxima daného řádu.



Geometrický vztah mezi úhly je $\alpha - \theta_B = \theta_B - \beta$, neboli:

$$\alpha + \beta = 2\theta_B$$

V mimořádně významném speciálním případě, kdy se difraktovaný paprsek vrací přesně ve směru dopadajícího paprsku ($\alpha = \beta = \theta_B$), hovoříme o **autokolimační neboli Littrowově konfiguraci**. Mřížková rovnice v Littrowově konfiguraci přechází do elegantního tvaru:

$$m\lambda_B = 2d \sin \theta_B$$

kde λ_B je **blaze vlnová délka** v řádu m . Při této vlnové délce dosahuje účinnost mřížky teoretického maxima (často 70 až 85 % veškerého dopadajícího toku).

1.4 Úhlová, lineární a reciproká disperze

Kvantitativní schopnost spektrografu prostorově oddělit sousední vlnové délky popisujeme třemi disperzními veličinami.

Úhlová disperze

Úhlová disperze udává změnu úhlu difrakce β na jednotku vlnové délky λ . Derivací mřížkové rovnice při fixním úhlu dopadu α obdržíme:

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \beta} = \frac{\sigma m}{\cos \beta}$$

Úhlová disperze roste:

- přímo úměrně difrakčnímu řádu m ,
- nepřímo úměrně periodě mřížky d (roste s hustotou vrypů σ),
- s rostoucím úhlem difrakce β (člen $1/\cos\beta$).

Lineární a reciproká disperze

Umístíme-li do ohniskové roviny kamerového zrcadla či objektivu o ohniskové vzdálenosti f_{cam} plošný detektor (CCD), odpovídá úhlovému rozdílu $d\beta$ prostorová vzdálenost $dx = f_{\text{cam}}d\beta$. **Lineární disperze** je definována jako:

$$\frac{dx}{d\lambda} = f_{\text{cam}} \frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{mf_{\text{cam}}}{d \cos \beta}$$

V praktické astronomické spektroskopii se však nejčastěji používá její převrácená hodnota – **reciproká lineární disperze** D^{-1} (udávaná standardně v jednotkách $\text{\AA}/\text{mm}$ nebo nm/mm):

$$D^{-1} = \frac{d\lambda}{dx} = \frac{d \cos \beta}{mf_{\text{cam}}}$$

Známe-li velikost fyzického pixelu CCD detektoru Δx_{pix} (typicky $9 \mu\text{m}$ až $15 \mu\text{m}$), určíme spektrální vzorkování na pixel (tzv. disperzi na pixel):

$$\Delta\lambda_{\text{pix}} = D^{-1} \cdot \Delta x_{\text{pix}} = \frac{d \cos \beta}{mf_{\text{cam}}} \Delta x_{\text{pix}}$$

Hustota vrypů σ [1/mm]	Perioda d [nm]	Úhlová disperze ($m = 1$, $\beta \approx 0$) [rad/ μm]	Reciproká disperze při $f_{\text{cam}} = 300 \text{ mm}$ [nm/mm]	$\Delta\lambda_{\text{pix}}$ pro pixel 15 μm [$\text{\AA}/\text{pix}$]
300	3333{,}3	0{,}30	11{,}11	1{,}67
600	1666{,}7	0{,}60	5{,}56	0{,}83
1200	833{,}3	1{,}20	2{,}78	0{,}42
1800	555{,}6	1{,}80	1{,}85	0{,}28
2400	416{,}7	2{,}40	1{,}39	0{,}21

1.5 Rozlišovací schopnost a Rayleighovo kritérium

Spektrální rozlišovací schopnost R je bezrozměrná veličina definovaná poměrem vlnové délky λ k nejmenšímu rozlišitelnému rozdílu vlnových délek $\Delta\lambda$:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Podle **Rayleighova kritéria** považujeme dvě stejně intenzivní monochromatické spektrální čáry za právě rozlišené, pokud hlavní difrakční maximum první čáry padne do prvního difrakčního minima čáry druhé. Pro difrakční mřížku s celkovým počtem osvětlených vrypů N má teoretická rozlišovací schopnost fundamentální tvar (jehož detailní odvození přináší Dodatek A):

$$R_{\text{theor}} = mN$$

Protože celková osvětlená šířka mřížky je $W = Nd$, můžeme s využitím mřížkové rovnice přepsat rozlišovací schopnost do tvaru závislého pouze na geometrických rozměrech mřížky:

$$R_{\text{theor}} = \frac{W(\sin \alpha + \sin \beta)}{\lambda}$$

V Littrowově konfiguraci ($\alpha = \beta = \theta_B$) pak dostáváme:

$$R_{\text{theor}} = \frac{2W \sin \theta_B}{\lambda}$$

❗ DŮLEŽITÉ

Fyzikální mez rozlišení: Všimněte si, že teoretická rozlišovací schopnost mřížky nezávisí na hustotě vrypů d , nýbrž výhradně na celkové optické šířce osvětlené plochy mřížky W a na úhlu difrakce θ_B ! Mřížka o šířce 10 cm s 300 vrypů/mm v řádu $m = 4$ dosahuje naprosto stejného teoretického rozlišení jako mřížka téže šířky s 1200 vrypů/mm v řádu $m = 1$.

1.6 Moderní objemové fázové holografické mřížky (VPHG)

Tradiční mřížky vyráběné diamantovým hrotem (mechanicky ryté mřížky) trpí periodickými chybami posuvu šroubu dělicího stroje, což vede ke vzniku falešných spektrálních čar — tzv. **Rowlandových duchů** (Rowland ghosts). Značným pokrokem bylo zavedení fotolitografických holografických mřížek leptaných interferenčním polem laserových svazků.

Špičkou současné technologie jsou **objemové fázové holografické mřížky** (Volume Phase Holographic Gratings, VPHG). U VPHG není difrakční struktura tvořena povrchovým reliéfem, nýbrž periodickou modulací indexu lomu Δn uvnitř tenké vrstvy dichromované želatiny zapouzdřené mezi dvěma optickými skleněnými hranoly.

Výhody VPHG pro astronomii:

1. Špičková difrakční účinnost přesahující 90 % díky Braggově difrakci (analogické difrakci rentgenového záření na krystalové mřížce).
2. Možnost zapouzdření citlivé želatiny mezi antireflexně pokovené substráty, což zajišťuje mechanickou a chemickou odolnost.
3. Snadná integrace do transmisních transmisně-reflexních soustav moderních multiobjektových spektrografů.

1.7 Python simulace difrakční účinnosti a úhlové disperze

Následující vědecký skript v jazyce Python modeluje závislost úhlu difrakce na vlnové délce a vypočítává difrakční účinnost blazované mřížky pomocí skalární difrakční teorie.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def grating_angles(wavelengths_nm, groove_density_lpm, alpha_deg, order=1):
    """
    Vypočítá úhel difrakce beta pro zadané vlnové délky a úhel dopadu.

    Parametry:
    -----
    wavelengths_nm : array_like - vlnové délky v nanometrech
    groove_density_lpm : float - hustota vrypů v 1/mm
    alpha_deg : float - úhel dopadu ve stupních
    order : int - difrakční řád (default = 1)
    """
    d_nm = 1e6 / groove_density_lpm # perioda v nm
    alpha_rad = np.radians(alpha_deg)

    sin_beta = (order * np.array(wavelengths_nm) / d_nm) - np.sin(alpha_rad)

    # Ošetření nefyzikálních hodnot (|sin beta| > 1)
    valid = np.abs(sin_beta) <= 1.0
    beta_deg = np.full_like(sin_beta, np.nan, dtype=float)
    beta_deg[valid] = np.degrees(np.arcsin(sin_beta[valid]))
    return beta_deg

def blaze_efficiency(wavelengths_nm, blaze_wavelength_nm, order=1):
    """
    Aproximace difrakční účinnosti mřížky sinc^2 funkcí kolem blaze vlnové délky.
    """
    lam = np.array(wavelengths_nm, dtype=float)
    u = np.pi * order * (1.0 - blaze_wavelength_nm / lam)
    # sinc(x) = sin(x)/x
    eff = np.where(u == 0, 1.0, (np.sin(u) / u)**2)
    return eff

<h1>Parametry pro demonstraci</h1>
wavelengths = np.linspace(380, 750, 500) # Viditelné spektrum (nm)
sigma = 1200.0 # 1200 vrypů na mm
d_period = 1e6 / sigma # 833.3 nm
theta_blaze = 17.5 # Blaze úhel ve stupních
lambda_blaze = 2 * d_period * np.sin(np.radians(theta_blaze)) # ~ 501 nm

beta_angles = grating_angles(wavelengths, sigma, alpha_deg=theta_blaze, order=1)
efficiency = blaze_efficiency(wavelengths, lambda_blaze, order=1)

print(f"Mřížka: {sigma:.0f} vrypů/mm")
print(f"Blaze vlnová délka (Littrow): {lambda_blaze:.1f} nm")

```

```
print(f"Difrakční úhel na 400 nm: {beta_angles[0]:.2f}°")  
print(f"Difrakční úhel na 700 nm: {beta_angles[np.argmin(np.abs(wavelengths - 700))]:.2f}°")
```

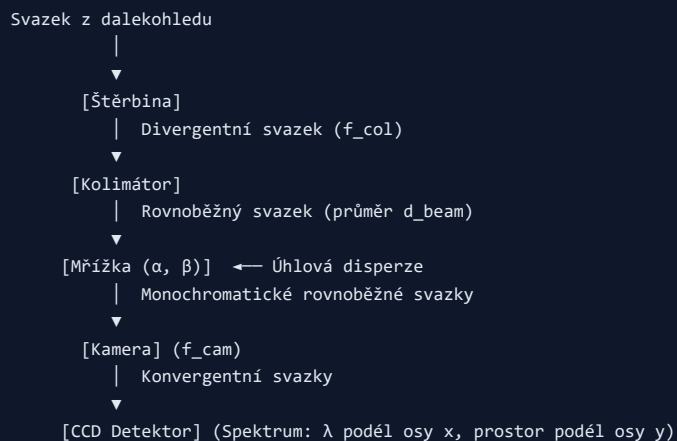
Kapitola 2: Klasické šterbinové a bezšterbinové spektrografy

Zatímco difrakční mřížka představuje fyzikální jádro disperzního rozkladu, její zařazení do kompletního optického přístroje vyžaduje soustavu optických prvků, které transformují konvergující svazek dalekohledu na svazek kolimovaný a následně vytvářejí spektrální obraz na citlivé ploše detektoru. V této kapitole podrobně analyzujeme architekturu klasického **šterbinového spektrografu** (slit spectrograph) a alternativní **bezšterbinovou spektroskopii** (slitless spectroscopy).

2.1 Optické schéma klasického šterbinového spektrografu

Klasický astronomický spektrograf se skládá z pěti základních optomechanických subsystémů:

1. **Vstupní šterbina (slit):** Mechanicky nastavitelná clona umístěná přesně v primární (nebo Cassegrainově či Nasmythově) ohniskové rovině dalekohledu. Šterbina prostorově izoluje světlo zkoumaného objektu a dramaticky redukuje kontaminaci parazitním zářením noční oblohy.
2. **Kolimátor (collimator):** Čočka nebo duté parabolické či mimososé zrcadlo (off-axis parabolic mirror) s ohniskovou vzdáleností f_{col} , jehož ohnisko leží v rovině šterbiny. Převádí divergentní svazek světla ze šterbiny na rovnoběžný (kolimovaný) svazek o průměru d_{beam} .
3. **Disperzní prvek:** Reflexní či transmisní difrakční mřížka (případně hranol) osvětlená rovnoběžným svazkem.
4. **Kamerový objektiv (camera):** Optická soustava o ohniskové vzdálenosti f_{cam} , která zaostřuje difraktované rovnoběžné paprsky různých vlnových délek do své ohniskové roviny.
5. **Detektor:** Kvantový plošný detektor (typicky chlazený křemíkový čip CCD nebo HgCdTe senzor v infračervené oblasti).



2.2 Zobrazovací rovnice a anamorfní faktor

Zkoumejme, jak se geometrická šířka šterbiny s (měřená v mikrometrech v ohniskové rovině dalekohledu) promítne do šířky monochromatického obrazu šterbiny s' na detektoru.

V rovině kolmé k disperzi (prostorový směr podél šterbiny) je optické zvětšení dáno standardním poměrem ohniskových vzdáleností kamery a kolimátoru:

$$M_y = \frac{f_{\text{cam}}}{f_{\text{col}}}$$

V rovině disperze (spektrální směr) však do hry vstupuje fakt, že šířka svazku před mřížkou $d_{\text{in}} = d_{\text{beam}}$ a po difrakci d_{out} není obecně stejná. Z geometrie odrazu plyne, že $d_{\text{in}} = W_{\text{grating}} \cos \alpha$ a $d_{\text{out}} = W_{\text{grating}} \cos \beta$. Poměr šířek svazků definuje tzv. **anamorfní faktor** (anamorphic magnification) r :

$$r = \frac{d_{\text{in}}}{d_{\text{out}}} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

Projekce šířky štěrby na detektor ve směru disperze je pak vyjádřena vztahem:

$$s' = s \cdot \frac{f_{\text{cam}}}{f_{\text{col}}} \cdot r = s \cdot \frac{f_{\text{cam}}}{f_{\text{col}}} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

Je-li úhel difrakce β větší než úhel dopadu α ($\beta > \alpha$), je $\cos \alpha / \cos \beta > 1$ a obraz štěrby se opticky rozšiřuje, což zhoršuje spektrální rozlišení. Naopak při $\beta < \alpha$ je anamorfní faktor menší než jedna a obraz štěrby se opticky zužuje. V Littrowově konfiguraci ($\alpha = \beta$) je anamorfní faktor přesně roven jedné ($r = 1$).

2.3 Šířka štěrby a kompromis mezi seeingem a rozlišením

Úhlová šířka štěrby na obloze θ_s (vyjádřená v úhlových vteřinách) závisí na efektivní ohniskové vzdálenosti primárního dalekohledu F_{tel} :

$$\theta_s = \frac{s}{F_{\text{tel}}} \cdot 206\,265''$$

Aby spektrograf dosáhl svého nominálního teoretického rozlišení, musí být spektrální rozlišovací element $\Delta\lambda$ dominován obrazem štěrby s' a reciprokou lineární disperzí:

$$\Delta\lambda = s' \cdot D^{-1} = s \left(\frac{f_{\text{cam}}}{f_{\text{col}}} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right) \left(\frac{d \cos \beta}{m f_{\text{cam}}} \right) = s \frac{d \cos \alpha}{m f_{\text{col}}}$$

Dosadíme-li za $s = \theta_s F_{\text{tel}}$ (v radiánech) a uvědomíme-li si, že průměr kolimovaného svazku je $d_{\text{beam}} = f_{\text{col}} / (F_{\text{tel}} / D_{\text{tel}})$, získáme fundamentální relaci pro spektrální rozlišení štěrbinového spektrografu:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{m \lambda f_{\text{col}}}{s d \cos \alpha} = \frac{m \lambda d_{\text{beam}}}{\theta_s D_{\text{tel}} d \cos \alpha}$$

Využijeme-li skutečnost, že osvětlená šířka mřížky je $W = d_{\text{beam}} / \cos \alpha$, a přejdeme do Littrowovy geometrie, dostáváme zásadní zákonitost moderní astrofyzikální optiky:

$$R \cdot \theta_s = \frac{2W \sin \theta_B}{D_{\text{tel}}}$$

❗ DŮLEŽITÉ

Fundamentální invariant spektrografu ($R \cdot \theta_s$): Součin spektrálního rozlišení a úhlové šířky štěrby na obloze je přímo úměrný rozměru mřížky W a nepřímo úměrný průměru zrcadla dalekohledu D_{tel} ! Pokud postavíme větší dalekohled (např. ELT s průměrem 39 m namísto 4 m dalekohledu), musíme pro zachování stejného spektrálního rozlišení při daném seeingu θ_s zvětšit rozměry mřížky a kolimátoru desetinásobně!

2.4 Ztráty na štěrbině (Slit Losses)

Pozemní dalekohledy jsou limitovány atmosférickou turbulencí (seeingem). Bodový obraz hvězdy v ohnisku dalekohledu není ideálním Airyho difrakčním diskem, nýbrž turbulentním rozptylovým profilem. Standardně se

prostorový profil hvězdy aproximuje **Moffatovým profilem**:

$$I(r) = I_0 \left[1 + \left(\frac{r}{\alpha_M} \right)^2 \right]^{-\beta_M}$$

kde β_M je strukturní parametr (v astronomii typicky $\beta_M \approx 2,5$ až $4,76$) a pološířka v polovině maxima (FWHM) je dána vztahem:

$$\text{FWHM} = 2\alpha_M \sqrt{2^{1/\beta_M} - 1}$$

Pro analytické odhady se často užívá jednodušší rotačně symetrický Gaussovský profil s disperzí $\sigma_{\text{seeing}} = \text{FWHM}/2,355$.

Je-li štěrbinová spektrografu o úhlové šířce θ_s vycentrována na střed hvězdy ($x = 0$), část světla dopadne mimo štěrbinu na krycí čelisti (slit jaws). Zlomek propuštěného světla η_{slit} (propustnost štěrbinu neboli *slit transmission*) je dán integrálem:

$$\eta_{\text{slit}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\theta_s/2}^{+\theta_s/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \text{erf}\left(\frac{\theta_s}{2\sqrt{2}\sigma}\right) = \text{erf}\left(\frac{\theta_s}{2\sqrt{2} \cdot \frac{\text{FWHM}}{2,355}}\right) \approx \text{erf}\left(0,833 \frac{\theta_s}{\text{FWHM}}\right)$$

kde $\text{erf}(z)$ je chybová funkce (error function).

Poměr šířky štěrbinu k seeingu θ_s/FWHM Propustnost štěrbinu η_{slit} (Gauss) Ztráta na štěrbině (Slit Loss)

0{,}50	38{,}3 %	61{,}7 %
0{,}75	54{,}6 %	45{,}4 %
1{,}00	68{,}3 %	31{,}7 %
1{,}25	78{,}9 %	21{,}1 %
1{,}50	86{,}6 %	13{,}4 %
2{,}00	95{,}4 %	4{,}6 %

Při typické volbě $\theta_s \approx \text{FWHM}$ ztrácíme více než 30 % fotonů přímo na štěrbině spektrografu. Zúžení štěrbinu sice zvýší spektrální rozlišení, ale za cenu dramatického poklesu poměru signálu k šumu (S/N).

2.5 Bezštěrbinová spektroskopie (Slitless Spectroscopy)

Zcela odlišnou koncepci představuje **bezštěrbinová spektroskopie**. Z optické trasy je odstraněna štěrbinu i kolimátor a disperzní prvek je umístěn přímo do konvergentního svazku dalekohledu před detektor, případně před aperturu celého dalekohledu:

- Objektivový hranol (objective prism):** Masivní skleněný hranol o malém vrcholovém úhlu (např. 1° až 4°) umístěný přímo před vstupní korekční deskou Schmidtovy komory. Každá hvězda v širokém zorném poli vytváří na fotografické desce či CCD malé spektrum. Touto metodou byly v minulosti pořízeny monumentální klasifikační katalogy (Henry Draper Catalogue s více než 225 000 spektry hvězd).
- Grism (mřížkový hranol):** Kompaktní optický prvek vzniklý spojením transmisní difrakční mřížky přímo s přeponou pravoúhlého skleněného hranolu. Grism je navržen tak, aby pro zvolenou vlnovou délku λ_0 kompenzoval lom světla na hranolu difrakčním úhlem mřížky, takže paprsek prochází bez odchylky v ose dalekohledu ($m = 1$).

Grismy jsou základním spektroskopickým prvkem na moderních kosmických observatořích, kde absence atmosféry odstraňuje seeing a bodová funkce zobrazení (PSF) dalekohledu je extrémně ostrá (difrakčně limitovaná):

- Hubble Space Telescope (HST):** Přístroje STIS, ACS a kamera WFC3 (např. grismy G102 a G141 pro průzkum raných galaxií a atmosfér exoplanet).

- **James Webb Space Telescope (JWST):** Přístroj NIRCam (grismy s dlouhými vlnovými délkami pro širokouhlou bezštěrbínovou spektroskopii WFSS) a NIRISS (režim SOSS — Single Object Slitless Spectroscopy s vysokou fotometrickou stabilitou pro tranzity exoplanet).

Výhody a nevýhody bezštěrbínové spektroskopie

Výhody:

- 100% propustnost — žádné ztráty na štěrbině (žádné slit losses).
- Simultánní snímání spekter všech objektů v zorném poli (stovky až tisíce galaxií a hvězd na jediném snímku).
- Dokonalá fotometrická stabilita (žádné barevné závislosti způsobené proměnlivým seeingem či nepřesným navedením na štěrbinu).

Nevýhody:

- **Vysoké pozadí noční oblohy:** Bez štěrbin dopadá záření oblohy na každý pixel detektoru přes celý propustný pás filtru, což výrazně zvyšuje fotonový šum pozadí.
- **Spektrální překryv (spectral crowding & confusion):** Spektra blízkých hvězd a galaxií se vzájemně překrývají, což vyžaduje pořizování expozičních sérií při různých úhlech natočení dalekohledu (roll angles).
- Rozlišení je limitováno fyzickou prostorovou velikostí objektu na obloze: pro rozlehlou galaxii je spektrální rozlišení mnohem horší než pro bodovou hvězdu.

2.6 Python skript: Modelování profilu hvězdy a propustnosti štěrbin

Následující kód simuluje Moffatův a Gaussovský prostorový profil hvězdy a provádí numerickou integraci toku procházejícího štěrbinou spektrografu.

```

import numpy as np
from scipy import special, integrate

def gaussian_psf_1d(x, fwhm):
    """Jednorozměrný normalizovaný Gaussovský profil seeingového disku."""
    sigma = fwhm / (2.0 * np.sqrt(2.0 * np.log(2.0)))
    return (1.0 / (np.sqrt(2.0 * np.pi) * sigma)) * np.exp(-0.5 * (x / sigma)**2)

def moffat_psf_1d(x, fwhm, beta=3.5):
    """Jednorozměrný normalizovaný Moffatův profil seeingového disku."""
    alpha = fwhm / (2.0 * np.sqrt(2.0**(1.0 / beta) - 1.0))
    # Normalizační konstanta pro 1D Moffat
    norm = special.gamma(beta) / (alpha * np.sqrt(np.pi) * special.gamma(beta - 0.5))
    return norm * (1.0 + (x / alpha)**2)**(-beta)

def slit_transmission_gauss(slit_width, fwhm):
    """Analytická propustnost štěrby pro Gaussovský profil."""
    sigma = fwhm / (2.0 * np.sqrt(2.0 * np.log(2.0)))
    return special.erf(slit_width / (2.0 * np.sqrt(2.0) * sigma))

def slit_transmission_moffat(slit_width, fwhm, beta=3.5):
    """Numerická integrace propustnosti štěrby pro Moffatův profil."""
    val, _ = integrate.quad(lambda x: moffat_psf_1d(x, fwhm, beta),
                           -slit_width / 2.0, slit_width / 2.0)
    return val

<h1>Příklad pro astronomické podmínky: Seeing FWHM = 1.0 obloukové vteřiny</h1>
seeing_fwhm = 1.0 # arcsec
widths = np.array([0.5, 0.8, 1.0, 1.2, 1.5, 2.0]) # šířky štěrby v arcsec

print("Srovnání propustnosti štěrby pro seeing 1.0'':")
print(f"{'Šířka [arcsec]':<15} {'Gauss [%]':<12} {'Moffat (beta=3.5) [%]':<20}")
print("-" * 50)
for w in widths:
    tg = slit_transmission_gauss(w, seeing_fwhm) * 100.0
    tm = slit_transmission_moffat(w, seeing_fwhm, beta=3.5) * 100.0
    print(f"{w:<15.2f} {tg:<12.2f} {tm:<20.2f}")

```

Kapitola 3: Echelle spektrografie s křížovou disperzí

Pokud požadujeme spektrograf s vysokým rozlišením ($R \geq 50\,000$ až $150\,000$), který by simultánně pokrýl celé viditelné a blízké infračervené spektrum (od 380 nm do 900 nm), klasický jednoštěbinový přístroj s jednou mřížkou v prvním řádu ($m = 1$) naráží na nepřekonatelné fyzikální a technické překážky. Při lineární disperzi odpovídající rozlišení $R = 100\,000$ by jednorozměrné spektrum mělo délku několika metrů, což by vyžadovalo obří detektorové mozaiky a extrémně dlouhé kamery.

Geniálním řešením tohoto problému je **echelle spektrografie** (z francouzského *échelle* = žebřík). Echelle spektrograf využívá mřížku s hrubými vrypů pracující ve velmi vysokých difrakčních řádech ($m \sim 30 - 150$) v kombinaci s kolmým disperzním prvkem (**křížovým disperzorem**), čímž vytváří kompaktní dvourozměrný formát spektra (**echelogram**) dokonale odpovídající čtvercovému či obdélníkovému formátu moderních velkoformátových CCD senzorů.

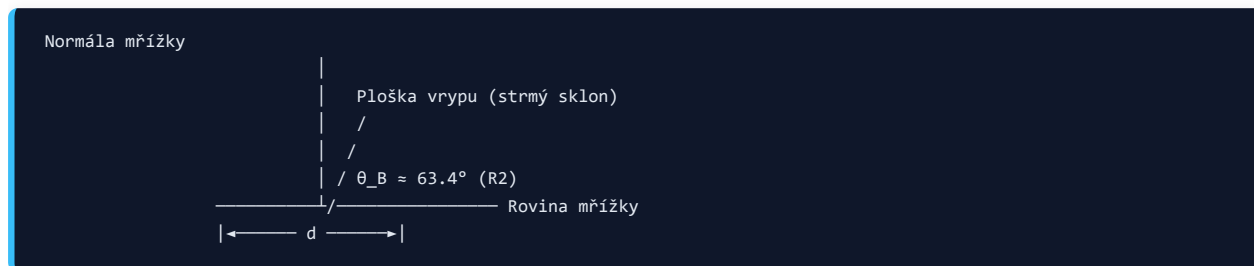
3.1 Geometrie echelle mřížky: R2 a R4 mřížky

Echelle mřížka se od běžných mřížek liší ve dvou klíčových parametrech:

1. **Velmi hrubá perioda vrypů:** Hustota vrypů bývá pouhých 31,6 až 79 vrypů na milimetr (perioda $d \approx 12,6\text{ }\mu\text{m}$ až $31,6\text{ }\mu\text{m}$), což je řádově více než vlnová délka světla.
2. **Extrémně strmý blaze úhel:** Vrypů jsou profilovány tak, že blaze úhel θ_B je velmi velký.

V optické praxi se strmost echelle mřížek klasifikuje pomocí tangenty blaze úhlu $\tan \theta_B$:

- **Mřížky R2:** $\tan \theta_B = 2 \implies \theta_B = \arctan(2) \approx 63,43^\circ$. Jedná se o nejrozšířenější standard v astronomické instrumentaci.
- **Mřížky R3.1:** $\tan \theta_B = 3,14 \implies \theta_B \approx 72,3^\circ$.
- **Mřížky R4:** $\tan \theta_B = 4 \implies \theta_B = \arctan(4) \approx 75,96^\circ$. Tyto mřížky se používají u nejmodernějších ultra-stabilních spektrografů (např. ESPRESSO na VLT).



V kvazi-Littrowově geometrii ($\alpha \approx \beta \approx \theta_B$) nabývá mřížková rovnice tvaru:

$$m\lambda_B = 2d \sin \theta_B$$

Vynásobíme-li obě strany výrazem $\cos \theta_B / \cos \theta_B$, dostáváme:

$$m\lambda_B = 2d \cos \theta_B \tan \theta_B$$

Pro vlnovou délku $\lambda = 500\text{ nm}$ ($0,5\text{ }\mu\text{m}$) a mřížku R2 ($\theta_B \approx 63,43^\circ$, $\sin \theta_B \approx 0,8944$) s periodou $d = 31,6\text{ }\mu\text{m}$ ($31,6$ vrypů/mm) je difrakční řád:

$$m = \frac{2d \sin \theta_B}{\lambda_B} = \frac{2 \cdot 31,6\text{ }\mu\text{m} \cdot 0,8944}{0,5\text{ }\mu\text{m}} \approx 113$$

Echelle mřížka tedy pracuje v řádu $m = 113$!

3.2 Volný spektrální interval (Free Spectral Range)

Základní fyzikální vlastností difrakce ve vysokých řádech je, že difrakční úhly pro různé řády a různé vlnové délky se vzájemně překrývají. Podmínka pro překryv řádu m na vlnové délce λ a sousedního řádu $(m + 1)$ na vlnové délce $\lambda - \Delta\lambda$ je:

$$m\lambda = (m + 1)(\lambda - \Delta\lambda)$$

Odtud plyne definiční vztah pro **volný spektrální interval** (Free Spectral Range, FSR), což je rozsah vlnových délek v rámci jednoho difrakčního řádu, který není překryt sousedním řádem:

$$\Delta\lambda_{\text{FSR}} = \frac{\lambda}{m + 1} \approx \frac{\lambda}{m}$$

Dosadíme-li za m z Littrowovy mřížkové rovnice, dostáváme fundamentální závislost:

$$\Delta\lambda_{\text{FSR}} = \frac{\lambda^2}{2d \sin \theta_B}$$

Vidíme, že:

- Šířka volného spektrálního intervalu $\Delta\lambda_{\text{FSR}}$ klesá s rostoucím difrakčním řádem m .
- $\Delta\lambda_{\text{FSR}}$ je úměrná čtverci vlnové délky λ^2 : v modré části spektra (400 nm) je rozsah jednoho řádu mnohem užší (např. 3,5 nm) než v červené části spektra (800 nm, kde činí až 14 nm).

3.3 Křížová disperze (Cross-Dispersion)

Bez dodatečného optického prvku by všechny difrakční řády dopadly na detektor přes sebe do jediné prostorové linie a vzniklý signál by byl neoddělitelnou směsí fotonů desítek různých vlnových délek.

K vyřešení tohoto problému slouží **křížový disperzor** (cross-disperser). Jedná se o optický prvek s nízkou disperzí, jehož rovina disperze je orientována přesně **kolmo** (ortogonálně) k rovině disperze echelle mřížky:

1. **Disperzní hranoly (prisms):** Skleněné hranoly (např. z těžkého flintového skla či křemene) nabízejí vynikající propustnost bez parazitního rozptylu světla. Protože disperze skla strmě roste směrem ke kratším vlnovým délkám, hranolový křížový disperzor vytváří nerovnoměrné rozestupy mezi řády: v modré oblasti jsou řády od sebe vzdáleny více než v červené oblasti, což přirozeně kompenzuje větší počet řádů v modré části spektra.
2. **Nízkodisperzní difrakční mřížky:** Poskytují rovnoměrnější úhlovou separaci řádů, avšak samy trpí ztrátami difrakční účinnosti a možným překryvem svých vlastních řádů.

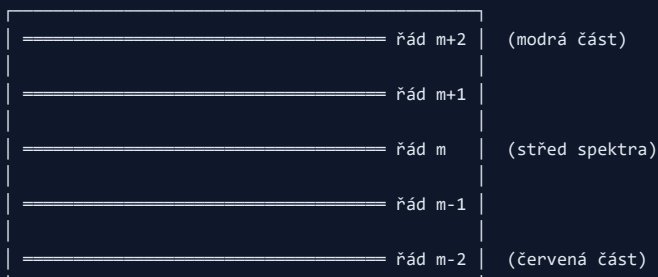
Echelle mřížka (hlavní disperze: osa X, vysoké rozlišení)



Křížový disperzor (křížová disperze: osa Y, nízké rozlišení)



Formát 2D Echelogramu na CCD



Na detektoru CCD tak vzniká soustava téměř rovnoběžných proužků — echelle řádů. Každý řád nese úsek spektra o šířce $\Delta\lambda_{\text{FSR}}$, přičemž sousední řády se na svých koncích mírně překrývají, což zaručuje 100% spektrální kontinuitu bez jakýchkoliv mezer v datech.

3.4 Špičkové astronomické echelle spektrografy

Echelle spektrografie umožnila nejvýznamnější objevy moderní observační astrofyziky, od potvrzení prvních exoplanet u hvězd hlavní posloupnosti (Michel Mayor a Didier Queloz, Nobelova cena za fyziku 2019 za objev planety 51 Pegasi b) až po měření variability fundamentálních fyzikálních konstant v raném vesmíru:

- **HARPS (High Accuracy Radial velocity Planet Searcher):** Umístěn na 3,6m dalekohledu ESO na La Silla (Chile). Pracuje v tepelně stabilizované vakuové komoře s přesností měření radiálních rychlostí lepší než 1 m/s .
- **ESPRESSO (Echelle SPECTrograph for Rocky Exoplanets and Stable Spectroscopic Observations):** Instalován v podzemní laboratoři VLT na Paranal. Může kombinovat světlo ze všech čtyř 8,2m dalekohledů VLT (ekvivalent 16m teleskopu) nebo pracovat s jedním z nich. Dosahuje rozlišení $R \approx 140\,000$ (a v ultra-vysokém režimu až $R \approx 220\,000$) s instrumentální stabilitou na úrovni 10 cm/s , což odpovídá rychlosti lidské chůze!
- **UVES (Ultraviolet and Visual Echelle Spectrograph):** Dvouramenný echelle spektrograf na VLT pokrývající vlnové délky od 300 nm do 1100 nm s rozlišením až $R \approx 110\,000$.
- **HIRES (High Resolution Echelle Spectrometer):** Vlajková loď observatoře W. M. Kecka na Mauna Kea na Havaji (10m dalekohled).

3.5 Požadavky na mechanickou a teplotní stabilitu

Pro dosažení přesnosti radiálních rychlostí 1 m/s musí spektrograf detekovat posun spektrální čáry na CCD čipu o pouhých:

$$\Delta x_{\text{shift}} = \frac{\Delta v}{c} \cdot R \cdot \Delta x_{\text{pix}} \approx \frac{1 \text{ m/s}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \cdot 100\,000 \cdot 15 \mu\text{m} \approx 5 \cdot 10^{-5} \mu\text{m} = 0,05 \text{ nm!}$$

Tento posun představuje pouhou **jednu dvoutisícinu fyzického rozměru jednoho pixelu!** To je méně než meziatomová vzdálenost v krystalové mřížce křemíku. Aby takový přístroj fungoval bez falešných instrumentálních driftů, musí splňovat extrémní konstrukční podmínky:

1. **Umístění mimo dalekohled:** Spektrograf není zavěšen na pohybujícím se tubusu dalekohledu (kde by podléhal gravitačním ohybům), nýbrž stojí na masivním antivibračním betonovém pilíři v klimatizované podzemní kobce a světlo je přiváděno optickými vlákny.
2. **Vakuová komora:** Celý spektrograf je uzavřen v nerezové vakuové nádobě s tlakem pod $0,01 \text{ mbar}$, což zcela eliminuje vliv změn atmosférického tlaku na index lomu vzduchu ($dn/dP \approx 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ mbar}^{-1}$, což by jinak způsobilo falešný drift desítek metrů za sekundu).
3. **Aktivní teplotní stabilizace:** Teplota vakuové komory je řízena mnohonásobnými tepelnými štíty s přesností na $0,001 \text{ }^\circ\text{C}$ (jeden milikelvin).

3.6 Python simulace: Konstrukce echelogramu

Následující vědecký kód modeluje difrakční řády echelle mřížky R2 a generuje tabulku parametrů jednotlivých řádů včetně jejich centrální vlnové délky a spektrálního rozsahu FSR.

```

import numpy as np

def simulate_echelle_orders(d_um, blaze_angle_deg, lambda_min_nm, lambda_max_nm):
    """
    Simuluje parametry echelle řádů v daném intervalu vlnových délek.

    Parametry:
    -----
    d_um : float - perioda mřížky v mikrometrech
    blaze_angle_deg : float - blaze úhel ve stupních
    lambda_min_nm, lambda_max_nm : float - rozsah vlnových délek v nm
    """
    theta_B = np.radians(blaze_angle_deg)
    sin_theta_B = np.sin(theta_B)

    # Littrow:  $m * \lambda = 2 * d * \sin(\theta_B)$ 
    #  $2 * d * \sin(\theta_B)$  v nanometrech
    k_nm = 2.0 * (d_um * 1000.0) * sin_theta_B

    # Určení mezních řádů
    m_min = int(np.floor(k_nm / lambda_max_nm))
    m_max = int(np.ceil(k_nm / lambda_min_nm))

    orders = []
    for m in range(m_min, m_max + 1):
        lam_c = k_nm / m # centrální (blaze) vlnová délka řádu
        fsr = lam_c / m # volný spektrální interval
        lam_start = lam_c - fsr / 2.0
        lam_end = lam_c + fsr / 2.0
        orders.append({
            'order': m,
            'lambda_center_nm': lam_c,
            'fsr_nm': fsr,
            'lambda_start_nm': lam_start,
            'lambda_end_nm': lam_end
        })
    return orders

<h1>Parametry pro mřížku R2 (31.6 vrypů/mm -> d = 31.645 um, blaze = 63.43°)</h1>
d_echelle = 1000.0 / 31.6 # ~ 31.646 um
blaze_R2 = 63.435 # arctan(2)

echelle_data = simulate_echelle_orders(d_echelle, blaze_R2, 400.0, 750.0)

print(f"Simulace Echelle mřížky R2 (perioda d = {d_echelle:.2f} um, blaze = {blaze_R2:.2f}°):")
print(f"Počet detekovaných řádů ve vizuálním oboru: {len(echelle_data)}")
print("-" * 65)
print(f"{'Řád (m)':<10} {'λ_center [nm]':<16} {'FSR [nm]':<12} {'Rozsah [nm]':<25}")
print("-" * 65)
    
```

```
<h1>Vypíšeme výběr reprezentativních řádů (modrá, střed, červená)</h1>
sample_indices = [0, len(echelle_data)//4, len(echelle_data)//2, 3*len(echelle_data)//4, -1]
for idx in sample_indices:
    row = echelle_data[idx]
    rng = f"{row['lambda_start_nm']:.1f} - {row['lambda_end_nm']:.1f}"
    print(f"{row['order']:<10} {row['lambda_center_nm']:<16.2f} {row['fsr_nm']:<12.2f} {rng:<25}")
```

Část II: Redukce a kalibrace spektrálních dat

Surový výstup z moderního astronomického spektrografu představuje digitální matici celých čísel (Analog-to-Digital Units, ADU) uloženou ve standardním formátu FITS. Tento surový obraz nese nejen signál zkoumaného kosmického tělesa, nýbrž také celou kaskádu instrumentálních, detektorových a atmosférických zkreslení: elektronický offset čtecího zesilovače, temný proud, nerovnoměrnou kvantovou účinnost jednotlivých pixelů, záření a absorpci zemské atmosféry, optické vady a geometrické zakřivení spektrálních stop.

Úkolem **spektrální redukce** je provést exaktní matematickou inverzi celého detekčního procesu a transformovat surový 2D FITS obraz do podoby kalibrovaného jednorozměrného spektra:

$$F(\lambda) \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{nm}^{-1}] \quad \text{nebo} \quad [\text{erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{\AA}^{-1}]$$

Tato druhá část monografie provede čtenáře kompletním rigorózním redukčním a kalibračním řetězcem:

- **V Kapitole 4** prozkoumáme základní kalibrační snímky (bias, dark, flat-field). Odvodíme Keithův Horneův algoritmus optimální extrakce spektra, který maximalizuje poměr signálu k šumu (S/N) a automaticky eliminuje zásahy kosmickým zářením na detektoru.
- **V Kapitole 5** se budeme věnovat kalibraci osy vlnových délek. Porovnáme klasické výbojky s dutou katodou (ThAr, U-Ne) s moderními laserovými frekvenčními hřebeny (LFC). Ukážeme matematiku fitování disperzních polynomů a metodu spektrofotometrické kalibrace toku pomocí standardních hvězd.
- **V Kapitole 6** vyřešíme problém telurických atmosférických absorpcí. Prozkoumáme absorpční pásy vodní páry, molekulárního kyslíku a oxidu uhličitého a vysvětlíme moderní metody jejich odstranění — od dělení telurickým standardem až po syntetické modelování přenosu záření v reálné zemské atmosféře (Molecfit).

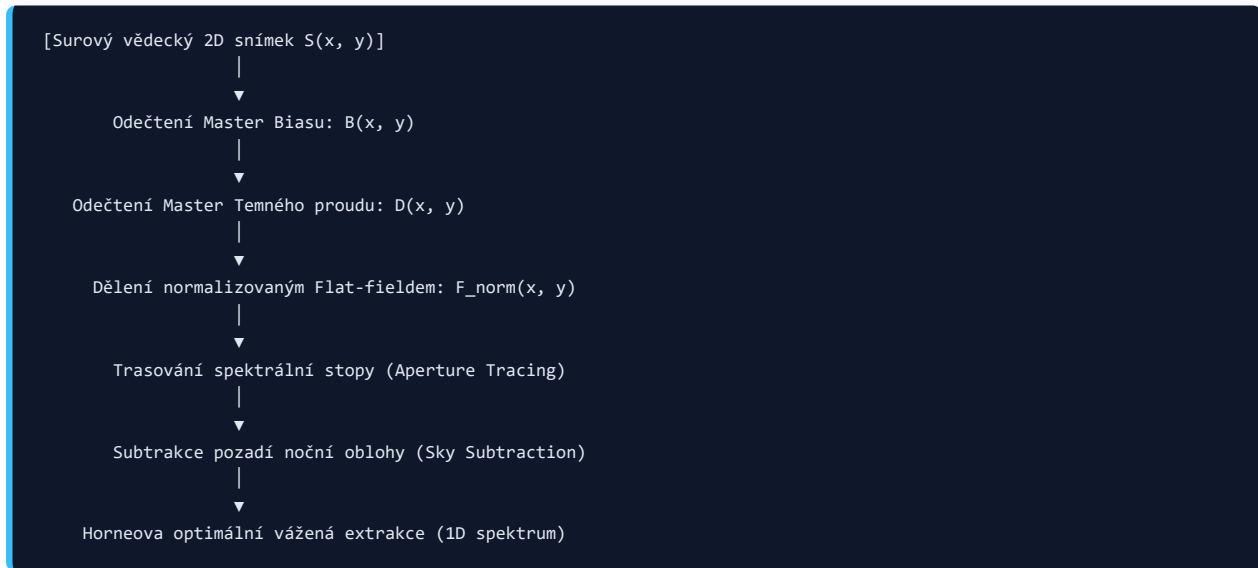
Kapitola 4: Extrakce spekter z CCD a flat-fielding

Při dopadu fotonů na polovodičový detektor (křemíkový čip CCD nebo CMOS) dochází k fotoelektrickému jevu — generování párů elektron–díra. Tyto náboje jsou akumulovány v potenciálových jámách jednotlivých pixelů a na konci expoziční doby postupně přesouvány k výstupnímu uzlu, zesíleny a digitalizovány analogově-digitálním převodníkem (ADC). Výsledkem je dvourozměrná matice čísel $S(x, y)$ v jednotkách ADU.

V této kapitole odvodíme exaktní matematický aparát pro předzpracování těchto snímků a podrobně rozebereme algoritmus optimální extrakce jednorozměrného spektra.

4.1 Digitální redukční řetězec

Standardní spektroskopický redukční řetězec zahrnuje následující sekvenční kroky:



4.2 Kalibrační snímky: Bias a temný proud

Bias (elektronický offset)

Aby analogově-digitální převodník nemusel zpracovávat záporná napětí způsobená náhodným šumem čtecího zesilovače, je na detektor přivedeno umělé kladné referenční napětí — tzv. **bias level** (obvykle několik set až tisíc ADU).

- **Bias frame** se pořizuje s nulovou expoziční dobou ($t_{\text{exp}} = 0$ s) při uzavřené závěrce spektrografu.
- Pro snížení náhodného čtecího šumu σ_{ron} se pořizuje série 15 až 50 snímků, které se zprůměrují mediánem do jednoho **Master Biasu** $B(x, y)$:

$$B(x, y) = \text{median} \left(\{B_i(x, y)\}_{i=1}^K \right)$$

Temný proud (Dark current)

V důsledku nenulové teploty polovodičového čipu dochází k termické generaci párů elektron–díra v křemíku bez přítomnosti světla. Rychlost vzniku temného proudu I_{dark} závisí exponenciálně na absolutní teplotě T podle Richardsonova–Dushmanova zákona:

$$I_{\text{dark}}(T) \propto T^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right)$$

kde $E_g \approx 1,12 \text{ eV}$ je šířka zakázaného pásu křemíku a k_B je Boltzmannova konstanta. Ochlazením CCD senzoru na teplotu kapalného dusíku ($T \approx 150 \text{ K}$ neboli -120°C) či pomocí vícestupňového Peltierova termoelektrického chladiče ($T \approx -60^\circ \text{C}$) klesá temný proud na zlomky elektronu na pixel za hodinu, což je u většiny expozičních časů zanedbatelné. Pokud je přesto nutné temný proud odečíst, generuje se **Master Dark** $D(x, y)$ normalizovaný na jednotku času.

4.3 Flat-fielding a blaze normalizace

Jednotlivé pixely na čipu CCD nemají identickou citlivost. Tyto odchylky jsou způsobeny mikroskopickými nerovnoměrnostmi v tloušťce křemíkové vrstvy, nečistotami a prachovými zrny na optických plochách a vlnovou závislostí difrakční účinnosti mřížky.

Korekce se provádí pomocí **flat-field snímků** pořízených osvětlením spektrografu spojitým zdrojem světla s hladkým spektrem (např. stabilizovaná křemenná halogenová žárovka):

1. Surový flat $F(x, y)$ se očistí o bias a dark.
2. Ve spektroskopii je však flat-field silně modulován celkovým tvarem emise lampy a blaze profilem mřížky podél disperzní osy. Kdybychom vědecký snímek jednoduše vydělili surovým flat-fieldem, zničili bychom přirozený spektrální tvar hvězdného kontinua.
3. Proto se provádí **normalizace flat-fieldu**: v každém spektrálním řádu se proloží hladký polynom $C(x)$ podél disperzní osy x a flat se vydělí touto funkcí:

$$F_{\text{norm}}(x, y) = \frac{F(x, y)}{C(x, y)}$$

Výsledný normalizovaný Master Flat $F_{\text{norm}}(x, y)$ má střední hodnotu rovnou přesně 1,0 a zachovává výhradně vysokofrekvenční změny citlivosti mezi sousedními pixely (tzv. *pixel-to-pixel variations*).

Fringing v blízké infračervené oblasti

U tenkých, ze zadní strany osvětlených čipů (back-illuminated CCD) se při vlnových délkách $\lambda > 750 \text{ nm}$ stává křemík částečně průhledným. Světlo prochází křemíkovou vrstvou, odráží se od jejího předního rozhraní zpět a dochází k vícenásobné interferenci jako v planparalelní desce (Fabry-Pérotův jev). Výsledkem jsou výrazné prostorové proužky — **fringing**, které mohou modulovat signál až o 20 %. Fringing je vysoce závislý na vlnové délce a vyžaduje mimořádně přesný flat-fielding pořízený v identické poloze dalekohledu.

4.4 Trasování spektrální stopy (Aperture Tracing)

V důsledku optických vad kamery a kolimátoru a mírného pootočení mřížky netvoří spektrální stopa na detektoru dokonale přímou linii rovnoběžnou s řádky či sloupci pixelů. Stopa je mírně zakřivená a skloněná.

Matematický popis středu stopy $y_c(x)$ podél disperzní osy x se získává fitováním polynomů (obvykle Čebyševových nebo Legendreových polynomů 3. až 5. stupně):

$$y_c(x) = \sum_{k=0}^K c_k P_k(x)$$

V každém sloupci x se poloha středu stopy určí výpočtem těžiště (centroidu) nebo fitováním Gaussova profilu v prostorovém řezu.

4.5 Standardní vs. optimální extrakce spektra

Mějme korigovaný 2D obraz $D(x, y)$ (po odečtení biasu a flat-fieldingu) a odhad rozptýleného světla pozadí oblohy $S(x, y)$. Signál v pixelu (x, y) modelujeme vztahem:

$$D(x, y) = f(x)P(x, y) + S(x, y)$$

kde $f(x)$ je hledaný celkový jednorozměrný tok spektra ve sloupci x a $P(x, y)$ je prostorový profil stopy (spatial profile) normalizovaný tak, že jeho součet přes prostorový řez štěrbinou je roven jedné:

$$\sum_y P(x, y) = 1$$

Klasická aperturní extrakce

V klasické apertuře se jednoduše sečtou všechny pixely v pevném prostorovém intervalu $[y_{\min}, y_{\max}]$ kolem středu stopy:

$$f_{\text{aper}}(x) = \sum_{y=y_{\min}}^{y_{\max}} [D(x, y) - S(x, y)]$$

Tento přístup má dvě zásadní nevýhody:

1. Všem pixelům v apertuře přiřazuje stejnou váhu, ačkoliv na okrajích stopy je signál hvězdy téměř nulový a dominuje tam šum pozadí a čtecí šum.
2. Zásah kosmickým zářením do libovolného pixelu apertury zcela znehodnotí spektrum v dané vlnové délce.

Horneův algoritmus optimální extrakce (Horne 1986)

Britský astrofyzik Keith Horne publikoval v roce 1986 přelomový algoritmus vážené extrakce založený na principu **maximální věrohodnosti** a minimalizaci statistického kritéria χ^2 :

$$\chi^2(x) = \sum_y \frac{[D(x, y) - S(x, y) - f(x)P(x, y)]^2}{V(x, y)}$$

kde rozptyl (variance) signálu $V(x, y)$ v pixelu je dán standardním Poissonovským a čtecím šumem:

$$V(x, y) = \sigma_{\text{ron}}^2 + \frac{\max(D(x, y), 0)}{g}$$

kde σ_{ron} je efektivní čtecí šum v elektronech a g je zisk převodníku (gain) v e^-/ADU .

Položíme-li derivaci $\frac{\partial \chi^2}{\partial f(x)} = 0$, obdržíme analytické řešení pro optimální tok $f(x)$:

$$f_{\text{opt}}(x) = \frac{\sum_y \frac{P(x, y)[D(x, y) - S(x, y)]}{V(x, y)}}{\sum_y \frac{P(x, y)^2}{V(x, y)}}$$

Tento vztah představuje vážený průměr, kde optimální váha pixelu je:

$$w(x, y) = \frac{\frac{P(x, y)}{V(x, y)}}{\sum_{y'} \frac{P(x, y')^2}{V(x, y')}}}$$

Rozptyl odhadnutého toku spektra je potom dán vztahem:

$$\text{Var}(f_{\text{opt}}(x)) = \frac{1}{\sum_y \frac{P(x, y)^2}{V(x, y)}}$$

VÝHODY HORNEOVY EXTRAKCE:

1. Zvyšuje poměr signálu k šumu (S/N) u slabých objektů typicky o **20 až 50 %**, což ekvivalentně odpovídá zkrácení pozorovacího času na velkém dalekohledu až na polovinu! 2. Umožňuje robustní detekci a eliminaci kosmického záření: pokud se naměřená hodnota $D(x, y)$ odchyluje od modelu $f(x)P(x, y) + S(x, y)$ o více než zvolený násobek směrodatné odchylky (např. $> 5\sigma$), pixel je označen jako kosmík, vyřazen a spektrum je re-extrahováno ze zbývajících nepoškozených pixelů profilu.

4.6 Python kód: Implementace Horneovy optimální extrakce

Následující plně funkční skript implementuje Horneův algoritmus včetně automatického potlačení zásahu kosmickým zářením na simulovaném 2D spektru.

```

import numpy as np

def horne_optimal_extraction(data_2d, sky_2d, ron_e=5.0, gain=1.5, n_sigma_clip=5.0):
    """
    Horneův (1986) algoritmus optimální extrakce 1D spektra.

    Parametry:
    -----
    data_2d : 2D ndarray - surový snímek po flat-fieldingu (ADU)
    sky_2d : 2D ndarray - model pozadí oblohy (ADU)
    ron_e : float - čtecí šum detektoru v elektronech
    gain : float - zisk zesilovače v e-/ADU
    n_sigma_clip : float - práh pro odřiznutí kosmického záření
    """
    n_y, n_x = data_2d.shape
    flux_1d = np.zeros(n_x)
    var_1d = np.zeros(n_x)

    # 1. Odhad prostorového profilu P(y) integrací přes všechny sloupce
    subtracted = data_2d - sky_2d
    profile_1d = np.maximum(np.sum(subtracted, axis=1), 0.0)
    total_prof = np.sum(profile_1d)
    if total_prof > 0:
        P_y = profile_1d / total_prof
    else:
        P_y = np.ones(n_y) / n_y

    # Dvourozměrný profil P(x, y)
    P_2d = np.tile(P_y[:, np.newaxis], (1, n_x))

    # 2. Extrakce sloupec po sloupci
    for x in range(n_x):
        d_col = data_2d[:, x]
        s_col = sky_2d[:, x]
        p_col = P_2d[:, x]
        mask = np.ones(n_y, dtype=bool)

        while True:
            # Výpočet variance podle Poissonovy statistiky a RON
            v_col = (ron_e / gain)**2 + np.maximum(d_col, 0.0) / gain

            # Váhy a extrakce toku
            denom = np.sum((p_col[mask]**2) / v_col[mask])
            if denom <= 0:
                f_x = 0.0
                v_x = 0.0
                break
            num = np.sum(p_col[mask] * (d_col[mask] - s_col[mask]) / v_col[mask])
            f_x = num / denom
            v_x = 1.0 / denom

        # Detekce a eliminace kosmického záření (outliers)

```

```
model = f_x * p_col + s_col
residuals = (d_col - model) / np.sqrt(v_col)

outliers = (residuals > n_sigma_clip) & mask
if not np.any(outliers):
    break # Žádné další odlehlé hodnoty
mask[outliers] = False # Vyřazení zasažených pixelů

flux_1d[x] = f_x
var_1d[x] = v_x

return flux_1d, np.sqrt(var_1d)

<h1>Syntetický test: spektrum o 200 prostorových a 500 disperzních pixelech</h1>
np.random.seed(42)
ny, nx = 40, 500
x_grid = np.arange(nx)
y_grid = np.arange(ny)[: , np.newaxis]

<h1>Skutečný tok (kontinuum + absorpční čára)</h1>
true_flux = 1000.0 - 500.0 * np.exp(-0.5 * ((x_grid - 250) / 10.0)**2)
<h1>Gaussovský prostorový profil se středem na y = 20</h1>
spatial_profile = np.exp(-0.5 * ((y_grid - 20) / 3.0)**2)
spatial_profile /= np.sum(spatial_profile, axis=0)

clean_signal = true_flux * spatial_profile
sky_bg = 50.0 * np.ones((ny, nx))
noise = np.random.normal(0, np.sqrt((5.0/1.5)**2 + (clean_signal + sky_bg)/1.5))
simulated_ccd = clean_signal + sky_bg + noise

<h1>Přidání umělého kosmického paprsku do jádra čáry</h1>
simulated_ccd[20, 250] += 5000.0

<h1>Spuštění extrakce</h1>
extracted_flux, flux_err = horne_optimal_extraction(simulated_ccd, sky_bg)

print("Horneova optimální extrakce dokončena:")
print(f"Skutečný tok v jádru čáry: {true_flux[250]:.1f} ADU")
print(f"Extrahovaný tok po odstranění kosmiku: {extracted_flux[250]:.1f} ± {flux_err[250]:.1f} ADU")
```

Kapitola 5: Kalibrace vlnových délek a spektrofotometrie

Po úspěšné extrakci jednorozměrného spektra z detektoru máme k dispozici vektor naměřených signálů $f(x)$ indexovaný pořadovým číslem pixelu $x \in [1, N_{\text{pix}}]$. Aby se tato data stala fyzikálně využitelnými, musíme vyřešit dvě fundamentální kalibrační úlohy:

1. **Kalibraci vlnových délek:** Převést horizontální pixelové souřadnice x na vlnové délky $\lambda(x)$ s extrémní přesností.
2. **Spektrofotometrickou kalibraci:** Převést vertikální tok v relativních jednotkách ADU na absolutní fyzikální zářivý tok dopadající na zemskou atmosféru $F(\lambda)$.

5.1 Výbojky s dutou katodou (ThAr a U–Ne)

Klasickým laboratorním standardem pro kalibraci vlnových délek v astronomii jsou **výbojky s dutou katodou** (Hollow Cathode Lamps, HCL). Výbojka se skládá ze skleněné trubice naplněné zředěným vzácným plynem (argonem či neonem) o tlaku několika set pascalů, v níž je umístěna válcová katoda vyrobená z čistého těžkého kovu.

Při zapálení doutnavého výboje elektrické pole urychluje ionty nosného plynu (Ar^+ , Ne^+), které narážejí do vnitřních stěn duté katody a katodovým rozprašováním uvolňují atomy kovu do plynné fáze. Tyto atomy jsou následnými nepružnými srážkami excitovány a vyzařují bohaté čárové emisní spektrum.

Proč právě thorium a uran?

V optické a blízké infračervené spektroskopii je standardem **thorium–argonová výbojka (ThAr)**, případně **uran–neonová výbojka (U–Ne)**:

- Thorium (^{232}Th) a uran (^{238}U) mají sudá atomová čísla i sudé neutronové počty, což znamená, že jejich atomová jádra mají **nulový jaderný spin** ($I = 0$). Díky tomu jejich spektrální čáry netrpí **hyperjemným štěpením** (hyperfine splitting) a jsou extrémně úzké, symetrické a monochromatické.
- Jako těžké aktinoidy disponují mimořádně složitou elektronovou konfigurací s neobsazenými orbitály d a f. To vede k existenci desítek tisíců spektrálních čar rovnoměrně pokrývajících celé optické a infračervené pásmo od 350 nm do 1 000 nm.
- Vlnové délky tisíců čar thoria byly změřeny pomocí laboratorních Fourierovských spektrometrů (FTS) v laboratořích NIST a ESO s přesností lepší než $10^{-4} \text{ \AA}$.

5.2 Kalibrátory nové generace: Etalony a frekvenční hřebeny

Pro spektrografy hledající terestrické exoplanety (jako HARPS, ESPRESSO či EXPRES), kde se vyžaduje stabilita měření radiálních rychlostí na úrovni centimetrů za sekundu, narážejí výbojky ThAr na své fyzikální limity: intenzity sousedních čar se liší o několik řádů (silné čáry argonu mohou saturovat detektor) a stárnutím výbojky se mírně mění poměry čar.

Proto byly vyvinuty moderní kalibrační zdroje:

1. **Stabilizované Fabry–Pérotovy etalony:** Planparalelní skleněná nebo vzduchová dutina s vysoce odrazivými zrcadly, osvětlená bílým světlem. Vytváří pravidelný hřeben tisíců ekvidistantních emisních píků s identickou intenzitou. Etalon je vakuově zapouzdřen a teplotně stabilizován na úroveň mikrokelfinů.
2. **Laserové frekvenční hřebeny (Laser Frequency Combs, LFC):** Absolutní vrchol metrologie, oceněný Nobelovou cenou za fyziku v roce 2005 (John L. Hall a Theodor W. Hänsch). LFC využívá femtosekundový módově vázaný laser, jehož spektrum tvoří miliony dokonale ostrých, ekvidistantních optických frekvencí:

$$\nu_n = \nu_0 + n \cdot f_{\text{rep}}$$

kde f_{rep} je opakovací frekvence laserových pulsů a ν_0 je nosná frekvence posuvu (carrier-envelope offset frequency). Obě tyto rádiové frekvence jsou fázově uzamčeny k **atomovým hodinám** (primárnímu cesiovému standardu nebo optickým rubidiovým hodinám). LFC tak poskytuje astronomickému spektrografu kalibraci vlnových délek s relativní chybou menší než 10^{-11} , což odpovídá chybě v rychlosti pod 1 mm/s!

5.3 Matematika fitování disperzní funkce

Kalibrace vlnových délek spočívá v nalezení spojitě funkce $\lambda(x)$, která převádí pixelovou pozici píku na jeho tabelovanou laboratorní vlnovou délku:

1. **Detekce píků:** V kalibračním spektru výbojky se identifikují emisní linie a jejich přesné polohy x_i se určí fitováním Gaussova profilu či centrováním s přesností na setiny pixelu.
2. **Párování čar:** Detekované píky jsou algoritmem pro rozpoznávání vzorů (pattern recognition) spárovány s laboratorním katalogem vlnových délek $\{\lambda_i\}$.
3. **Polynomická regrese:** Pro minimalizaci Rungeova jevu (divoké oscilace běžných mocninných polynomů vysokých stupňů na okrajích intervalu) se disperzní funkce fituje pomocí ortogonálních polynomů – nejčastěji **Legendreových polynomů** $L_k(u)$ nebo **Čebyševových polynomů** $T_k(u)$ na normalizovaném intervalu $u \in [-1, 1]$:

$$u(x) = \frac{2x - (x_{\max} + x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}}$$

Disperzní relace je vyjádřena lineární kombinací:

$$\lambda(u) = \sum_{k=0}^K c_k L_k(u)$$

Koeficienty $\{c_k\}$ se určí standardní metodou nejmenších čtverců. Typický stupeň polynomu je $K = 3$ až 5. Kvalita kalibrace se hodnotí pomocí reziduálního rozptylu (Root Mean Square, RMS):

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{M - K - 1} \sum_{i=1}^M [\lambda_i - \lambda(u(x_i))]^2}$$

Pro kvalitní spektrografy s vysokým rozlišením dosahuje RMS kalibrace hodnot pod 0,001 Å.

5.4 Barycentrická korekce rychlostí

Pozemský pozorovatel se nepohybuje rovnoměrně přímočaře; v důsledku orbitálního pohybu Země kolem Slunce a denní rotace kolem zemské osy se rychlost dalekohledu vůči zkoumané hvězdě neustále mění.

Pro měření reálných radiálních rychlostí ve vesmíru je proto nutné provést přepočet z lokálního pozorovacího systému dalekohledu do vztažné soustavy spojené s **těžištěm sluneční soustavy (barycentrem)**:

$$v_{\text{bary}} = v_{\text{geo}} + \vec{v}_{\text{orb}} \cdot \hat{u} + \vec{v}_{\text{rot}} \cdot \hat{u} + \Delta v_{\text{rel}}$$

kde:

- $\vec{v}_{\text{orb}}$ je vektor rychlosti středu Země vůči barycentru sluneční soustavy (jeho amplituda činí až ≈ 30 km/s),
- $\vec{v}_{\text{rot}}$ je vektor rychlosti rotace zemského povrchu v místě observatoře (až 465 m/s na rovníku),
- $\hat{u}$ je jednotkový směrový vektor mířící k pozorované hvězdě,
- Δv_{rel} zahrnuje relativistické korekce (gravitační červený posuv Slunce a planet v místě detektoru a dilataci času).

Neprovedení barycentrické korekce by způsobilo zdánlivou sinusovou variaci naměřených radiálních rychlostí hvězdy s periodou jednoho roku a obří amplitudou 30 km/s!

5.5 Spektrofotometrická kalibrace toku

Abychom naměřený počet elektronů v pixelu převedli na absolutní fyzikální tok $F(\lambda)$ v jednotkách $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{nm}^{-1}$, pozorujeme během noci **spektrofotometrické standardní hvězdy**. Jde o vybrané hvězdy (často horké bílé trpaslíky jako GD 71, Feige 34 či G191–B2B), jejichž absolutní spektrální hustota toku $F_{\text{std}}(\lambda)$ byla přesně změřena kosmickými dalekohledy (např. HST) mimo vliv zemské atmosféry.

1. Z naměřeného extrahovaného toku standardu $S_{\text{std}}(\lambda)$ v elektronech za sekundu určíme **funkci spektrální odezvy přístroje** (instrument response function) $R(\lambda)$:

$$R(\lambda) = \frac{S_{\text{std}}(\lambda)}{F_{\text{std}}(\lambda) \cdot 10^{-0,4k(\lambda)X_{\text{std}}}}$$

kde $k(\lambda)$ je koeficient atmosférické extinkce a X_{std} je vzdušná hmota (airmass) v okamžiku pozorování standardu.

1. Následně získáme absolutní tok vědeckého cíle $F_{\text{obj}}(\lambda)$ ze vztahu:

$$F_{\text{obj}}(\lambda) = \frac{S_{\text{obj}}(\lambda)}{R(\lambda) \cdot 10^{-0,4k(\lambda)X_{\text{obj}}}}$$

5.6 Atmosférická extinkce a Bouguerův zákon

Světlo procházející zemskou atmosférou je zeslabováno absorpcí a rozptylem. Podle **Bouguerova zákona** závisí pozorovaný tok $F_{\text{obs}}(\lambda)$ na toku před vstupem do atmosféry $F_0(\lambda)$ vztahem:

$$F_{\text{obs}}(\lambda) = F_0(\lambda) \cdot 10^{-0,4k(\lambda)X}$$

kde X je **vzdušná hmota** (airmass), která pro zenitové úhly $z \leq 60^\circ$ dobře odpovídá geometrické aproximaci planparalelní atmosféry:

$$X \approx \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

Celkový koeficient extinkce $k(\lambda)$ (udávaný v magnitudách na jednotku vzdušné hmoty) je součtem tří fyzikálních procesů:

$$k(\lambda) = k_{\text{Rayleigh}}(\lambda) + k_{\text{aerosol}}(\lambda) + k_{\text{ozone}}(\lambda)$$

1. **Rayleighův rozptyl na molekulách N_2 a O_2** : Dominuje v modré a UV oblasti; škáluje se s vlnovou délkou jako λ^{-4} :

$$k_{\text{Rayleigh}}(\lambda) \approx 0,1066 \left(\frac{\lambda}{0,55 \mu\text{m}} \right)^{-4,05} \cdot \frac{P}{P_0}$$

kde P/P_0 je poměr atmosférického tlaku na observatoři k tlaku u hladiny moře.

1. **Aerosolový (Mieův) rozptyl na prachových částicích**: Škáluje se mírněji jako $\lambda^{-\alpha}$ (kde $\alpha \approx 0,8$ až $1,5$).
2. **Ozonová absorpce**: Chappuisův absorpční pás ozonu v rozmezí 500 nm až 700 nm přidává plochou absorpci o velikosti cca 0,02 až 0,04 mag/airmass.

5.7 Python kód: Kalibrace vlnových délek a fitování disperze

Následující kód demonstruje fitování disperzní funkce Čebyševovým polynomem na souboru identifikovaných laboratorních čar thorcia.

```
import numpy as np

def fit_dispersion_chebyshev(pixel_positions, lab_wavelengths, degree=4):
    """
    Fituje disperzní relaci lambda(x) pomocí Čebyševových polynomů.

    Parametry:
    -----
    pixel_positions : array_like - souřadnice piků na detektoru (x)
    lab_wavelengths : array_like - laboratorní vlnové délky (nm)
    degree : int - stupeň polynomu
    """
    x = np.array(pixel_positions, dtype=float)
    lam = np.array(lab_wavelengths, dtype=float)

    # Normalizace intervalu do [-1, 1]
    x_min, x_max = np.min(x), np.max(x)
    u = 2.0 * (x - x_min) / (x_max - x_min) - 1.0

    # Fitování Čebyševova polynomu
    coeffs = np.polynomial.chebyshev.chebfit(u, lam, degree)

    # Vyhodnocení fitu a reziduí
    lam_fitted = np.polynomial.chebyshev.chebval(u, coeffs)
    residuals = lam - lam_fitted
    rms = np.sqrt(np.mean(residuals**2))

    return coeffs, (x_min, x_max), rms, residuals

<h1>Příklad se 7 známými emisními čarami ThAr</h1>
measured_x = np.array([125.4, 340.2, 580.8, 890.1, 1205.6, 1620.3, 1950.7])
<h1>Odpovídající vlnové délky v nm (nominální lineární disperze cca 0.05 nm/pix)</h1>
true_lambda = np.array([450.235, 461.120, 473.405, 489.150, 505.320, 526.415, 543.280])

coeffs, x_lims, rms_err, res = fit_dispersion_chebyshev(measured_x, true_lambda, degree=3)

print("Výsledky kalibrace vlnových délek:")
print(f"Rozsah detektoru: x in [{x_lims[0]:.1f}, {x_lims[1]:.1f}] px")
print(f"Reziduální chyba fitu (RMS): {rms_err*1000.0:.3f} pm ({rms_err:.5f} nm)")
print("-" * 55)
print(f"{'Pixel':<10} {'Tabelovaná λ [nm]':<20} {'Reziduum [pm]':<15}")
print("-" * 55)
for i in range(len(measured_x)):
    print(f"{'measured_x[i]':<10.1f} {'true_lambda[i]':<20.4f} {'res[i]*1000.0':<+15.3f}")
```

Kapitola 6: Korekce telurických atmosférických absorpcí

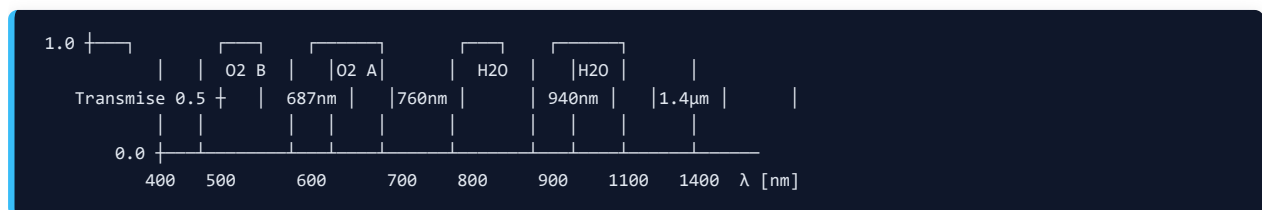
Když fotony ze vzdálené hvězdy či galaxie dorazí k Zemi, musí před dopadem do zrcadla dalekohledu překonat posledních několik desítek kilometrů zemské atmosféry. Zde narážejí na molekuly atmosférických plynů, které selektivně pohlcují záření na svých rotačně-vibračních přechodech. Tento soubor parazitních absorpčních čar a pásů nazýváme **telurickými absorpcemi** (z latinského *tellus* = Země).

V optické oblasti při $\lambda < 600 \text{ nm}$ je vliv telurických čar relativně malý, avšak v červené a zejména v blízké infračervené oblasti (Near-Infrared, NIR, $0,8 \text{ }\mu\text{m}$ až $2,5 \text{ }\mu\text{m}$) telurické pásy dominují a mohou zcela zablokovat astronomická data. V této kapitole prozkoumáme fyziku telurických čar a moderní metody jejich eliminace.

6.1 Hlavní atmosférické absorbéry a jejich spektrální pásy

Telurické absorpce vznikají kvantovými přechody mezi rotačními a vibračními energetickými hladinami molekul. Hlavními absorbéry v zemské atmosféře jsou:

1. **Vodní pára (H_2O):** Molekula vody je asymetrický rotor s velkým dipólovým momentem, což vede k obrovskému množství rotačně-vibračních čar. Vytváří mohutné absorpční pásy kolem vlnových délek: * **720 nm** a **820 nm** (středně silné pásy), * **940 nm** (velmi silný pás), * **1,13 μm** , **1,4 μm** a **1,9 μm** (zde je atmosféra v podstatě neprůhledná — oddělují infračervená atmosférická okna J, H a K). Koncentrace vodní páry v atmosféře je navíc silně proměnlivá v čase i prostoru.
2. **Molekulární kyslík (O_2):** Ačkoliv je homonukleární molekula kyslíku symetrická a nemá stálý elektrický dipól, magnetické dipólové přechody vedou ke vzniku mimořádně hlubokých absorpčních pásů: * **Pás B:** Kolem **687 nm**, * **Pás A:** Kolem **760 nm** — nejvýraznější telurická struktura ve viditelném oboru tvořená desítkami nahuštěných čar se saturací (zcela černým) jádrem. Protože je koncentrace O_2 v suchém vzduchu stabilní (20,95 %), závisí hloubka kyslíkových čar pouze na vzdušné hmotě a barometrickém tlaku.
3. **Oxid uhličitý (CO_2):** Vytváří významné absorpční pásy v pásmech H (1,6 μm) a K (2,0 μm a 2,06 μm).
4. **Methan (CH_4) a oxid dusný (N_2O):** Přispívají k absorpcím v pásmu K a střední infračervené oblasti (MIR).
5. **Ozon (O_3):** Kromě ultrafialového Hartleyova pásu vykazuje slabou spojitou absorpci v Chappuisově pásu ve vizuálním oboru a úzké čáry v IR.



6.2 Problém proměnlivosti: Precipitable Water Vapor (PWV)

Zatímco plyny jako O_2 a CO_2 jsou v atmosféře dobře promíchány (well-mixed gases) a jejich optická tloušťka závisí jednoduše na vzdušné hmotě $X \approx \sec z$, vodní pára je koncentrována v nejnižších vrstvách troposféry a její množství podléhá dramatickým turbulencím a konvektivním pohybům.

Množství vody v atmosféře se kvantifikuje pomocí **srážitelné vody** (Precipitable Water Vapor, PWV), což je výška sloupce kapalné vody (v milimetrech), který by vznikl kondenzací veškeré vodní páry ve vertikálním sloupci atmosféry nad observatoří.

- Na špičkových vysokohorských observatořích (např. Paranal v Chile ve výšce 2 635 m n. m. nebo Mauna Kea na Havaji ve výšce 4 205 m n. m.) dosahuje PWV typicky hodnot 1 až 3 mm (v nejlepších suchých nocích dokonce pod 0,5 mm).
- PWV však může kolísat o desítky procent během několika desítek minut.

6.3 Empirická metoda telurických standardů

Klasickým přístupem k eliminaci telurických čar je pozorování tzv. **telurické standardní hvězdy** bezprostředně před nebo po pozorování vědeckého cíle:

1. **Výběr standardu:** Volí se horká hvězda raného spektrálního typu (obvykle typ B0V až A0V) s vysokou rychlostí rotace ($v \sin i \geq 200$ km/s). * Vysoká rotace způsobuje masivní Dopplerovské rozšíření všech fotosférických absorpčních čar hvězdy, takže kovové čáry splynou do nerozeznatelného mělkého kontinua. * Hvězdy typu B navíc postrádají většinu kovových čar v optickém a IR oboru.
2. **Korekce na fotosférické čáry:** Jedinými výraznými fotosférickými čarami v telurickém standardu zůstávají čáry vodíku (Balmerova, Paschenova či Brackettova série). Tyto čáry jsou analyticky vymodelovány (např. Lorentzovým či Voigtovým profilem) a ze spektra standardu odstraněny.
3. **Přízpůsobení vzdušné hmoty:** Pokud byl standard pozorován při vzdušné hmotě X_{std} mírně odlišné od cíle X_{obj} , aplikuje se mocninné škálování transmisního spektra:

$$T_{\text{obj}}(\lambda) \approx [T_{\text{std}}(\lambda)]^{X_{\text{obj}}/X_{\text{std}}}$$

1. **Dělení spektra:** Výsledné opravené spektrum vědeckého cíle se získá prostým dělením:

$$F_{\text{corr}}(\lambda) = \frac{F_{\text{obs}}(\lambda)}{T_{\text{obj}}(\lambda)}$$

ⓘ UPOZORNĚNÍ

Limity metody telurického standardu: Tato metoda spotřebovává 15 až 30 % drahocenného pozorovacího času dalekohledu. Navíc v oblastech s proměnlivou vodní párou vede časový posun mezi expozicí cíle a standardu k systematickým chybám — podkorigování (zbytkové absorpce) nebo překorigování (falešné emisní špičky).

6.4 Fyzikální modelování přenosu záření (Molecfit)

Revolucí v odstraňování telurických čar se stalo **syntetické modelování přenosu záření v reálném čase**, zavedené Evropskou jižní observatoří (ESO) v balíčku **Molecfit** (Smette et al. 2015, Kausch et al. 2015).

Namísto plýtvání pozorovacím časem na standardní hvězdy počítá kód syntetické transmisní spektrum atmosféry $T(\lambda)$ přímo pro vědecké spektrum. Využívá k tomu:

1. **Atmosférické profily z globálních meteorologických modelů:** Z databázi GDAS (Global Data Assimilation System) a ECMWF čerpá vertikální profily teploty $T(z)$, tlaku $P(z)$ a relativní vlhkosti ve 30 až 50 výškových hladinách nad observatoří v přesném čase expozice.
2. **Molekulární spektroskopickou databázi HITRAN:** Obsahuje parametry stovek tisíc spektrálních čar: laboratorní centrální vlnové délky ν_0 , intenzity přechodů S_{ij} , excitační energie dolní hladiny E'' a koeficienty tlakového rozšíření vzduchem γ_{air} a vlastním plynem γ_{self} .
3. **Numerické řešení rovnice přenosu záření:** Výpočet lokální optické tloušťky $\tau_\nu(z)$ v každé atmosférické vrstvě integrací přes všechny molekulární přechody s Voigtovým profilem:

$$\tau_\nu = \int_0^\infty \sum_m n_m(z) \sigma_m(\nu, T(z), P(z)) dz$$

kde $n_m(z)$ je hustota molekul druhu m a σ_m je efektivní absorpční průřez.

1. **Optimalizační fitování:** Kód upravuje sloupcové hustoty H_2O , CO_2 , CH_4 a parametry instrumentálního profilu tak, aby syntetický model po konvoluci s instrumentálním profilem spektrografu minimalizoval odchylky vůči pozorovanému spektru ve vybraných čistých telurických oblastech.

Výsledkem je dokonalé odstranění telurických čar s reziduální chybou pod 1 %, aniž by bylo nutné obětovat jedinou sekundu pozorovacího času!

6.5 Konvoluce s instrumentálním profilem

Teoretická transmisní funkce atmosféry $T_{\text{synth}}(\lambda) = \exp(-\tau(\lambda))$ obsahuje extrémně úzké čáry s fyzikální šířkou v řádu setin angströmu. Spektrograf však toto spektrum rozmazává svou vlastní **instrumentální funkcí** (Instrumental Profile, IP), často aproximovanou Gaussovským či Voigtovým profilem o šířce $\text{FWHM} = \lambda/R$.

Výsledné pozorovatelné transmisní spektrum $T_{\text{obs}}(\lambda)$ je konvolucí:

$$T_{\text{obs}}(\lambda) = [T_{\text{synth}} * \text{IP}](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_{\text{synth}}(\lambda') \text{IP}(\lambda - \lambda') d\lambda'$$

Korekce spektra vyžaduje dělení právě touto konvolovanou transmisní funkcí.

6.6 Python skript: Odstranění telurických čar syntetickým modelem

Následující kód demonstruje syntetické modelování telurického absorpčního dubletu, konvoluci s instrumentální funkcí a následnou korekci vědeckého hvězdného spektra.

```

import numpy as np

def generate_telluric_transmission(wavelengths_nm, line_centers_nm, line_depths,
line_widths_nm):
    """
    Generuje syntetickou transmisní funkci atmosféry na základě Voigt/Gauss absorpcí.
    """
    tau = np.zeros_like(wavelengths_nm)
    for c, d, w in zip(line_centers_nm, line_depths, line_widths_nm):
        # Optická tloušťka jednotlivé absorpční čáry
        tau += d * np.exp(-0.5 * ((wavelengths_nm - c) / (w / 2.355))**2)
    transmission = np.exp(-tau)
    return transmission

def convolve_with_ip(wavelengths_nm, spectrum, resolving_power):
    """
    Konvoluce spektra s Gaussovským instrumentálním profilem o rozlišení R.
    """
    d_lambda = np.median(np.diff(wavelengths_nm))
    central_lam = np.mean(wavelengths_nm)
    fwhm_ip = central_lam / resolving_power
    sigma_ip = fwhm_ip / 2.355

    # Jádru konvoluce
    n_kernel = int(np.ceil(6 * sigma_ip / d_lambda))
    if n_kernel % 2 == 0:
        n_kernel += 1
    k_x = np.arange(-(n_kernel//2), n_kernel//2 + 1) * d_lambda
    kernel = np.exp(-0.5 * (k_x / sigma_ip)**2)
    kernel /= np.sum(kernel)

    convolved = np.convolve(spectrum, kernel, mode='same')
    return convolved

<h1>Mřížka vlnových délek kolem kyslíkového pásu B (cca 687 nm)</h1>
wave = np.linspace(686.0, 690.0, 2000)

<h1>Simulace hvězdného kontinua s vlastní absorpční čarou hvězdy na 688.0 nm</h1>
stellar_flux_true = 1.0 - 0.3 * np.exp(-0.5 * ((wave - 688.0) / 0.15)**2)

<h1>Simulace telurických čar O2 (centra čar a hloubky)</h1>
telluric_centers = [686.8, 687.1, 687.4, 687.9, 688.4, 689.2]
telluric_optical_depths = [2.5, 3.0, 2.2, 1.8, 1.5, 0.9]
telluric_widths = [0.03] * len(telluric_centers)

<h1>Čistá atmosferická transmise</h1>
trans_native = generate_telluric_transmission(wave, telluric_centers, telluric_optical_depths,

```

```
telluric_widths)

<h1>Pozorovaný tok v dalekohledu se spektrografem o rozlišení  $R = 40\,000$ </h1>
R_spec = 40000.0
<h1>Světlo hvězdy prochází atmosférou:  $F_{\text{obs}} = (F_{\text{star}} * T_{\text{atm}}) * IP$ </h1>
observed_flux = convolve_with_ip(wave, stellar_flux_true * trans_native, R_spec)
<h1>Transmisní model konvolvovaný se stejným IP</h1>
telluric_model_convolved = convolve_with_ip(wave, trans_native, R_spec)

<h1>Korekce: dělení konvolvovaným modelem</h1>
corrected_flux = observed_flux / np.maximum(telluric_model_convolved, 0.05)

print("Korekce telurického spektra dokončena:")
print(f"Pozorovaný tok na 687.1 nm (hluboká telurika): {observed_flux[np.argmin(np.abs(wave - 687.1))]:.3f}")
print(f"Korigovaný tok na 687.1 nm: {corrected_flux[np.argmin(np.abs(wave - 687.1))]:.3f} (skutečné kontinuum = 1.000)")
print(f"Tok v jádru hvězdné čáry na 688.0 nm: {corrected_flux[np.argmin(np.abs(wave - 688.0))]:.3f} (skutečný = 0.700)")
```

Část III: Fyzikální interpretace spekter

Zatímco první dvě části této monografie byly věnovány optice přístrojů a precizní redukci detektorových dat, třetí část představuje samotný vrchol astrofyzikálního bádání — **fyzikální interpretaci spektrálních čar a kontinua**.

Spektrum hvězdy je přímým otiskem termodynamických, chemických a dynamických poměrů v její fotosféře. Každý foton, který opouští hvězdu, v sobě nese zprávu o teplotě, hustotě elektronů, intenzitě gravitačního pole, chemickém složení, rychlosti rotace a magnetické aktivitě prostředí, v němž byl vytvořen či pohlcen.

V této stěžejní části knihy propojíme kvantovou mechaniku a statistickou fyziku s moderními pozorovacími technikami:

- **V Kapitole 7** prozkoumáme klasifikaci hvězdných spekter v systému Morgan-Keenan (MK). Odvodíme Boltzmannovu a Sahaovu rovnici a ukážeme, proč je teplota primárním parametrem řídícím vzhled hvězdných spekter (od horkých hvězd třídy O až po chladné trpaslíky tříd M, L, T a Y). Zahrneme také analýzu Hertzsprungova-Russellova diagramu.
- **V Kapitole 8** pronikneme do kvantitativní spektrální analýzy: definujeme ekvivalentní šířku spektrální čáry W_λ , rozebereme mechanismy rozšíření spektrálních čar (Doppler, Lorentz, Voigt) a zkonstruuujeme křivku růstu (Curve of Growth). Vysvětlíme modelování hvězdných atmosfér v režimech LTE a non-LTE a postupy určování chemických abundancí prvků $[X/\text{Fe}]$.
- **V Kapitole 9** propojíme spektroskopii s kinematikou a prostorovým zobrazemím. Vysvětlíme měření radiálních rychlostí metodou křížové korelace (CCF), analýzu tvaru bisektoru čar pro odlišení hvězdné aktivity od exoplanetárních signálů a princip **Dopplerovy tomografie** pro mapování skvrn na rotujících hvězdách a akrečních disků v těsných dvojhvězdách.

Kapitola 7: Spektrální klasifikace Morgan–Keenan

Když astronomové v 19. století poprvé namířili spektroskopy na oblohu, byli ohromeni nesmírnou rozmanitostí hvězdných spekter. Některé hvězdy vykazovaly pouze několik mohutných temných čar vodíku, jiné tisíce jemných kovových linek a další složité molekulární absorpční pásy připomínající zuby pily. Zpočátku panovalo přesvědčení, že tato pestrost odráží radikálně odlišné chemické složení jednotlivých hvězd.

Teprve v průběhu 20. let 20. století — díky průkopnické disertační práci Cecilie Payne-Gaposchkinové (1925) a aplikaci kvantové termodynamiky — vyšlo najevo, že **chemické složení drtivě většiny hvězd je v hrubých rysech identické** (přibližně 73 % vodíku, 25 % helia a 2 % těžších prvků podle hmotnosti). Dramatické rozdíly ve vzhledu spekter jsou téměř výhradně důsledkem **rozdílné efektivní teploty T_{eff} a hustoty elektronů** ve fotosféře hvězdy.

7.1 Od harvardské posloupnosti k systému Morgan–Keenan

Vývoj moderní spektrální taxonomie prošel dvěma zásadními etapami:

1. **Harvardská klasifikace (Annie Jump Cannon, Edward Pickering):** Na počátku 20. století analyzovaly astronomky z Harvard College Observatory desítky tisíc fotografických spekter. Annie Jump Cannon zredukovala původní abecední členění na přirozenou teplotní posloupnost základních spektrálních tříd:

$$\mathbf{O - B - A - F - G - K - M}$$

Každá třída je dále rozdělena na 10 desítkových podtříd od 0 do 9 (např. B0, B1, ..., B9, A0, A1, ...). Slunce je hvězda typu **G2**.

1. **Dvourozměrný systém Morgan–Keenan (MK, 1943, 1953):** William W. Morgan, Philip C. Keenan a Edith Kellman z Yerkesovy observatoře si uvědomili, že samotná spektrální třída nestačí. Dvě hvězdy se stejnou efektivní teplotou (např. G2) mohou mít diametrálně odlišný poloměr a svítivost (sluneční trpaslík vs. veleobr). Zavedli proto druhou dimenzi — **třidu svítivosti** (Luminosity Class), která je přímo svázána s tlakovým rozšířením spektrálních čar.

7.2 Fyzikální podstata spektrálních tříd

Základní posloupnost spektrálních tříd seřazená podle klesající efektivní povrchové teploty má následující astrofyzikální charakteristiku:

- **Třída O ($T_{\text{eff}} > 30\,000\text{ K}$):** Modré, extrémně horké a masivní hvězdy. Ve fotosféře panuje tak vysoká ionizace, že neutrální vodík i neutrální helium jsou téměř zcela ionizovány. Dominují absorpční čáry jedenkrát ionizovaného helia **He II** ($\lambda 4541 \text{ \AA}$, $\lambda 4686 \text{ \AA}$), vysoce ionizovaného uhlíku, dusíku a kyslíku (C III, N III, O III).
- **Třída B ($10\,000\text{ K} \leq T_{\text{eff}} < 30\,000\text{ K}$):** Modrobílé hvězdy (např. Rigel, Spica). Maximum dosahují čáry neutrálního helia **He I** ($\lambda 4026 \text{ \AA}$, $\lambda 4471 \text{ \AA}$). Čáry vodíku (Balmerova série) plynule sílí od B0 k B9.
- **Třída A ($7\,500\text{ K} \leq T_{\text{eff}} < 10\,000\text{ K}$):** Bílé hvězdy (např. Vega, Sirius). Dominují extrémně hluboké a široké čáry **Balmerovy série vodíku** ($H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$, $H\delta$), které dosahují absolutního maxima u podtřídy **A0** ($T_{\text{eff}} \approx 9\,520\text{ K}$). Začínají se objevovat slabé čáry ionizovaného vápníku **Ca II K**.
- **Třída F ($6\,000\text{ K} \leq T_{\text{eff}} < 7\,500\text{ K}$):** Žlutobílé hvězdy (např. Procyon, Polárka). Balmerovy čáry vodíku slábnou, zatímco čáry ionizovaného vápníku **Ca II H a K** prudce mohutní. Objevují se četné linie neutrálních i ionizovaných kovů (Fe I, Fe II, Cr I).
- **Třída G ($5\,200\text{ K} \leq T_{\text{eff}} < 6\,000\text{ K}$):** Žluté hvězdy solárního typu (např. Slunce, Alfa Centauri A, Capella). Nejsilnějšími prvky spektra jsou rezonanční dublet **Ca II H & K** ($\lambda 3968 \text{ \AA}$ a $\lambda 3933 \text{ \AA}$) a molekulární **G-pás** molekuly CH kolem $\lambda 4300 \text{ \AA}$. Spektrum je protkáno tisíci čarami neutrálního železa Fe I.
- **Třída K ($3\,700\text{ K} \leq T_{\text{eff}} < 5\,200\text{ K}$):** Oranžové hvězdy (např. Arcturus, Aldebaran). Vodíkové čáry jsou velmi slabé. Dominuje neutrální vápník **Ca I** ($\lambda 4227 \text{ \AA}$), rezonanční sodíkový dublet **Na I D** ($\lambda 5890 \text{ \AA}$ a $\lambda 5896 \text{ \AA}$) a hustý

les kovových absorpcí.

- **Třída M** ($2\,400\text{ K} \leq T_{\text{eff}} < 3\,700\text{ K}$): Červení trpaslíci a červení veleobři (např. Proxima Centauri, Betelgeuse). Teplota fotosféry je natolik nízká, že se v ní udržují stabilní chemické vazby jednoduchých molekul. Spektru zcela dominují obrovské molekulární absorpční pásy **oxidu titaničitého (TiO)** a **oxidu vanadičitého (VO)**, které vytvářejí charakteristický pilovitý profil kontinua.

Moderní rozšíření pro hnědé trpaslíky: L, T, Y

Objev substelárních objektů (hnědých trpaslíků s hmotností pod $0,075\,M_{\odot}$, v jejichž jádrech se nikdy nevznítily stabilní termonukleární reakce fúze vodíku) si vyžádal rozšíření klasické posloupnosti:

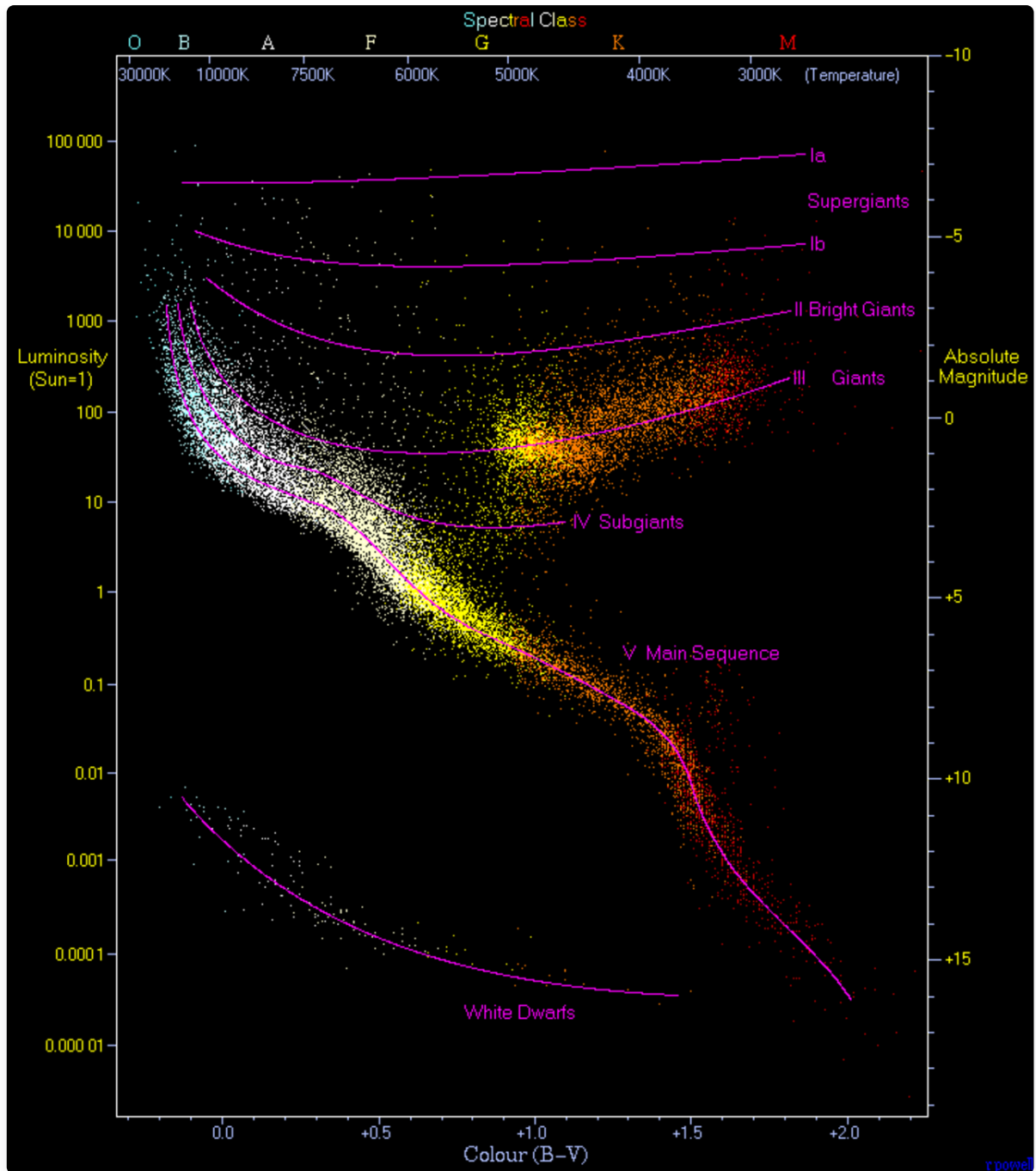
- **Třída L** ($1\,300\text{ K} \leq T_{\text{eff}} < 2\,400\text{ K}$): Pásy TiO mizí (titan kondenzuje do pevných prachových zrn minerálů perovskitu CaTiO_3 a enstatitu). Dominují hydridy kovů (**FeH**, **CrH**) a extrémně rozšířené alkalické čáry draslíku K I a sodíku Na I.
- **Třída T** ($700\text{ K} \leq T_{\text{eff}} < 1\,300\text{ K}$): Metanové hnědé trpaslíky. Spektru v blízké IR dominují mocné absorpční pásy **metanu (CH₄)** a **vodní páry (H₂O)**.
- **Třída Y** ($T_{\text{eff}} < 700\text{ K}$): Ultrachladní hnědí trpaslíci s povrchovými teplotami srovnatelnými s lidským tělem či pokojovou teplotou (300 K). Ve spektru se objevují pásy **čpavku (NH₃)**.

7.3 Třídy svítivosti a tlakové rozšíření čar

Systém MK definuje osm základních tříd svítivosti označovaných římskými číslicemi:

Třída svítivosti	Popis	Typický zástupce	Typická hodnota $\log g$ [cgs]
Ia-O / O	Hyperobři	Pistol Star, VY Canis Majoris	$\approx -0,5$ až $0,5$
Ia	Jasně veleobry	Deneb (A2 Ia)	$\approx 1,0$
Ib	Normální veleobry	Betelgeuse (M2 Ib)	$\approx 1,5$
II	Jasně obry	Mintaka (O9.5 II)	$\approx 2,5$
III	Normální obry	Arcturus (K1.5 III)	$\approx 3,0$
IV	Podobry	Procyon (F5 IV-V)	$\approx 3,8$
V	Hlavní posloupnost (trpaslíci)	Slunce (G2 V)	$\approx 4,44$
VI / sd	Podtrpaslíci (subdwarfs)	Kapteynova hvězda	$\approx 4,8$
VII / D	Bílí trpaslíci (degenerované hvězdy)	Sirius B (DA2)	$\approx 8,0$





Hertzsprungův-Russellův diagram

Fyzikální mechanismus: Proč tlak rozšiřuje spektrální čáry?

Povrchové gravitační zrychlení g hvězdy je dáno Newtonovým zákonem:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Veleobr o hmotnosti $15 M_{\odot}$ a poloměru $500 R_{\odot}$ má povrchovou gravitaci přibližně $10\,000\times$ menší než sluneční trpaslík téže teploty ($\log g \approx 0,5$ vs. $\log g \approx 4,44$).

Podle rovnice hydrostatické rovnováhy $\frac{dP}{dr} = -\rho g$ vede nízká gravitace veleobrů k extrémně rozlehlé fotosféře s velmi **nízkým tlakem plynu a nízkou hustotou elektronů P_e** . Naopak u trpaslíků hlavní posloupnosti (a extrémně u bílých trpaslíků) je fotosférický tlak obrovský.

V hustém fotosférickém plazmatu narážejí neutrální atomy a volné elektrony vysokou frekvencí do atomů vyzařujících světlo. Elektrické mikropole sousedních iontů narušuje kvantové energetické hladiny atomu (**Starkovo tlakové rozšíření**). Důsledkem je:

- **Hvězdy třídy V (trpaslíci):** Mají velmi široká, difúzní tlumicí křídla Balmerových čar vodíku (šířka čáry až desítky angströmů).
- **Hvězdy třídy I (veleobry):** Vykazují extrémně úzké a hluboké spektrální čáry vodíku i kovů.

7.4 Boltzmannova a Saha rovnice

Matematický základ pro interpretaci spektrálních tříd položily dvě fundamentální rovnice statistické mechaniky.

Boltzmannova excitační rovnice

Uvažujme plyn v lokální termodynamické rovnováze (LTE) o teplotě T . Poměr počtu atomů téhož prvku a téhož ionizačního stavu nacházejících se ve dvou různých kvantových excitačních stavech a a b s energiemi E_a a E_b je dán Boltzmannovým rozdělením:

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b}{g_a} \exp\left(-\frac{E_b - E_a}{k_B T}\right)$$

kde g_a a g_b jsou statistické váhy daných energetických hladin (pro vodíkovou hladinu s hlavním kvantovým číslem n platí $g_n = 2n^2$).

Relativní podíl atomů v excitovaném stavu b vůči celkovému počtu atomů daného ionizačního stupně N_{total} získáme zavedením **partiční funkce** (stavové sumy) $u(T)$:

$$\frac{N_b}{N_{\text{total}}} = \frac{g_b}{u(T)} \exp\left(-\frac{E_b}{k_B T}\right), \quad \text{kde} \quad u(T) = \sum_i g_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$$

Sahova ionizační rovnice

Indický fyzik Meghnad Saha odvodil v roce 1920 termodynamickou rovnováhu mezi dvěma po sobě jdoucími ionizačními stavy j a $j+1$:

$$\frac{N_{j+1}}{N_j} P_e = \frac{2k_B T \cdot u_{j+1}(T)}{u_j(T)} \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_j}{k_B T}\right)$$

kde:

- $P_e = n_e k_B T$ je partiální tlak volného elektronového plynu ve fotosféře,
- m_e je klidová hmotnost elektronu,
- χ_j je ionizační potenciál potřebný k odtržení elektronu z ionizačního stavu j ,
- $u_j(T)$ a $u_{j+1}(T)$ jsou partiční funkce příslušných stavů.

Proč Balmerovy čáry vodíku vrcholí právě u hvězd A0?

Balmerova série absorpčních čar vodíku (např. $H\alpha$ na 6563 Å, $H\beta$ na 4861 Å) vzniká přechodem elektronu z **prvního excitovaného stavu** ($n = 2$) do vyšších hladin ($n \geq 3$). Energie hladiny $n = 2$ je $E_2 = 10,2$ eV nad základním stavem ($n = 1$), zatímco ionizační energie vodíku je $\chi = 13,6$ eV.

Počet atomů schopných absorbovat Balmerův foton je dán součinem:

$$\frac{N_2}{N_{\text{vodík, celkem}}} = \left(\frac{N_2}{N_{\text{HI}}}\right)_{\text{Boltzmann}} \cdot \left(\frac{N_{\text{HI}}}{N_{\text{vodík, celkem}}}\right)_{\text{Saha}}$$

1. **Při nízkých teplotách** ($T < 7\,000\text{ K}$, **třídy G, K, M**): Téměř veškerý vodík je neutrální ($N_{\text{HI}}/N_{\text{total}} \approx 1$), avšak termální energie $k_B T$ je příliš nízká ($k_B T \ll 10,2\text{ eV}$), takže podle Boltzmannovy rovnice je frakce atomů na excitované hladině $n = 2$ mizivá ($\approx 10^{-8}$). Balmerovy čáry jsou proto slabé.
2. **Při velmi vysokých teplotách** ($T > 15\,000\text{ K}$, **třídy O, B**): Ačkoliv Boltzmannův člen roste, termální energie je tak velká, že podle Sahovy rovnice dochází k téměř totální ionizaci vodíku na volné protony a elektrony ($N_{\text{HI}}/N_{\text{total}} \rightarrow 0$). Protony nemají žádné vázané elektrony a nemohou absorbovat čárové záření.
3. **Při teplotě** $T \approx 9\,500 - 10\,000\text{ K}$ (**třída A0**): Tyto dva protichůdné trendy se přesně protínají. Frakce vodíkových atomů v neutrálním stavu excitovaných do hladiny $n = 2$ dosahuje svého globálního maxima (cca 10^{-4} až 10^{-5} všech atomů vodíku). Právě proto vykazují hvězdy spektrální třídy A nejhlubší a nejmohutnější Balmerovy čáry v celém vesmíru!

7.5 Spektra neobvyklých hvězd

Vesmír nabízí i spektra vymykající se standardní MK posloupnosti:

1. **Wolfovy–Rayetovy hvězdy (WR)**: Masivní hvězdy v pozdních fázích vývoje, které odvrhly své vodíkové obálky mohutným hvězdným větrem (rychlosti $1\,000$ až $3\,000\text{ km/s}$). Jejich spektra postrádají absorpční čáry a skládají se výhradně ze širokých, intenzivních emisních čar helia a dusíku (hvězdy typu **WN**), nebo uhlíku a kyslíku (hvězdy typu **WC** a **WO**).
2. **Uhlíkové hvězdy (C-hvězdy, typ C–R, C–N)**: Vyvinuté obří hvězdy na asymptotické větvi obrů (AGB), u nichž produkty héliového hoření (uhlík ^{12}C) byly konvekci vyneseny do fotosféry (tzv. *dredge-up*), takže poměr abundancí $\text{C/O} > 1$. Veškerý kyslík je svázán do stabilního oxidu uhelnatého (CO) a přebytečný uhlík vytváří temné **Swanovy molekulární pásy** C_2 a kyanidové pásy CN.
3. **Ap a Bp hvězdy**: Hvězdy hlavní posloupnosti s mimořádně silnými dipólovými magnetickými poli (až desítky tisíc gaussů). Magnetická pole brání vertikálnímu promíchávání fotosféry, což vede k atomové difúzi a radiačnímu tlaku — spektra vykazují anomální nadbytky vzácných zemin (např. europia, stroncia, křemíku či praseodymu) o 3 až 5 řádů vůči solárnímu složení!

7.6 Python skript: Výpočet populace Balmerovy hladiny vodíku

Následující kód počítá a vykresluje relativní zastoupení excitovaného neutrálního vodíku na hladině $n = 2$ v závislosti na teplotě pro fotosférický elektronový tlak $P_e = 20\text{ Pa}$ (200 dyn/cm^2).

```

import numpy as np

def boltzmann_fraction_n2(T_K):
    """Poměr N_2 / N_1 pro neutrální vodík podle Boltzmannovy rovnice."""
    k_B = 1.380649e-23 # J/K
    e_charge = 1.602176e-19 # J/eV
    delta_E = 10.2 * e_charge # 10.2 eV mezi n=1 a n=2
    g1 = 2 * (1**2) # g_1 = 2
    g2 = 2 * (2**2) # g_2 = 8

    # N_2 / N_1
    ratio = (g2 / g1) * np.exp(-delta_E / (k_B * T_K))
    # N_2 / N_total(HI) = (N_2 / N_1) / (1 + N_2/N_1 + ...)
    return ratio / (1.0 + ratio)

def saha_ionization_fraction_H(T_K, P_e_Pa=20.0):
    """Zlomek ionizovaného vodíku N(H II) / N(H celkem) podle Sahovy rovnice."""
    k_B = 1.380649e-23
    m_e = 9.109383e-31
    h = 6.626070e-34
    e_charge = 1.602176e-19
    chi_ion = 13.6 * e_charge # 13.6 eV

    # Saha: (N_II / N_I) * P_e = 2 * (u_II / u_I) * (2<em>pi</em>m_e<em>k_B</em>T / h^2)^(3/2)
    * exp(-chi / k_B T)
    # Pro vodík: u_I ≈ 2, u_II = 1 (volný proton) -> u_II / u_I = 0.5
    term1 = 2.0 * 0.5 * (k_B * T_K) / P_e_Pa
    term2 = ((2.0 * np.pi * m_e * k_B * T_K) / (h<strong>2))</strong>1.5
    term3 = np.exp(-chi_ion / (k_B * T_K))

    ratio_II_over_I = term1 * term2 * term3
    # N(H I) / N(H total) = 1 / (1 + N_II / N_I)
    fraction_neutral = 1.0 / (1.0 + ratio_II_over_I)
    return fraction_neutral

<h1>Teplotní síť od 3 000 K do 25 000 K</h1>
temps = np.linspace(3000, 25000, 1000)
f_boltzmann = boltzmann_fraction_n2(temps)
f_saha_neutral = saha_ionization_fraction_H(temps, P_e_Pa=20.0)

<h1>Celková relativní populace hladiny n=2</h1>
balmer_population = f_boltzmann * f_saha_neutral

<h1>Nalezení teplotního maxima</h1>
idx_max = np.argmax(balmer_population)
T_peak = temps[idx_max]

```

```
print(f"Výpočet Sahovy a Boltzmannovy rovnice pro fotosféru vodíku (Pe = 20 Pa):")
print(f"Teoretické maximum populace hladiny n=2 (vrchol Balmerovy série): {T_peak:.0f} K")
print(f"Relativní frakce atomů na n=2 při maximu: {balmer_population[idx_max]:.2e}")
print(f"Frakce neutrálního vodíku při maximu: {f_saha_neutral[idx_max]*100.0:.1f} %")
print(f"Odpovídající spektrální třída MK: A0 - A1 (teplota Vega ~ 9 600 K)")
```

Kapitola 8: Měření ekvivalentních šířek a chemických abundancí

Zatímco spektrální klasifikace Morgan-Keenan poskytuje rychlý globální přehled o teplotě a třídě svítivosti hvězdy, moderní astrofyzika vyžaduje přesné kvantitativní stanovení fyzikálních parametrů hvězdných fotosfér a detailního chemického složení. Chceme znát přesnou koncentraci desítek chemických prvků od uhlíku, kyslíku a železa až po těžké prvky jako baryum či europium.

Klíčem k tomuto poznání je exaktní analýza profilů spektrálních čar a teorie **křivky růstu**.

8.1 Definice a geometrický význam ekvivalentní šířky

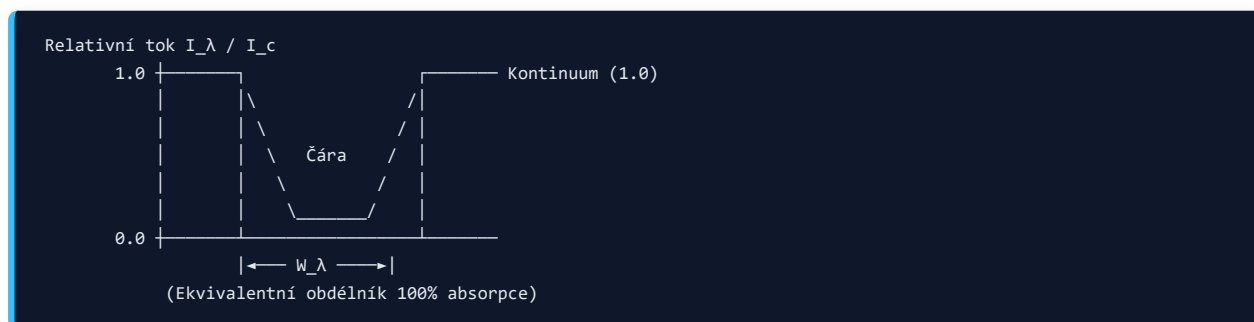
Základní integrální veličinou používanou pro kvantifikaci celkové intenzity absorpční (nebo emisní) spektrální čáry je **ekvivalentní šířka** W_λ (Equivalent Width).

Uvažujme normalizované spektrum, kde I_λ je intenzita záření v profilu čáry a I_c je extrapolovaná intenzita okolního spojitého spektra (kontinua). Ekvivalentní šířka je definována vztahem:

$$W_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{I_\lambda}{I_c}\right) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_c - I_\lambda}{I_c} d\lambda$$

V frekvenční škále platí analogický vztah pro W_ν :

$$W_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{I_\nu}{I_c}\right) d\nu, \quad \text{přičemž} \quad \frac{W_\lambda}{\lambda} = \frac{W_\nu}{\nu}$$



Geometrický význam W_λ je velmi intuitivní: W_λ představuje **šířku zcela černé absorpční čáry pravoúhlého tvaru** (s nulovým zbytkovým tokem v jádře, $I_\lambda/I_c = 0$), která pohltí z kontinua přesně stejné množství energie jako reálná zkoumaná spektrální čára.

Ekvivalentní šířka má rozměr délky a v astronomii se standardně udává v **miliangströmech** ($1 \text{ m}\AA = 10^{-13} \text{ m} = 10^{-4} \text{ nm}$), angströmech ($\AA$) nebo nanometrech (**nm**).

📌 ZAJÍMAVOST

Proč je ekvivalentní šířka tak mocný nástroj? Ekvivalentní šířka slabých a středně silných spektrálních čar je **invariantní vůči spektrálnímu rozlišení přístroje!** Pokud pozorujeme tutéž hvězdu spektrografem s rozlišením $R = 20\,000$ a následně přístrojem s $R = 100\,000$, tvar čáry na detektoru se dramaticky změní (u vyššího rozlišení je čára užší a hlubší), avšak celková plocha pod čarou — tedy integrál W_λ — zůstává naprosto identický!

8.2 Fyzikální mechanismy rozšíření spektrálních čar

Reálná spektrální čára není nekonečně úzká Diracova delta funkce, nýbrž má konečný profil daný třemi základními fyzikálními procesy:

1. Přírozené zářivé rozšíření (Natural Broadening)

Vychází přímo z Heisenbergova principu neurčitosti pro energii a čas: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$. Protože excitovaný atom má konečnou dobu života $\tau_{\text{life}} \approx 10^{-8}$ s, má energetická hladina přirozenou šířku $\Delta E \approx \hbar/\tau_{\text{life}}$. Výsledný profil čáry je **Lorentzův profil**:

$$\phi_L(\Delta\nu) = \frac{\gamma/4\pi^2}{(\Delta\nu)^2 + (\gamma/4\pi)^2}$$

kde tlumicí konstanta γ je rovna součtu Einsteinových koeficientů spontánní emise: $\gamma \approx \sum A_{ki}$. Typická přirozená šířka čáry ve vlnových délkách je velmi malá: $\Delta\lambda_{\text{nat}} \approx 10^{-4} \text{ \AA}$.

2. Tepelné Dopplerovské rozšíření (Thermal Doppler Broadening)

Atomy v horké hvězdné fotosféře konají chaotický tepelný pohyb popsaný Maxwellovým-Boltzmannovým rozdělením rychlostí. Průmět rychlosti atomu do zorného paprsku pozorovatele v_z vyvolává Dopplerův posuv $\Delta\lambda/\lambda_0 = v_z/c$. Konvolucí přes všechny atomy získáme **Gaussovský profil**:

$$\phi_D(\Delta\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\lambda_D} \exp\left[-\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right)^2\right]$$

kde **Dopplerovská šířka** $\Delta\lambda_D$ zahrnuje nejen termální pohyb, nýbrž i drobná turbulentní víření fotosféry menší než střední volná dráha fotonu (**mikroturbulenci** ξ_t):

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2k_B T}{m_{\text{atom}}} + \xi_t^2}$$

Pro atomy železa ve sluneční fotosféře ($T \approx 5778$ K, $\xi_t \approx 1$ km/s) činí Dopplerovská šířka přibližně $\Delta\lambda_D \approx 0,03 \text{ \AA}$.

3. Tlakové a srážkové rozšíření (Pressure Broadening)

Elektrická pole sousedních iontů, elektronů a neutrálních atomů vodíku působí na absorbující atom během srážky a posouvají jeho energetické hladiny. Srážkové rozšíření má rovněž Lorentzovský profil s efektivní srážkovou tlumicí konstantou $\gamma_{\text{coll}} \propto P_{\text{gas}}$.

Voigtův profil

Kombinovaný profil spektrální čáry vzniká konvolucí centrálního Gaussovského jádra (způsobeného Dopplerovým jevem) a širokých Lorentzovských křídel (způsobených zářivým útlumem a srážkami). Výsledkem je **Voigtův profil**:

$$\phi_V(\Delta\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\lambda_D} H(a, v)$$

kde $H(a, v)$ je bezrozměrná **Voigtova funkce**:

$$H(a, v) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-y^2)}{(v-y)^2 + a^2} dy$$

s bezrozměrnou frekvencí $v = \Delta\lambda/\Delta\lambda_D$ a **tlumícím parametrem** (damping parameter) a :

$$a = \frac{\gamma_{\text{total}} \lambda_0^2}{4\pi c \Delta \lambda_D}$$

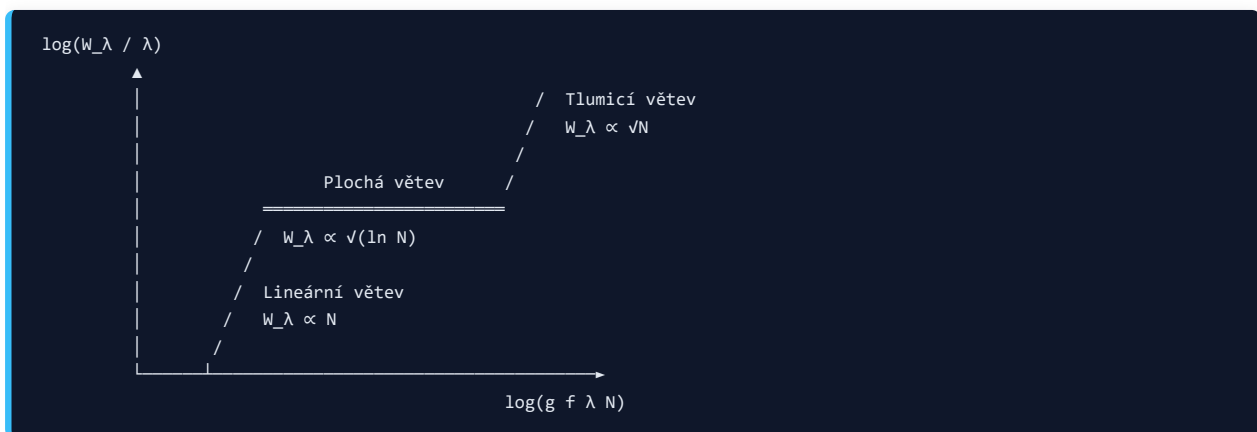
V typických hvězdných fotosférách je parametr a velmi malý ($a \approx 10^{-3}$ až 10^{-1}). Voigtův profil má proto téměř čistě Gaussovské jádro, avšak v křídlech ($\Delta\lambda > 3\Delta\lambda_D$) výrazně převyšuje exponenciálně klesající Gaussův profil a klesá pomalu jako $1/(\Delta\lambda)^2$.

8.3 Křivka růstu (Curve of Growth)

Křivka růstu (Curve of Growth, CoG) představuje fundamentální závislost ekvivalentní šířky W_λ na počtu absorbujících atomů N ve sloupci fotosféry nad jednotkou plochy. Obvykle se vynáší v logaritmických souřadnicích:

$$\log\left(\frac{W_\lambda}{\lambda}\right) \quad \text{vůči} \quad \log(N \cdot gf \cdot \lambda)$$

kde g je statistická váha dolní hladiny a f je síla oscilátoru přechodu (oscillator strength).



Křivka růstu vykazuje tři fyzikálně odlišné režimy:

1. Lineární větev (Linear Branch, opticky tenký plyn)

Pro slabé čáry je optická tloušťka v jádře čáry velmi malá ($\tau_0 \ll 1$). Foton procházející plynem má malou pravděpodobnost zachytu a každý přidaný atom přímo přispívá k absorbovanému toku. Ekvivalentní šířka roste přímo úměrně počtu atomů:

$$\frac{W_\lambda}{\lambda} = \frac{\pi e^2}{m_e c^2} \lambda f N \propto N$$

Ve směrnicovém tvaru má lineární větev sklon roven přesně 1,0: $\log(W_\lambda/\lambda) \propto 1 \cdot \log(N)$.

❗ DŮLEŽITÉ

Ideální oblast pro chemické abundance: Čáry ležící na lineární větvi křivky růstu ($W_\lambda \leq 30 \text{ mÅ}$) jsou ideální pro určování chemických abundancí, protože jejich ekvivalentní šířka nezávisí na mikroturbulenci ξ_t ani na parametru útlumu a !

2. Plochá větev (Flat / Saturated Branch, saturace jádra)

Když optická tloušťka v centru čáry dosáhne jednotky ($\tau_0 \sim 1$ až 10^3), jádro čáry se nasýtí (dosáhne nulového toku). Přidání dalších atomů již nemůže absorbovat více fotonů v jádře; absorpce se může šířit pouze do křídel Gaussova profilu. V tomto režimu roste ekvivalentní šířka extrémně pomalu:

$$\frac{W_\lambda}{\lambda} \approx \frac{2\Delta\lambda_D}{\lambda} \sqrt{\ln\left(\frac{\tau_0}{\ln 2}\right)} \propto \sqrt{\ln N}$$

Sklon křivky se blíží nule. Ekvivalentní šířka v této oblasti silně závisí na Dopplerovské šířce $\Delta\lambda_D$, a tedy na **mikroturbulenci** ξ_t .

3. Tlumič větev (Damping Branch, opticky tlustý plyn)

Pro extrémně silné čáry ($\tau_0 > 10^4$) začne optická tloušťka v dalekých Lorentzovských křídlech Voigtova profilu přesahovat jednotku. Křídla čáry mohutní a ekvivalentní šířka roste úměrně odmocnině z počtu atomů:

$$\frac{W_\lambda}{\lambda} \propto \sqrt{aN} \propto \sqrt{N}$$

Sklon v logaritmických souřadnicích je roven 0,5. Zde leží nejsilnější čáry fotosféry: Balmerovy čáry vodíku, Na I D a Ca II H & K.

8.4 Modelování hvězdných atmosfér a LTE

Pro převod změřených ekvivalentních šířek na chemické abundance se využívají syntetické modely hvězdných atmosfér:

- **Modely v lokální termodynamické rovnováze (LTE):** Předpokládají, že v každé tenké vrstvě atmosféry o lokální teplotě $T(r)$ a tlaku $P(r)$ jsou rychlosti částic popsány Maxwellovým rozdělením, excitace atomů Boltzmannovou rovnicí a ionizace Sahaovou rovnicí. Mezi nejznámější 1D modely patří sítě **ATLAS9** (Robert Kurucz) a **MARCS** (Bengt Gustafsson et al.).
- **Ne-LTE efekty (NLTE):** Ve vysokých vrstvách fotosféry je hustota plynu tak nízká, že srážkové procesy nestačí vyrovnávat nerovnováhu způsobenou únikem záření. Populace atomových hladin se odchylují od LTE ($n_i = b_i n_i^{\text{LTE}}$, kde b_i je koeficient odchylky). Zanedbání NLTE efektů může vést k chybám v abundancích železa či kyslíku o desítky procent!

8.5 Notace chemických abundancí a nukleosyntéza

V astrofyzice se absolutní chemická abundance prvku X definuje na logaritmické škále vztažené k vodíku:

$$\log \epsilon(X) = \log \left(\frac{N_X}{N_H} \right) + 12,00$$

kde pro vodík z definice platí $\log \epsilon(H) = 12,00$.

Relativní metalicita hvězd vůči Slunci se vyjadřuje v běžné závorkové notaci:

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \log \left(\frac{N_{\text{Fe}}}{N_{\text{H}}} \right)_* - \log \left(\frac{N_{\text{Fe}}}{N_{\text{H}}} \right)_\odot$$

- $[\text{Fe}/\text{H}] = 0,0$: Sluneční metalicita ($Z_\odot \approx 0,014$).
- $[\text{Fe}/\text{H}] = -1,0$: Hvězda s desetinovým obsahem železa vůči Slunci (staré hvězdy tlustého disku).
- $[\text{Fe}/\text{H}] \leq -2,0$: Extrémně chudé hvězdy galaktického hala (Populační třída II).
- $[\text{Fe}/\text{H}] \leq -4,0$ až $-6,0$: Reliktní hvězdy s chemickým otiskem prvních supernov Populační třídy III.

Poměr $[\alpha/\text{Fe}]$ (kde α -prvky jsou O, Mg, Si, Ca, Ti vytvořené zachytem heliových jader) poskytuje unikátní **chemické hodiny galaktické archeologie**: α -prvky vznikají výhradně v masivních hvězdách s rychlým kolapsem jádra (Core-Collapse Supernovae, SN II) na časové škále milionů let, zatímco železo vzniká převážně v termonukleárních explozích bílých trpaslíků (Supernovy typu Ia) na časové škále stovek milionů až miliard let.

8.6 Python skript: Křivka růstu s Voigtovým profilem

Následující kód provádí numerickou integraci Voigtova profilu s využitím Faddejevovy funkce (`scipy.special.wofz`) a generuje teoretickou křivku růstu pro tři různé hodnoty tlumicího parametru a .

```

import numpy as np
from scipy import special

def voigt_function(a, v):
    """Výpočet Voigtovy funkce H(a, v) pomocí Faddejevovy funkce w(z)."""
    z = v + 1j * a
    return special.wofz(z).real

def curve_of_growth(tau_0_array, a_damping=0.01):
    """
    Vypočítá ekvivalentní šířku W_lambda / delta_lambda_D pro zadané hodnoty optické tloušťky v
    jádře tau_0.
    """
    w_over_dlam = np.zeros_like(tau_0_array, dtype=float)
    # Sít frekvencí v jednotkách Dopplerovské šířky: v = delta_lambda / delta_lambda_D
    v_grid = np.linspace(0, 100, 5000)

    for i, tau_0 in enumerate(tau_0_array):
        # Optická tloušťka v profilu: tau(v) = tau_0 * H(a, v)
        tau_v = tau_0 * voigt_function(a_damping, v_grid)
        # Hloubka absorpce: 1 - exp(-tau(v))
        depth = 1.0 - np.exp(-tau_v)
        # Symetrický integrál: 2 * int_0^inf depth dv
        w_over_dlam[i] = 2.0 * np.trapz(depth, v_grid)

    return w_over_dlam

<h1>Generování křivky růstu pro rozsah optické tloušťky od 0.01 do 100 000</h1>
tau_range = np.logspace(-2, 5, 40)
a_values = [0.001, 0.01, 0.1]

print("Výpočet teoretické křivky růstu (Curve of Growth):")
print("-" * 65)
print(f"{'log10(tau_0)':<15} {'W/Δλ_D (a=0.001)':<20} {'W/Δλ_D (a=0.01)':<20} {'W/Δλ_D (a=0.1)':<20}")
print("-" * 65)

<h1>Vypočteme pro vybrané reprezentativní body</h1>
sample_log_tau = [-1.0, 0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0]
for lt in sample_log_tau:
    t0 = 10**lt
    w_vals = [curve_of_growth(np.array([t0]), a)[0] for a in a_values]
    print(f"{'lt':<15.1f} {'w_vals[0]':<20.4f} {'w_vals[1]':<20.4f} {'w_vals[2]':<20.4f}")

```

Kapitola 9: Dopplerova tomografie a radiální rychlosti

Světlo je nejen chemickým poslem, ale také nejpřesnějším kosmickým tachometrem. Jakýkoliv relativní pohyb mezi pozorovatelem a zdrojem záření podléhá **Dopplerovu jevu**, který posouvá frekvenci a vlnovou délku spektrálních čar.

V této kapitole prozkoumáme, jak spektroskopie dokáže měřit radiální rychlosti hvězd s přesností na centimetry za sekundu — což umožnilo revoluci v objevování extrasolárních planet —, a jak lze z časových změn profilů spektrálních čar rekonstruovat dvourozměrné mapy povrchů rotujících hvězd a plynných akrečních disků v těsných dvojhvězdách metodou **Dopplerovy tomografie**.

9.1 Dopplerův jev v astrofyzice

Pro pohybující se zdroj záření je relativistický vztah mezi pozorovanou vlnovou délkou λ_{obs} a laboratorní klidovou vlnovou délkou λ_0 dán formulí speciální teorie relativity:

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + v_r/c}{1 - v_r/c}}$$

kde v_r je radiální rychlost (s konvencí, že $v_r > 0$ značí vzdalování — červený posuv, a $v_r < 0$ přibližování — modrý posuv).

Pro nerelativistické rychlosti typické pro hvězdy v naší Galaxii ($|v_r| \ll c$) můžeme odmocninu rozvinout do Taylorovy řady:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{v_r}{c} \implies v_r = c \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0}{\lambda_0}$$

Při rychlosti $v_r = 1 \text{ km/s}$ činí posuv čáry na vlnové délce 500 nm pouhých $\Delta\lambda = 0,0017 \text{ \AA}$ ($0,17 \text{ pm}$).

9.2 Metoda křížové korelace (CCF)

Pokud bychom měřili polohu jediné spektrální čáry, byli bychom limitováni fotonovým šumem v jejím jádře a dosáhli bychom přesnosti maximálně několika desítek až stovek metrů za sekundu.

V roce 1979 publikovali John Tonry a Marc Davis revoluční metodu **křížové korelace** (Cross-Correlation Function, CCF). Namísto měření jedné čáry využívá CCF informaci ze **všech tisíců spektrálních čar** zaznamenaných v echelle spektru současně.

Převědeme-li vlnové délky do logaritmické škály $w = \ln \lambda$, změní se Dopplerův posuv na konstantní aditivní posuv nezávislý na vlnové délce:

$$w_{\text{obs}} = \ln \lambda_{\text{obs}} = \ln \left[\lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right) \right] \approx \ln \lambda_0 + \frac{v}{c} = w_0 + \Delta w$$

Křížová korelační funkce mezi pozorovaným spektrem hvězdy $S(w)$ a laboratorní numerickou šablonou (maskou) $M(w)$ je definována jako konvoluční integrál:

$$\text{CCF}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(w) \cdot M\left(w - \frac{v}{c}\right) dw$$

Binární numerické masky (např. spektrograf HARPS)

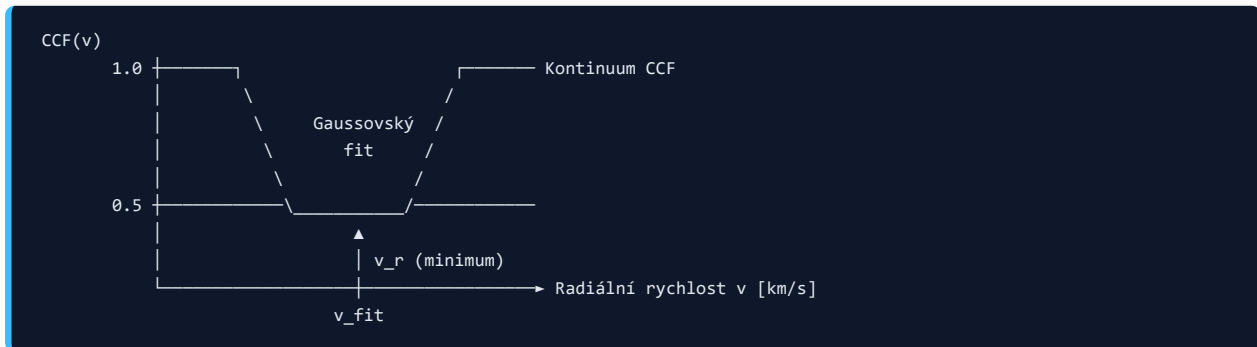
V moderních spektrografech je šablona $M(w)$ reprezentována souborem Diracových delta funkcí umístěných na přesných laboratorních pozicích neblended čar, vážených jejich hloubkou a citlivostí na rychlost:

$$M(w) = \sum_{k=1}^K w_k \delta(w - w_k)$$

Výsledná funkce $CCF(v)$ vzniklá sečtením tisíců čar je extrémně hladký, symetrický profil připomínající obrácený Gaussův profil s mimořádně vysokým poměrem signálu k šumu:

$$(S/N)_{CCF} \approx (S/N)_{\text{spektrum}} \cdot \sqrt{N_{\text{čar}}}$$

Obsahuje-li spektrum 5 000 absorpčních čar, vzroste poměr signálu k šumu přibližně $70\times$! Vrchol CCF je fitován analytickým Gaussovým profilem a jeho minimum udává radiální rychlost v_r s přesností na centimetry za sekundu.



9.3 Tvar čáry a bisektor: Odlišení exoplanet od hvězdné aktivity

Když astronomové měří radiální rychlosti na sub-metrové úrovni, narážejí na fundamentální problém: **hvězdy nejsou klidné koule svítícího plynu**. Fotosféra hvězdy neustále bublá v důsledku konvekce (granulace a supergranulace) a na jejím povrchu se objevují tmavé magnetické skvrny a jasné fakulová pole.

- **Konvektivní modrý posuv:** Horký plyn stoupá ve středech granulí vysokou rychlostí nahoru (k pozorovateli, modrý posuv) a pokrývá většinu plochy. Chladnější plyn klesá v úzkých mezigranulárních štěrbinách dolů (od pozorovatele, červený posuv). Výsledný integrovaný profil čáry je asymetrický a vykazuje čistý modrý posuv o několik set metrů za sekundu.
- **Magnetické skvrny:** Když se na rotující hvězdě objeví chladná magnetická skvrna, potlačí konvekci a zakryje část rotujícího disku. Tím poruší symetrii profilu čáry a vyvolá falešný posuv minima CCF, který může dokonale imitovat signál obíhající planety!

K odlišení skutečného gravitačního pohybu vyvolaného planetou od hvězdné aktivity slouží **analýza bisektoru čáry**:

1. Bisektor je geometrická osa spojující středy horizontálních úseček protínajících profil CCF v různých hloubkách od jádra až ke kontinuu.
2. Defnuje se **bisektorový rozpon** (Bisector Velocity Span, BVS neboli BIS) jako rozdíl rychlostí bisektoru mezi horní částí profilu (např. v hloubce 80 % kontinua) a dolní částí (v hloubce 20 %):

$$BVS = v_{\text{top}} - v_{\text{bottom}}$$

❗ DIAGNOSTIKA EXOPLANETY VS. AKTIVITA:

* Pokud je periodický posuv radiální rychlosti způsoben **obíhající exoplanetou**, posouvá se celá hvězda jako tuhé těleso. Tvar čáry se nemění, bisektor se posouvá paralelně a korelace mezi radiální rychlostí v_r a bisektorovým rozponem BVS je **nulová**. * Pokud je posuv způsoben **hvězdnou skvrnou či aktivitou**, asymetrie čáry se v průběhu rotace mění a pozorujeme **silnou lineární korelaci mezi v_r a BVS**!

9.4 Detekce extrasolárních planet

Pohybuje-li se kolem hvězdy o hmotnosti M_* planeta o hmotnosti M_p po dráze se sklonem i vůči zornému paprsku ($i = 90^\circ$ pro dráhu viděnou z boku), obíhají obě tělesa kolem společného těžiště (barycentra). Hvězda vykonává reflexní orbitální pohyb popsany Keplerovskou radiální křivkou:

$$v_r(t) = \gamma + K [\cos(\nu(t) + \omega) + e \cos \omega]$$

kde γ je systémová rychlost soustavy, $\nu(t)$ je pravá anomálie, ω je argument pericentra, e je numerická výstřednost dráhy a K je **poloamplituda rychlosti**:

$$K = \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_* + M_p)^{2/3}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$$

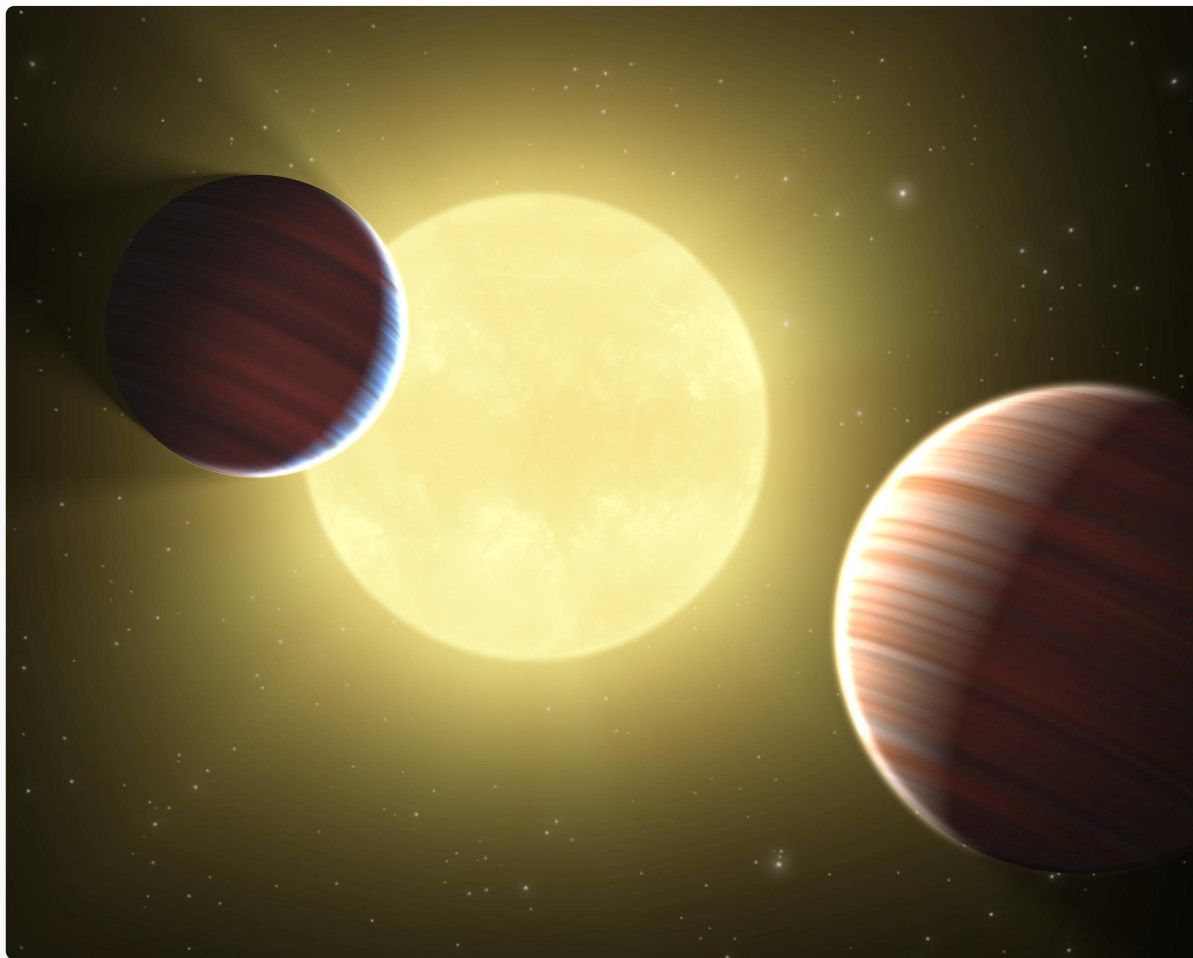
Pro kruhovou dráhu ($e = 0$) a $M_p \ll M_*$ lze poloamplitudu vyjádřit v praktických jednotkách:

$$K \approx 28,4 \text{ m/s} \cdot \left(\frac{P}{1 \text{ rok}} \right)^{-1/3} \left(\frac{M_p \sin i}{M_{\text{Jup}}} \right) \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{-2/3}$$

Pro naši Zemi obíhající kolem Slunce je poloamplituda pouhých:

$$K_{\text{Země}} \approx 8,9 \text{ cm/s!}$$

Detekce analogu Země na kruhové dráze o periodě 1 roku vyžaduje spektrografy s dlouhodobou stabilitou lepší než 10 cm/s (jako je ESPRESSO na VLT).



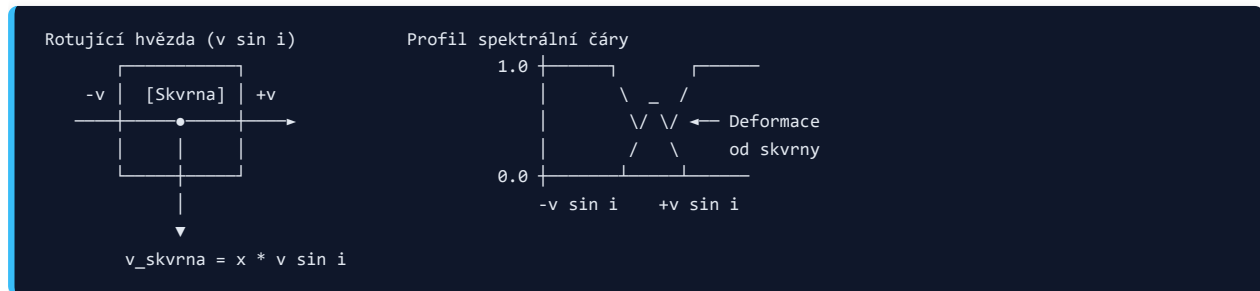
Tranzit exoplanety a spektroskopie

9.5 Dopplerova tomografie rotujících hvězd (Doppler Imaging)

U rychle rotujících hvězd ($v \sin i \geq 20$ až 100 km/s) jsou spektrální čáry silně rozšířeny rotačním Dopplerovým profilem. Každý bod na viditelném disku hvězdy má specifickou radiální rychlost závisující na jeho poloze x na disku:

$$v_r(x) = x \cdot v \sin i, \quad \text{kde } x \in [-1, 1]$$

Je-li na povrchu hvězdy chladná skvrna, vyzařuje v daném místě méně toku. V profilu široké absorpční čáry se tato skvrna projevuje jako **lokální emisní deformace (hrbol)** na rychlosti odpovídající okamžité poloze skvrny na disku:



Jak hvězda rotuje kolem své osy, skvrna putuje po disku a deformace v profilu čáry se plynule posouvá z modrého křídla (vstup na rotující disk) přes střed čáry až do červeného křídla (západ skvrny za okraj disku).

Inverzním řešením časové řady profilů spektrálních čar pořízených během celé rotační periody hvězdy — pomocí **metody maximální entropie (Maximum Entropy Method, MEM)** či Tichonovovy regularizace — dokážeme zrekonstruovat detailní dvourozměrnou mapu povrchových teplotních skvrn hvězdy.

Zahrneme-li navíc spektropolarimetrická měření ve všech čtyřech Stokesových parametrech (I, Q, U, V), hovoříme o **Zeemanově-Dopplerově zobrazování (ZDI)**, které umožňuje zmapovat kompletní 3D vektorovou topologii fotosférického magnetického pole!

9.6 Dopplerova tomografie akrečních disků

V těsných polodotykových dvojhvězdách (kataklizmatických proměnných a rentgenových dvojhvězdách) přetéká hmota ze sekundární hvězdy přes vnitřní Lagrangeův bod L_1 a dopadá na primární kompaktní složku (bílého trpaslíka či černou díru), kolem níž vytváří rotující **akreční disk**.

V disku plyn obíhá po téměř keplerovských drahách s rychlostí:

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM_1}{r}}$$

Vnitřní části disku rotují obrovskými rychlostmi (tisíce km/s), zatímco vnější okraje rotují pomaleji. Silné emisní čáry ionizovaného vodíku (např. $H\beta$) a helia vykazují charakteristický **dvojvrcholový profil** (double-peaked profile).

Dopplerova tomografie akrečních disků (Marsh & Horne 1988) transformuje prostorové souřadnice (x, y) do roviny rychlostí (v_x, v_y) :

- V rychlostním prostoru se vnější části disku (s malou rychlostí) zobrazují blízko středu, zatímco vnitřní části disku tvoří vnější prstenec.
- Místo, kde dopadající plynný proud naráží na vnější hranu disku (**horká skvrna**, hot spot), se v Dopplerovském tomogramu zobrazuje jako izolovaná, vysoce zářivá oblast s přesně definovaným vektorem rychlosti (v_x, v_y) .

9.7 Python skript: Křížová korelace a měření radiální rychlosti

Následující vědecký kód demonstruje výpočet křížové korelační funkce (CCF) mezi syntetickým spektrem posunutým neznámou rychlostí a šablonou a určuje radiální rychlost fitováním Gaussova profilu k CCF.

```

import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit

def gaussian_ccf_model(v, v_rad, depth, fwhm, continuum):
    """Analytický model CCF profilu jako obráceného Gaussova profilu."""
    sigma = fwhm / 2.355
    return continuum - depth * np.exp(-0.5 * ((v - v_rad) / sigma)**2)

def compute_ccf(velocities_kms, wave_grid_nm, spectrum, template_centers_nm, template_weights):
    """
    Vypočítá křížovou korelační funkci s binární numerickou maskou.
    """
    c_kms = 299792.458
    ccf = np.zeros_like(velocities_kms, dtype=float)

    for i, v in enumerate(velocities_kms):
        # Dopplerovský posuv šablony:  $\lambda = \lambda_0 * (1 + v/c)$ 
        shifted_lines = template_centers_nm * (1.0 + v / c_kms)
        # Interpolace toku spektra na posunutých vlnových délkách čar
        flux_at_lines = np.interp(shifted_lines, wave_grid_nm, spectrum)
        # Vážený součet
        ccf[i] = np.sum(flux_at_lines * template_weights)

    # Normalizace kontinua CCF k 1.0
    ccf /= np.median(ccf)
    return ccf

<h1>Mřížka vlnových délek spektra (450 až 455 nm)</h1>
wave = np.linspace(450.0, 455.0, 10000)
c_light = 299792.458

<h1>Pozice 5 spektrálních čar šablony</h1>
true_lines = np.array([450.8, 451.6, 452.4, 453.5, 454.3])
weights = np.array([0.8, 0.6, 0.9, 0.7, 0.85])

<h1>Simulace spektra hvězdy s radiální rychlostí  $v_{\text{true}} = +15.42$  km/s a šumem</h1>
v_true = 15.42 # km/s
shifted_star_lines = true_lines * (1.0 + v_true / c_light)

star_flux = np.ones_like(wave)
for pos, w in zip(shifted_star_lines, weights):
    # Absorpční čáry o šířce FWHM = 0.03 nm
    star_flux -= w * 0.4 * np.exp(-0.5 * ((wave - pos) / (0.03 / 2.355))**2)
<h1>Přidání gaussovského šumu (S/N = 50)</h1>
np.random.seed(123)
star_flux += np.random.normal(0, 0.02, size=len(wave))

```

```
<h1>Rychlostní síť pro křížovou korelaci (-50 až +80 km/s s krokem 0.5 km/s)</h1>
v_grid = np.linspace(-50, 80, 261)
ccf_profile = compute_ccf(v_grid, wave, star_flux, true_lines, weights)

<h1>Fitování Gaussova profilu kolem minima CCF</h1>
p0 = [v_grid[np.argmin(ccf_profile)], 0.3, 10.0, 1.0]
popt, pcov = curve_fit(gaussian_ccf_model, v_grid, ccf_profile, p0=p0)
v_measured = popt[0]
v_err = np.sqrt(pcov[0, 0])

print(f"Výpočet radiální rychlosti metodou křížové korelace (CCF):")
print(f"Skutečná simulovaná rychlost: v_true = {v_true:+.4f} km/s")
print(f"Změřená radiální rychlost z CCF: v_fit = {v_measured:+.4f} ± {v_err:.4f} km/s")
print(f"Chyba měření: Δv = {(v_measured - v_true)*1000.0:+.1f} m/s")
```

Část IV: Spektroskopie rozlehlých objektů

Klasická spektroskopie, kterou jsme se zabývali v předchozích kapitolách, pracovala s jednou pevnou štěrbinou zaměřenou na jedinou hvězdu. Moderní extragalaktická astronomie a kosmologie však čelí dvěma zcela odlišným výzvám:

1. **Mapování velkorozměrové struktury vesmíru:** K rekonstrukci trojrozměrné mapy kosmické pavučiny a měření baryonových akustických oscilací (BAO) potřebujeme změřit červené posuvy a spektra **milionů galaxií a kvasarů**. Pokud bychom každou galaxii měřili samostatně jednoštěrbinovým spektrografem, trvala by taková přehlídka tisíce let! Řešením je **vláknová multiobjektová spektroskopie (MOS)**, která dokáže současně zaznamenat spektra tisíců objektů v širokém zorném poli dalekohledu.
2. **Detailní fyzika rozlehlých těles:** U blízkých galaxií, planetárních mlhovin a oblastí tvorby hvězd nestačí získat jedno integrované spektrum. Potřebujeme zmapovat kinematiku hvězdného a plynného disku, gradienty metalicity a ionizační stavy v každém jednotlivém bodě galaxie. Řešením je **3D spektroskopie integrálního pole (Integral Field Spectroscopy, IFU)**, která v každém prostorovém pixelu obrazu vytváří plnohodnotné spektrum a skládá trojrozměrnou datovou krychli (x, y, λ) .

V této čtvrté části monografie prozkoumáme technologie, které pohánějí největší současné i budoucí astronomické přehlídky:

- **V Kapitole 10** analyzujeme fyziku optických křemenných vláken, jev degradace světelnosti (FRD) a architekturu masivních multiobjektových systémů s robotickými polohovači (SDSS, DESI, 4MOST).
- **V Kapitole 11** prozkoumáme trojrozměrnou spektroskopii integrálního pole. Detailně popíšeme tři hlavní optické koncepce IFU (matice mikročoček, vláknové svazky a optické kráječe obrazu) a vysvětlíme metody redukce datových krychlí, Voronoiho prostorové binnace a diagnostické diagramy BPT pro odlišení aktivních galaktických jader (AGN) od hvězdotvorných galaxií.

Kapitola 10: Vlákno­vá spektroskopie a multiobjektové systémy

Schopnost vést světelné paprsky tenkými skleněnými vlákny způsobila revoluci nejen v pozemské telekomunikaci, ale zcela proměnila tvář observační astrofyziky. Optická vlákna přinesla dva zásadní průlomy:

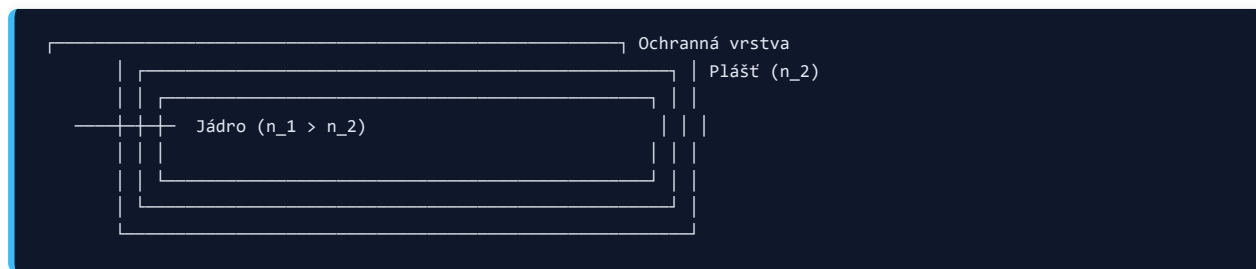
1. **Umožnila oddělit spektrograf od dalekohledu:** Těžký echelle spektrograf již nemusí viset na pohybujícím se tubusu dalekohledu, ale může stát ve vakuu na stabilním betonovém pilíři v podzemní kobce (jak jsme viděli u přístrojů HARPS a ESPRESSO v Kapitole 3).
2. **Otevřela éru masivní multiobjektové spektroskopie (MOS):** Namísto jediné štěrbiny lze v rozsáhlém ohniskovém poli dalekohledu rozmístit stovky až tisíce optických vláken a vést světlo tisíců galaxií a hvězd současně do jediného nebo několika velkých spektrografů.

V této kapitole prozkoumáme fyziku optických vláken, jev degradace světelnosti (FRD) a mechaniku robotických systémů, které mapují miliardy světelných let vesmíru.

10.1 Fyzika optických vláken pro astronomii

Astronomické optické vlákno je tenký dielektrický vlnovod válcové symetrie skládající se ze tří vrstev:

- **Jádro (core):** Centrální válec z ultračistého syntetického křemenného skla (SiO_2) o průměru $d_{\text{core}} \approx 50$ až $200 \mu\text{m}$ s indexem lomu n_1 .
- **Plášť (cladding):** Optická vrstva obklopující jádro, vyrobená z křemíku dopovaného fluorem pro snížení indexu lomu na hodnotu $n_2 < n_1$.
- **Ochranná vrstva (buffer/jacket):** Mechanický obal (polyimid, akrylát či nylon) chránící křehké sklo před vlhkostí a mechanickým poškozením.



Totální vnitřní odraz a numerická apertura

Světelný paprsek šířící se jádrem dopadá na rozhraní s pláštěm pod úhlem θ měřeným k normále rozhraní. Podle Snellova zákona $n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta_t$ nastává **totální vnitřní odraz** tehdy, když úhel dopadu překročí kritický mezní úhel θ_c :

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Maximální úhel θ_{max} , pod kterým může paprsek vstoupit z okolního vzduchu ($n_0 \approx 1$) do čela vlákna, aby byl ještě uvnitř vázán totálním odrazem, definuje **numerickou aperturu (NA)** vlákna:

$$\text{NA} = \sin \theta_{\text{max}} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Z numerické apertury přímo plyne minimální clonové číslo (světelnost) kužele dalekohledu, který vlákno dokáže beze ztrát pojmout:

$$f/\#_{\min} = \frac{1}{2 \tan \theta_{\max}} \approx \frac{1}{2 \cdot \text{NA}}$$

Pro typická astronomická křemenná vlákna je $\text{NA} \approx 0,22$, což odpovídá světelnosti $f/2,3$. Svazky z dalekohledů o světelnosti $f/8$ či $f/15$ proto vlákno pojme s velkou rezervou.

Spektrální propustnost: High-OH vs. Low-OH vlákna

Čisté křemenné sklo má vynikající propustnost, avšak přítomnost stopových hydroxylových skupin (OH^-) v krystalové mřížce vytváří silné absorpční pásy:

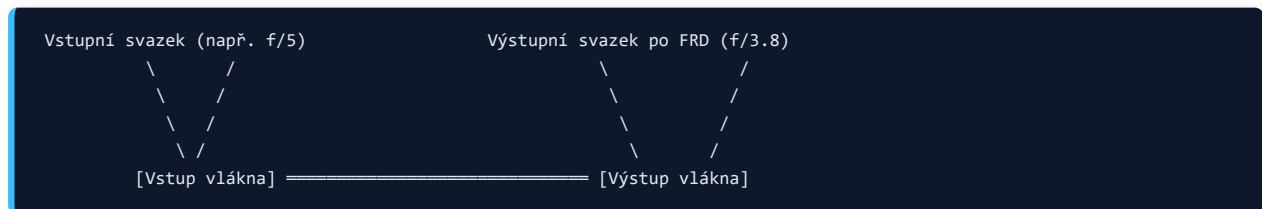
- **High-OH vlákna (mokrý vlákna, $\sim 1\,000$ ppm OH):** Nabízejí skvělou propustnost v ultrafialové a modré oblasti (300 – 500 nm), avšak mají hluboké absorpční pásy vody na vlnových délkách 950 nm, 1,24 μm a 1,38 μm .
- **Low-OH vlákna (suchá vlákna, < 1 ppm OH):** Hydroxylové absorpce jsou eliminovány, což zajišťuje hladkou propustnost od 500 nm do 2,2 μm (blízká infračervená oblast).

10.2 Degradace světelnosti (Focal Ratio Degradation, FRD)

Ideální optické vlákno by zachovávalo úhel, pod kterým paprsek do vlákna vstoupil: světelný kužel o světelnosti $f/5$ na vstupu by vystupoval jako identický kužel $f/5$ na výstupu.

V reálných vláknech však dochází k jevu zvanému **degradace světelnosti** (Focal Ratio Degradation, FRD). Výstupní svazek se rozšiřuje do širšího kužele s nižším clonovým číslem:

$$f/\#_{\text{out}} < f/\#_{\text{in}} \implies \theta_{\text{out}} > \theta_{\text{in}}$$



Fyzikální příčiny FRD:

1. **Mikroskopické ohyby (micro-bending):** Drobné nepravidelnosti a vlnky na rozhraní jádra a pláště vzniklé při tažení skla.
2. **Mechanické pnutí:** Tlak lepidla při zakončování vlákna ve feruli, ostré ohyby vlákna v trase kabelu či kroucení.
3. **Koncové leštění:** Drsný povrch a mikrotrhlínky na čelech vlákna.

Důsledky FRD pro návrh spektrografu:

FRD způsobuje zvětšení optického etendue ($A\Omega$). Pokud spektrograf navrhujeme pro vstupní kužel $f/5$, ale z vlákna vinou FRD vystupuje světlo v kuželu $f/3,8$, dopadne část světla mimo kolimátor a ztratí se (**ztráta propustnosti**). Abychom toto světlo zachytili, musíme kolimátor spektrografu naddimenzovat, což zvětšuje rozměry celé optiky a mřížky a dramaticky zvyšuje finanční náklady!

Scramblery a nekuhová vlákna

Kruhové vlákno dokonale promíchává azimutální úhel světla, avšak radiální promíchávání je nedokonalé. Moderní ultra-stabilní spektrografy proto používají **nekuhová vlákna** (např. s **oktagonálním** či **obdélníkovým průřezem jádra**) nebo optické **scramblery** (dvojice čoček obracející pole a pupilu). Tyto prvky zajišťují dokonalé prostorové promíchání fotonů a činí osvětlení mřížky absolutně nezávislým na tom, jak přesně je obraz hvězdy vycentrován na vstupu vlákna.

10.3 Multiobjektová spektroskopie (MOS)

Při spektroskopickém průzkumu rozsáhlých polí na obloze se uplatňují dvě technologie:

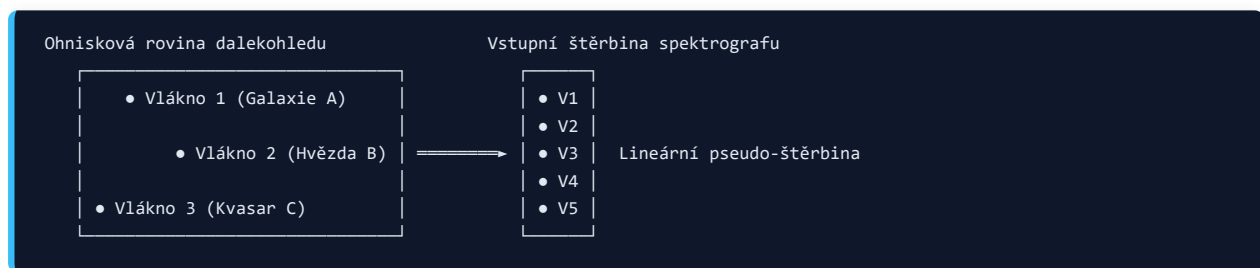
1. Štěrbínové masky (Slit Masks)

Do ohniskové roviny širokoúhlého dalekohledu se vloží tenká kovová deska (např. z invaru či hliníku), do níž vysoce přesný průmyslový laser vyřeže desítky až stovky malých štěrbin přesně na souřadnicích předem vybraných galaxií (např. přístroj FORS2 a VIMOS na VLT).

- **Výhoda:** Dokonalé odečtení pozadí oblohy v bezprostředním okolí každého objektu.
- **Nevýhoda:** Spektra se nesmí na detektoru vzájemně překrývat, což omezuje hustotu cílů a vyžaduje výrobu nové unikátní masky pro každé pole.

2. Vlákňové polohovače (Fiber Positioners)

Optická vlákna jsou flexibilní a umožňují přenést světlo z libovolného místa ohniskové roviny dalekohledu a na výstupu je seřadit do jedné souvislé lineární řady — **umělé vstupní štěrbině** spektrografu:



10.4 Špičkové masivní spektroskopické přehlídky

Historie moderní kosmologie je historií rozvoje vlákňové spektroskopie:

- **2dF (Two-degree Field, AAT):** Australský dalekohled na Siding Spring (konec 90. let). První systém využívající robotické chapadlo ("Flying Acre"), které přemísťovalo 400 vláken s magnetickými koncovkami na ocelové desce. Změřil červené posuvy 220 000 galaxií a poprvé potvrdil baryonové akustické oscilace.
- **SDSS (Sloan Digital Sky Survey):** Vlajková loď 2,5m dalekohledu na Apache Point v Novém Mexiku. Používal ručně zapojované hliníkové desky (plug-plates), do nichž technici ve dne ručně zasunovali 640 (a později 1 000) vláken pro každé pole. Vytvořil největší 3D mapu vesmíru s více než 3 miliony změřených spekter galaxií a kvasarů.
- **LAMOST (Large Sky Area Multi-Object Fibre Spectroscopic Telescope):** Čínský kvazi-meridiánový Schmidtův dalekohled v Xinglong. Obsahuje **4 000 robotických polohovačů** v ohniskové rovině a 16 spektrografů; zmapoval již přes 20 milionů hvězdných spekter Mléčné dráhy.
- **DESI (Dark Energy Spectroscopic Instrument):** Instalován na 4m Mayallově dalekohledu na Kitt Peak v Arizoně. Vrchol současné robotiky: ohnisková rovina o průměru 0,8 m nese **5 000 miniaturních robotických ramen** (polohovačů) s piezoelektrickými motorky. Každé rameno dokáže nastavit vlákno na cíl s přesností lepší než **5 μ m během dvou minut!** DESI měří spektra 5 000 galaxií současně a je schopen za jedinou noc změřit červené posuvy více než 100 000 objektů!

*Observatoř Paranal a VLT*

10.5 Klíčové metodické výzvy vláknové spektroskopie

1. **Aperturní ztráty a barevná závislost:** Bodová funkce seeingového disku hvězdy má jinou velikost v modrém a červeném světle (seeing škáluje jako $\lambda^{-0,2}$). Do vlákna o pevném průměru (např. $1,5''$) vstupuje v modré části spektra jiný podíl světla než v červené části.
2. **Odečtení pozadí noční oblohy (Sky Subtraction):** Ve štěrbinovém spektrografu odečítáme oblohu z pixelů těsně vedle hvězdy na téže štěrbině. Ve vláknovém spektrografu je nutné vyhradit část vláken (např. 10 až 15 % všech vláken) na "prázdná" místa oblohy. Protože každé vlákno má mírně odlišnou propustnost a instrumentální profil, vyžaduje přesné odečtení oblohy komplexní kalibrační modely.

10.6 Python kód: Modelování FRD a optimalizace alokace cílů

Následující vědecký kód simuluje jev degradace světelnosti (FRD) pomocí difúzního rozptylu úhlů a demonstruje základní alokační algoritmus přiřazování vláken cílům v zorném poli.

```
import numpy as np

def simulate_frd(f_in, frd_parameter_deg=1.5, n_rays=100000):
    """
    Simulace degradace světelnosti (FRD) ve vlákne pomocí Gaussovského rozptylu úhlů.

    Parametry:
    -----
    f_in : float - vstupní clonové číslo (např. 5.0)
    frd_parameter_deg : float - parametr vnitřního rozptylu ve stupních
    """
    # Poloviční vstupní úhel svazku
    theta_in_rad = np.arctan(1.0 / (2.0 * f_in))

    # Náhodné úhly paprsků ve vstupním kuželu (rovnoměrná distribuce plochy)
    r = np.sqrt(np.random.uniform(0, 1, n_rays))
    rays_theta_in = r * theta_in_rad

    # FRD rozptyl úhlu (difúzní proces podél délky vlákna)
    sigma_frd = np.radians(frd_parameter_deg)
    frd_scatter = np.random.normal(0, sigma_frd, n_rays)

    rays_theta_out = np.abs(rays_theta_in + frd_scatter)

    # Efektivní výstupní úhel na úrovni 95% uzavřené energie
    theta_out_95 = np.percentile(rays_theta_out, 95)
    f_out_95 = 1.0 / (2.0 * np.tan(theta_out_95))

    return np.degrees(theta_in_rad), np.degrees(theta_out_95), f_out_95

def allocate_fibers_simple(fiber_centers_xy, target_positions_xy, patrol_radius_mm=6.0):
    """
    Jednoduchý hladový alokační algoritmus pro přiřazení vláken cílům.
    """
    n_fibers = len(fiber_centers_xy)
    n_targets = len(target_positions_xy)
    allocation = {}
    assigned_targets = set()

    for f_idx in range(n_fibers):
        f_pos = fiber_centers_xy[f_idx]
        # Vzdálenost ke všem cílům
        dists = np.linalg.norm(target_positions_xy - f_pos, axis=1)
        # Nalezení dostupných cílů v patrolovacím okrsku
        candidates = [t_idx for t_idx in np.argsort(dists)
                       if dists[t_idx] <= patrol_radius_mm and t_idx not in assigned_targets]

        if candidates:
            best_target = candidates[0]
            allocation[f_idx] = best_target
            assigned_targets.add(best_target)
```

```
    efficiency = len(allocation) / min(n_fibers, n_targets) * 100.0
    return allocation, efficiency

<h1>Test FRD simulace</h1>
f_input = 5.0
th_in, th_out, f_output = simulate_frd(f_input, frd_parameter_deg=1.8)

print(f"Simulace degradace světelnosti vlákna (FRD):")
print(f"Vstupní světelnost: f/{f_input:.1f} (poloviční úhel svazku: {th_in:.2f}°)")
print(f"Výstupní světelnost (95% toku): f/{f_output:.2f} (poloviční úhel: {th_out:.2f}°)")
print(f"Zvětšení výstupního kužele v ploše: {(np.tan(np.radians(th_out)) /
np.tan(np.radians(th_in)))**2:.2f}x")

<h1>Test alokace pro 20 robotických polohovačů a 35 galaxií v poli</h1>
np.random.seed(42)
fibers_grid = np.array([[x, y] for x in np.linspace(-15, 15, 5) for y in np.linspace(-12, 12,
4)])
targets = np.random.uniform(-18, 18, size=(35, 2))

alloc, eff = allocate_fibers_simple(fibers_grid, targets, patrol_radius_mm=5.5)
print("-" * 55)
print(f"Alokace vláken: Úspěšně přiřazeno {len(alloc)} z {len(fibers_grid)} vláken (Efektivita:
{eff:.1f} %)")
```

Kapitola 11: Integrální pole IFU a 3D spektroskopie galaxií

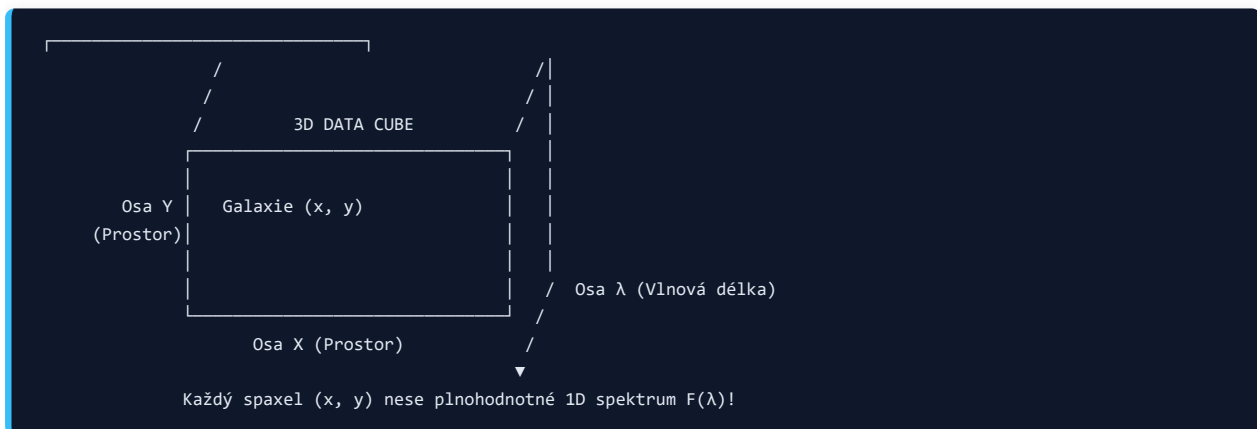
Představme si, že zkoumáme kolidující pár galaxií, v jehož jádrech se probouzejí supermasivní černé díry a v spirálních ramenech probíhá bouřlivá tvorba hvězd. Pokud na takový systém přiložíme klasickou úzkou štěrbinu spektrografu, získáme informaci pouze o jednom úzkém řezu. Pokud bychom chtěli zmapovat celou galaxii, museli bychom štěrbinu postupně posouvat krok za krokem po desítkách pozic — což by bylo nejen časově neúnosné, ale proměnlivý atmosférický seeing a nepřesnosti navedení by znehodnotily homogenitu dat.

Řešením tohoto problému je **spektroskopie integrálního pole (Integral Field Spectroscopy, IFS)** realizovaná pomocí jednotek integrálního pole (**Integral Field Units, IFU**). IFU spektroskopie spojuje svět astrofotografie a spektroskopie do jediného pozorování: pro každý prostorový element obrazu na obloze zaznamenává současně kompletní spektrum.

11.1 Koncept 3D datové krychle

Základním výstupním datovým produktem IFU spektroskopie je **trojrozměrná datová krychle** (datacube) $I(x, y, \lambda)$:

- Dvě prostorové osy (x, y) odpovídají úhlovým souřadnicím na obloze (rektascenzi a deklinaci). Elementární prostorový obrazový prvek se nazývá **spaxel** (spatial pixel).
- Třetí osa λ představuje spektrální dimenzi (vlnovou délku).

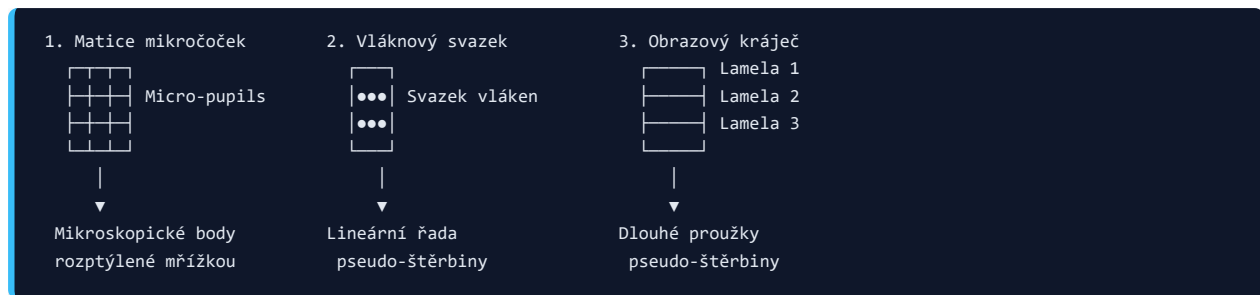


Z jediné datové krychle můžeme provádět libovolné analýzy:

- Integrací přes celou vlnovou osu získáme klasický širokopásmový snímek galaxie.
- Vyříznutím úzkého intervalu vlnových délek kolem emisní čáry získáme monochromatickou mapu záření daného plynu (např. ionizovaného vodíku v čáře H α).
- Analýzou profilu čáry v každém spaxelu zrekonstruujeme mapu prostorové rychlosti a rychlostní disperze hvězd a plynu.

11.2 Tři hlavní optické koncepce IFU

Transformace 2D obrazu oblohy na 2D povrch detektoru CCD tak, aby se spektra jednotlivých prostorových bodů nepřekrývala, vyžaduje důmyslné optické manipulace. V astronomii se vyvinuly tři základní architektury:



1. Matice mikročoček (Lenslet Array)

Do ohniskové roviny dalekohledu je umístěna matice miniaturních čoček (o rozměrech stovek mikrometrů). Každá mikročočka vytvoří ve svém ohnisku mikroskopický bod — zmenšený obraz výstupní pupily dalekohledu (tzv. *mikropupila*). Vzniklá soustava bodů ponechává mezi sebou volný prostor. Svazek následně prochází disperzní mřížkou skloněnou pod specifickým úhlem, takže spektrum každého bodu se rozptýlí do volného mezilehlého prostoru na CCD čipu (např. historické přístroje TIGER a SAURON).

- **Výhoda:** Vysoká optická propustnost bez absorpce ve vláknech.
- **Nevýhoda:** Velmi krátká délka spektra na detektoru (malý spektrální rozsah $\Delta\lambda$).

2. Svazek optických vláken s mikročočkami (Lenslet-Fiber Bundle)

Před čela těsně uspořádaného svazku vláken je předřazena matice mikročoček, která maximalizuje světelný zisk a koncentruje světlo do jader vláken (tzv. *mikročočkový koncentrátor*). Vlákná přenesou fotony z 2D plochy pole a na výstupu jsou seřazena do jedné dlouhé lineární štěrbině vstupující do klasického štěrbinového spektrografu (např. přístroj PMAS/PPAK na Calar Alto či GMOS na observatoři Gemini).

- **Výhoda:** Flexibilita uspořádání a možnost vést světlo do vzdáleného stabilního spektrografu.
- **Nevýhoda:** Ztráty způsobené degradací světelnosti (FRD) a vnitřní absorpcí ve vláknech.

3. Zrcadlové kráječe obrazu (Image Slicers)

Absolutním vrcholem současné IFU technologie jsou **optické kráječe obrazu** (Advanced Image Slicers, navržené Colinem Contentem). V ohniskové rovině je umístěno zrcadlo složené z desítek úzkých zrcadlových pásek (lamel), přičemž každá lamela je vybroušena pod nepatrně odlišným prostorovým úhlem.

Lamely rozříznou 2D obraz galaxie na soustavu úzkých proužků a odrazí je na soustavu sekundárních a terciárních zrcadel, která tyto proužky opticky seřadí za sebe do jedné souvislé **dlouhé štěrbině**:

- **Výhoda:** 100% prostorové pokrytí bez jakýchkoliv hluchých mezer (žádný fill-factor deficit).
- Žádná optická vlákna — žádné FRD ztráty a žádná absorpce skla. Technologie je plně reflexní a funguje od hlubokého UV až po dalekou infračervenou oblast!
- Využívají ji nejmodernější spektrografy světa: **MUSE** na VLT a **NIRSpec IFU** na James Webb Space Telescope.

11.3 Špičkové IFU spektrografy: MUSE a JWST NIRSpec

- **MUSE (Multi Unit Spectroscopic Explorer):** Gigantický přístroj instalovaný na hlavním ohnisku jednoho z 8,2m dalekohledů VLT na Paranal. Využívá 24 identických integrálních spektrografů se zrcadlovými kráječi obrazu. V širokouhlém režimu (WFM) pokrývá pole $1' \times 1'$ se vzorkováním $0,2''$ na spaxel a simultánně zaznamenává **90 000 spekter** v rozsahu 480 až 930 nm. Ve spojení se systémem adaptivní optiky se čtyřmi sodíkovými laserovými vodícími hvězdami dosahuje v úzkouhlém režimu (NFM) difrakčně limitovaného prostorového rozlišení srovnatelného s Hubbleovým dalekohledem!
- **NIRSpec IFU (James Webb Space Telescope):** Kryogenní spektrograf pracující v teplotě pouhých 40 K v bodě L2. Jeho zrcadlový kráječ dělí pole $3'' \times 3''$ na 30 proužků o šířce $0,1''$, což umožňuje detailní 3D spektroskopii nejvzdálenějších galaxií a kvasarů vzniklých v prvních stovkách milionů let po Velkém třesku.



Zrcadlo dalekohledu Jamese Webba

11.4 Kinematické mapování galaxií a Voronoiho binnace

Jasnost galaxie prudce klesá od zářivého centrálního jádra směrem k vnějším okrajům disku podle de Vaucouleursova ($r^{1/4}$) nebo Sérsicova profilu. V centrálních spaxelech dosahuje poměr signálu k šumu hodnot $S/N > 100$, zatímco na periferii klesá pod $S/N \sim 2$.

Pokud bychom analyzovali každý spaxel samostatně, byla by data z vnějších částí nepoužitelná. Tento problém vyřešil algoritmus **adaptivní prostorové Voronoiho binnace** (Cappellari & Copin 2003):

1. V oblastech s vysokým signálem (jádro galaxie) zůstává každý spaxel samostatným bodem o plném prostorovém rozlišení.
2. Na periferii galaxie algoritmus automaticky shlukuje sousední spaxely do nepravidelných Voronoiho buněk (polygonů) tak, aby součet signálu v každé buňce dosáhl předem zvoleného cílového prahu (např. $S/N = 40$).

V každé Voronoiho buňce je následně fitován profil absorpčních či emisních čar pomocí Gauss-Hermiteových polynomů:

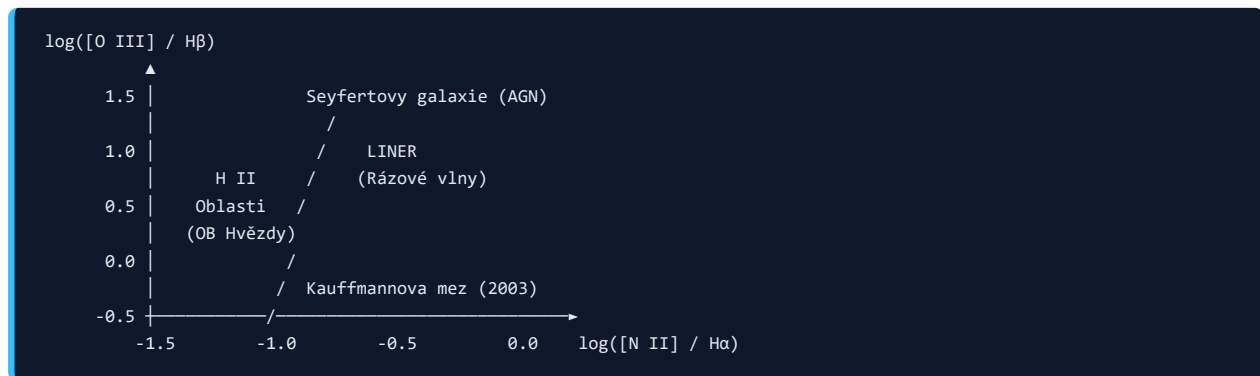
- **Střední radiální rychlost** $V(x, y)$: Určuje rotační křivku galaxie, přítomnost kinematically vyosených jader či protisměrně rotujících disků.
- **Rychlostní disperze** $\sigma_v(x, y)$: Určuje dynamickou hmotnost galaxie a virializovaný stav hvězdného systému.

11.5 Diagnostické diagramy BPT

Jedním z nejvýznamnějších úspěchů extragalaktické spektroskopie je schopnost určit primární zdroj ionizace plynu v galaxií pomocí **BPT diagramů** (pojmenovaných podle autorů: J. A. Baldwin, M. M. Phillips a R. Terlevich, 1981).

BPT diagramy využívají poměry intenzit vybraných optických emisních čar, které leží blízko u sebe ve vlnových délkách, takže poměry jsou nezávislé na mezihvězdné extinkci a kalibraci toku:

$$y = \log_{10} \left(\frac{[\text{O III}] \lambda 5007}{\text{H}\beta} \right) \quad \text{vůči} \quad x = \log_{10} \left(\frac{[\text{N II}] \lambda 6584}{\text{H}\alpha} \right)$$



Fyzikální interpretace oblastí BPT diagramu:

- 1. Oblasti tvorby hvězd (H II regions):** Plyn je fotoionizován měkkým ultrafialovým zářením mladých masivních hvězd tříd O a B ($h\nu < 50 \text{ eV}$). Poměry čar leží v levé dolní větvi pod teoretickou mezí maximálního hvězdného záření (Kewley et al. 2001, Kauffmann et al. 2003).
- 2. Aktivní galaktická jádra (AGN / Seyferty):** Plyn v okolí supermasivní černé díry je ozařován extrémně tvrdým zářením z horkého akrečního disku s fotony o energiích stovek elektronvoltů. To vytváří rozsáhlé částečně ionizované zóny s vysokými poměry $[\text{O III}]/\text{H}\beta$ i $[\text{N II}]/\text{H}\alpha$.
- 3. LINER (Low-ionization Nuclear Emission-line Regions):** Oblasti s nízkou ionizací dominované rázovými vlnami a zářením starých vyvinutých hvězd na post-AGB větvi.

Díky 3D spektroskopii IFU dnes neklasifikujeme celou galaxii jako jediný bod v BPT diagramu, ale dokážeme sestrojit **prostorově rozlišený BPT diagram** — v jádře galaxie pozorujeme AGN ionizaci, zatímco v ramenech čistou hvězdotvorbu!

11.6 Python skript: Práce s 3D krychlí a tvorba BPT diagramu

Následující kód demonstruje syntézu 3D spektrální krychle galaxie, extrakci prostorové mapy emisního toku a klasifikaci spaxelů v BPT diagramu.

```

import numpy as np

def classify_bpt(log_nii_ha, log_oiii_hb):
    """
    Klasifikace spaxelu v BPT diagramu podle empirické meze Kauffmann et al. (2003).

    Kauffmann mez:  $\log([O III]/H\beta) = 0.61 / (\log([N II]/H\alpha) - 0.05) + 1.3$ 
    """
    x = np.array(log_nii_ha, dtype=float)
    y = np.array(log_oiii_hb, dtype=float)

    classification = np.empty_like(x, dtype=object)

    # Podmínka pro Kauffmannovu mez (pouze pro x < 0.05)
    valid_starburst = x < 0.05
    kauffmann_curve = np.full_like(x, np.inf)
    kauffmann_curve[valid_starburst] = 0.61 / (x[valid_starburst] - 0.05) + 1.3

    is_starforming = (x < 0.05) & (y < kauffmann_curve)
    is_agn = ~is_starforming

    classification[is_starforming] = 'Star-Forming (H II)'
    classification[is_agn] = 'AGN / Composite'

    return classification

<h1>Simulace spektrální mřížky 20x20 spaxelů</h1>
np.random.seed(42)
n_spax = 400
<h1>Spaxely v ramenech galaxie (hvězdotvorba)</h1>
log_nii_ha_sf = np.random.normal(-0.6, 0.15, 300)
log_oiii_hb_sf = np.random.normal(0.1, 0.2, 300)

<h1>Spaxely v aktivním jádře galaxie (AGN)</h1>
log_nii_ha_ag = np.random.normal(-0.1, 0.1, 100)
log_oiii_hb_ag = np.random.normal(0.8, 0.15, 100)

all_x = np.concatenate([log_nii_ha_sf, log_nii_ha_ag])
all_y = np.concatenate([log_oiii_hb_sf, log_oiii_hb_ag])

classes = classify_bpt(all_x, all_y)

n_sf = np.sum(classes == 'Star-Forming (H II)')
n_ag = np.sum(classes == 'AGN / Composite')

```

```
print(f"Analýza 3D datové krychle galaxie v BPT diagramu:")
print(f"Celkový počet analyzovaných spaxelů: {len(classes)}")
print(f"Spaxely klasifikované jako H II oblasti tvorby hvězd: {n_sf}
({n_sf/len(classes)*100:.1f} %)")
print(f"Spaxely klasifikované jako ionizace aktivním jádrem (AGN): {n_agn}
({n_agn/len(classes)*100:.1f} %)")
print(f"Reprezentativní bod AGN jádra:  $\log([N II]/H\alpha) = {all\_x[350]:.2f}$ ,  $\log([O III]/H\beta) = {all\_y[350]:.2f}$  -> {classes[350]}")
```

Část V: Přílohy

Závěrečná část této monografie tvoří ucelený referenční a výpočetní aparát pro studenty, výzkumné pracovníky i pokročilé zájemce o astronomickou spektroskopii:

- **Dodatek A: Matematické odvození rozlišovací schopnosti difrakční mřížky** — Přináší kompletní, krok za krokem vedené vlnové odvození rozdělení intenzity Fraunhoferovy difrakce na soustavě N rovnoběžných štěrbin. Definuje polohu hlavních maxim a sekundárních minim a z Rayleighova kritéria rigorózně odvozuje fundamentální vztah $R = mN$.
- **Dodatek B: Redukce a analýza spekter v Pythonu s balíčky Specutils a PyAstronomy** — Představuje ucelený programátorský manuál pro moderní datovou analýzu v ekosystému Astropy. Demonstruje práci s datovými objekty `Spectrum1D`, kontinuální normalizaci, automatické měření ekvivalentních šířek, fitování spektrálních profilů a korekci radiálních rychlostí.
- **Dodatek C: Sběrka 15 řešených výpočetních úloh** — Obsahuje reprezentativní soubor patnácti detailně vyřešených úloh pokrývajících celou šíři knihy: od mřížkové optiky a echelle geometrie přes Horneovu optimální extrakci, Sahovu a Boltzmannovu rovnici, křivku růstu až po radiální rychlosti exoplanet a 3D kinematiku IFU.
- **Dodatek D: Encyklopedický glosář** — Nabízí ucelený česko-anglický výkladový heslář klíčových termínů astronomické spektroskopie s definicemi, vzorci a fyzikálním kontextem.

Dodatek A: Odvození rozlišovací schopnosti difrakční mřížky

V tomto dodatku provedeme rigorózní vlnové odvození úhlového rozdělení intenzity záření pro Fraunhoferovu difrakci na planární mřížce a odvodíme fundamentální vztah pro spektrální rozlišovací schopnost $R = mN$ z Rayleighova kritéria.

A.1 Vlnová interference na soustavě N štěrbin

Uvažujme rovinnou monochromatickou vlnu o vlnové délce λ , která dopadá pod úhlem α na mřížku tvořenou N rovnoběžnými ekvidistantními štěrbinami o šířce b a periodě d ($b < d$). Vlnové pole ve velké vzdálenosti (nebo v ohniskové rovině kamery) pozorované pod difrakčním úhlem β je dáno interferencí vln vycházejících ze všech bodů apertury.

Fázový rozdíl δ mezi vlnami vycházejícími ze středů dvou sousedních štěrbin vzdálených o periodu d je:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d(\sin \alpha + \sin \beta)$$

Fázový rozdíl β_s mezi paprsky z okrajů jediné štěrby o šířce b je:

$$\beta_s = \frac{\pi}{\lambda} b(\sin \alpha + \sin \beta)$$

Komplexní amplituda pole $U(\beta)$ v ohniskové rovině je součtem příspěvků od všech N štěrbin:

$$U(\beta) = U_0 \left(\frac{\sin \beta_s}{\beta_s} \right) \sum_{n=0}^{N-1} \exp(in\delta)$$

kde první člen představuje difrakci na jediné štěrbině (Fraunhoferův difrakční integrál) a suma představuje interferenci N koherentních zdrojů.

Sečtením konečné geometrické řady s kvocientem $q = \exp(i\delta)$ obdržíme:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp(in\delta) = \frac{1 - \exp(iN\delta)}{1 - \exp(i\delta)} = \frac{\exp(iN\delta/2) [\exp(iN\delta/2) - \exp(-iN\delta/2)]}{\exp(i\delta/2) [\exp(i\delta/2) - \exp(-i\delta/2)]} = \exp \left[i(N-1)\frac{\delta}{2} \right] \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$

Výsledné rozdělení intenzity $I(\beta) = |U(\beta)|^2$ je dáno vztahem:

$$I(\beta) = I_0 \left(\frac{\sin \beta_s}{\beta_s} \right)^2 \left(\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right)^2$$

Výraz se skládá ze dvou multiplikativních faktorů:

1. **Jednošterbinová difrakční obálka:** $(\sin \beta_s / \beta_s)^2$, která moduluje celkovou energii a má nuly pro $b(\sin \alpha + \sin \beta) = k\lambda$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).
2. **N -šterbinový interferenční faktor:** $\left[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right]^2$, který vytváří ostrá hlavní maxima a hustou síť sekundárních píků.

A.2 Hlavní maxima a mřížková rovnice

Hlavní maxima interferenčního faktoru nastávají tehdy, když se jmenovatel blíží k nule: $\sin(\delta/2) \rightarrow 0$. To vyžaduje:

$$\frac{\delta}{2} = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Dosadíme-li definici fázového rozdílu δ , dostáváme přímo **mřížkovou rovnici**:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} d(\sin \alpha + \sin \beta) = m\pi \implies d(\sin \alpha + \sin \beta) = m\lambda$$

V limitě $\delta/2 \rightarrow m\pi$ použijeme l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{\delta/2 \rightarrow m\pi} \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(Nm\pi + N\epsilon)}{\sin(m\pi + \epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(-1)^{Nm} \sin(N\epsilon)}{(-1)^m \sin \epsilon} = \pm N$$

Intenzita v hlavním maximu difrakčního řádu m je tedy:

$$I_{\max} = I_0 \cdot N^2 \left(\frac{\sin \beta_s}{\beta_s} \right)^2$$

Intenzita hlavních maxim roste s druhou mocninou počtu vrypů N^2 , zatímco jejich úhlová šířka klesá jako $1/N$. Energie je tak soustředěna do mimořádně ostrých piků.

A.3 Poloha prvních sousedních minim

První nulové minimum bezprostředně sousedící s hlavním maximem řádu m nastává tehdy, když čítec interferenčního faktoru poprvé dosáhne nuly, zatímco jmenovatel zůstává nenulový:

$$\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right) = 0 \quad \text{při} \quad \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \neq 0$$

To vyžaduje:

$$\frac{N\delta_{\min}}{2} = Nm\pi + \pi \implies \frac{\delta_{\min}}{2} = m\pi + \frac{\pi}{N}$$

Označme difrakční úhel tohoto prvního minima jako $\beta + \Delta\beta_0$. Změna fáze odpovídající tomuto úhlovému posuvu je:

$$\Delta\delta = \delta_{\min} - 2m\pi = \frac{2\pi}{N}$$

Diferenciací fázového vztahu při fixním λ a α obdržíme:

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \beta \cdot \Delta\beta_0$$

Odtud plyne úhlová pološířka hlavního maxima k prvnímu minimu:

$$\Delta\beta_0 = \frac{\lambda}{Nd \cos \beta}$$

A.4 Rayleighovo kritérium a teoretické rozlišení

Představme si nyní dvě blízké spektrální čáry o vlnových délkách λ a $\lambda + \Delta\lambda$.

Úhlová poloha hlavního maxima čáry λ v řádu m je dána úhlem β . Úhlová poloha hlavního maxima čáry $\lambda + \Delta\lambda$ je posunuta vlivem disperze o úhel $d\beta$:

$$d\beta = \frac{m}{d \cos \beta} \Delta\lambda$$

Podle **Rayleighova kritéria** jsou obě spektrální čáry právě rozlišitelné, pokud hlavní maximum druhé čáry padne přesně do prvního minima čáry první:

$$d\beta = \Delta\beta_0$$

Dosadíme za obě strany:

$$\frac{m}{d \cos \beta} \Delta\lambda = \frac{\lambda}{Nd \cos \beta}$$

Členy $d \cos \beta$ ve jmenovatelích na obou stranách se přesně vykrátí:

$$m\Delta\lambda = \frac{\lambda}{N} \implies \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

Definujeme-li spektrální rozlišovací schopnost jako $R = \lambda/\Delta\lambda$, získáváme fundamentální výsledek:

$$R_{\text{theor}} = mN$$

A.5 Geometrická interpretace přes maximální dráhový rozdíl

Vztah $R = mN$ má hluboký fyzikální význam ve vlnové optice. Celkový počet vrypů na mřížce o šířce W je $N = W/d$. Dosadíme-li za N do rozlišovací schopnosti:

$$R = m \frac{W}{d} = \frac{W}{d} \frac{d(\sin \alpha + \sin \beta)}{\lambda} = \frac{W(\sin \alpha + \sin \beta)}{\lambda}$$

Čítec tohoto zlomku představuje **maximální celkový dráhový rozdíl** Δs_{max} mezi paprsky procházejícími krajními okraji mřížky:

$$\Delta s_{\text{max}} = W(\sin \alpha + \sin \beta)$$

Rozlišovací schopnost je tedy dána jednoduše počtem vlnových délek, které se vejdou do maximálního optického dráhového rozdílu v apertuře:

$$R = \frac{\Delta s_{\text{max}}}{\lambda}$$

Tento vzorec platí univerzálně pro jakýkoliv interferometrický či disperzní spektrometr (mřížku, echelle, Fabry-Pérotův etalon i Fourierovský spektrometr FTS).

A.6 Difrakční vs. seeingový limit ve spektrografu

Výše odvozené rozlišení $R_{\text{theor}} = mN$ představuje absolutní fyzikální mez platnou pro nekonečně úzkou štěrbinu (nebo difrakčně limitovaný dalekohled bez atmosféry, kde je obrazem hvězdy Airyho disk).

V reálném astronomickém spektrografu na pozemním dalekohledu je však štěrbina nastavena na šířku odpovídající atmosférickému seeingu ($s \sim 1''$), což je mnohonásobně více než Airyho disk dalekohledu. V tomto režimu je rozlišení limitováno geometrickým obrazem štěrby s' na detektoru:

$$R_{\text{slit}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\text{slit}}} = \frac{\lambda}{s' \cdot D^{-1}} = \frac{m\lambda f_{\text{col}}}{sd \cos \alpha}$$

Pro typický pozemní spektrograf se štěrbinou $1''$ dosahuje R_{slit} hodnot 2 000 až 40 000, ačkoliv teoretické difrakční rozlišení samotné mřížky mN může činit 200 000 i více.

Dodatek B: Redukce a analýza spekter v Pythonu

V moderní astrofyzice je standardem otevřený vědecký ekosystém jazyka Python, zastřešený projektem **Astropy** a specializovaným balíčkem **Specutils** ve spojení s knihovnou **PyAstronomy**. V tomto dodatku představujeme praktický referenční manuál pro manipulaci se spektroskopickými daty.

B.1 Datový objekt Spectrum1D

Základním stavebním kamenem balíčku `specutils` je třída `Spectrum1D`, která zapouzdřuje osu vlnových délek, naměřený tok a nejistoty do jediného objektu s plnou kontrolou fyzikálních jednotek (`astropy.units`):

```
import numpy as np
import astropy.units as u
from astropy.nddata import StdDevUncertainty
from specutils import Spectrum1D

<h1>Vytvoření spektra od 4 000 do 7 000 Angströmů</h1>
wavelength = np.linspace(4000, 7000, 3000) * u.AA
flux_data = (np.ones(3000) + np.random.normal(0, 0.02, 3000)) * u.Jy
uncertainty = StdDevUncertainty(0.02 * np.ones(3000) * u.Jy)

spectrum = Spectrum1D(spectral_axis=wavelength, flux=flux_data, uncertainty=uncertainty)

print(spectrum)
<h1>Výstup: <Spectrum1D(flux=<Quantity [1.01, ...]> Jy, spectral_axis=<SpectralAxis [4000., ...]> Angstrom)></h1>
```

Automatický převod jednotek

`Spectrum1D` umožňuje okamžitý převod vlnových délek na frekvenci či energii a toku na libovolné fotometrické jednotky:

```
<h1>Převod osy na frekvenci v GHz</h1>
freq_axis = spectrum.spectral_axis.to(u.GHz, equivalencies=u.spectral())

<h1>Převod toku z Jansky na erg / (s * cm^2 * AA)</h1>
flux_cgs = spectrum.flux.to(u.erg / (u.s * u.cm**2 * u.AA),
                             equivalencies=u.spectral_density(spectrum.spectral_axis))
```

B.2 Kontinuální fitování a normalizace spektra

Před měřením ekvivalentních šířek je nutné spektrum normalizovat — tedy vydělit jej modelem kontinua. Balíček `specutils.fitting` nabízí robustní iterační algoritmy:

```
from specutils.fitting import fit_generic_continuum
from astropy.modeling import models

<h1>Fitování kontinua Čebyševovým polynomem 5. stupně s sigma-clippingem</h1>
fitted_continuum = fit_generic_continuum(spectrum, model=models.Chebyshev1D(degree=5))
continuum_flux = fitted_continuum(spectrum.spectral_axis)

<h1>Normalizované spektrum</h1>
normalized_spectrum = spectrum / continuum_flux
```

B.3 Měření ekvivalentních šířek a fitování čar

Pro normalizované spektrum poskytuje modul `specutils.analysis` přímé funkce pro integraci ekvivalentní šířky a fitování profilů čar:

```
from specutils.analysis import equivalent_width, centroid, fwhm
from specutils import SpectralRegion

<h1>Definice oblasti spektrální čáry (např. čára H-beta kolem 4861 Å)</h1>
line_region = SpectralRegion(4850 * u.AA, 4875 * u.AA)

<h1>Výpočet ekvivalentní šířky přímou integrací</h1>
ew = equivalent_width(normalized_spectrum, regions=line_region)
print(f"Ekvivalentní šířka čáry: {ew:.3f}")

<h1>Výpočet centroidu (střední vlnové délky čáry)</h1>
line_center = centroid(normalized_spectrum, regions=line_region)
print(f"Centroid čáry: {line_center:.2f}")

<h1>Pološířka čáry v polovině maxima (FWHM)</h1>
line_fwhm = fwhm(normalized_spectrum, regions=line_region)
print(f"FWHM čáry: {line_fwhm:.2f}")
```

B.4 Výpočet barycentrické korekce v PyAstronomy

Knihovna `PyAstronomy` obsahuje modul `pyasl` (Python Astronomy Library), který poskytuje precizní algoritmy pro nebeskou mechaniku a redukci dat:

```
from PyAstronomy import pyasl

<h1>Souřadnice observatoře Paranal (VLT, Chile)</h1>
longitude = -70.4042 # stupně
latitude = -24.6272 # stupně
altitude = 2635.0 # metry nad mořem

<h1>Souřadnice hvězdy (např. Tau Ceti: RA = 01h 44m 04s, DEC = -15° 56' 15'')</h1>
ra_deg = 26.017
dec_deg = -15.937
julian_date = 2460200.5 # Juliánské datum pozorování

<h1>Výpočet barycentrické rychlostní korekce (včetně oběhu Země i rotace)</h1>
v_bary, v_helio = pyasl.barycorr_py(julian_date, ra_deg, dec_deg,
                                   longitude, latitude, altitude)

print(f"Barycentrická rychlostní korekce: {v_bary:+.3f} km/s")
```

B.5 Křížová korelace spekter v PyAstronomy

Pro měření relativních radiálních rychlostí dvou spekter slouží funkce `crosscorrRV`:

```
from PyAstronomy import pyasl

<h1>wave : pole vlnových délek (ekvidistantní v logaritmu vlnové délky)</h1>
<h1>flux_obs : pozorované spektrum</h1>
<h1>flux_template : laboratorní šablona</h1>

rv_grid, ccf_values = pyasl.crosscorrRV(wave, flux_obs, wave, flux_template,
                                       rvmin=-100.0, rvmax=100.0, drv=0.5)

<h1>Nalezení minima/maxima CCF</h1>
best_rv = rv_grid[np.argmax(ccf_values)]
print(f"Relativní radiální rychlost: {best_rv:.2f} km/s")
```

B.6 Kompletní vědecký skript pro analýzu spektra

Následující plně soběstačný skript syntetizuje kompletní analýzu: načtení syntetického FITS spektra, detekci kontinua, měření ekvivalentní šířky a fitování Voigtova profilu.

```
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy import special

def voigt_absorption_model(wavelength, cont_level, center, amp, fwhm_g, fwhm_l):
    """Analytický absorpční Voigtův profil nad lineárním kontinuem."""
    sigma = fwhm_g / 2.35482
    gamma = fwhm_l / 2.0
    z = ((wavelength - center) + 1j * gamma) / (sigma * np.sqrt(2.0))
    v_profile = special.wofz(z).real / (sigma * np.sqrt(2.0 * np.pi))
    return cont_level - amp * v_profile

<h1>1. Generování syntetických dat: Absorpční čára H-alfa (656.28 nm)</h1>
np.random.seed(42)
wave = np.linspace(654.0, 658.5, 1000) # v nm
true_cont = 1.0
true_center = 656.28
true_amp = 0.8
true_fwhm_g = 0.25 # Dopplerovské rozšíření
true_fwhm_l = 0.15 # Tlakové/zářivé rozšíření

flux = voigt_absorption_model(wave, true_cont, true_center, true_amp, true_fwhm_g, true_fwhm_l)
<h1>Přidání šumu detektoru (S/N = 80)</h1>
noise = np.random.normal(0, 0.0125, size=len(wave))
flux_obs = flux + noise

<h1>2. Výpočet ekvivalentní šířky přímou numerickou integrací (Simpsonovo/lichoběžníkové pravidlo)</h1>
<h1>Vyřiznutí integračního okna kolem čáry (655.5 až 657.0 nm)</h1>
mask_line = (wave >= 655.2) & (wave <= 657.4)
wave_line = wave[mask_line]
flux_line = flux_obs[mask_line]

<h1>Ekvivalentní šířka W_lambda = int (1 - F / F_cont) dlamba</h1>
integrand = 1.0 - (flux_line / true_cont)
eq_width_nm = np.trapz(integrand, wave_line)
eq_width_mA = eq_width_nm * 10000.0 # převod z nm na mÅ

<h1>3. Nelineární fitování parametrů profilu</h1>
p0 = [1.0, 656.3, 0.5, 0.2, 0.1]
bounds = ([0.8, 655.0, 0.01, 0.001], [1.2, 657.5, 2.0, 1.0, 1.0])
popt, pcov = curve_fit(voigt_absorption_model, wave, flux_obs, p0=p0, bounds=bounds)

print("Automatická spektrální analýza absorpční čáry H-alfa:")
print("-" * 55)
print(f"Změřená ekvivalentní šířka (W_λ): {eq_width_mA:.1f} mÅ ({eq_width_nm:.4f} nm)")
```

```
print(f"Fitovaný střed čáry ( $\lambda_0$ ): {popt[1]:.4f} nm (skutečný: {true_center:.4f} nm)")
print(f"Fitovaná Dopplerovská šířka FWHM_G: {popt[3]*10.0:.2f} Å")
print(f"Fitovaná Lorentzovská šířka FWHM_L: {popt[4]*10.0:.2f} Å")
print(f"Odhad poměru signálu k šumu (S/N): {1.0/np.std(flux_obs[:100]):.1f}")
```

Dodatek C: Sbírka 15 řešených úloh

Tato sbírka obsahuje patnáct detailně vyřešených výpočetních úloh pokrývajících celou šíři astronomické spektroskopie. Každá úloha obsahuje přesné fyzikální zadání, analytický rozbor a numerické řešení s kontrolou jednotek.

Úloha 1: Mřížková rovnice a difrakční úhly

Zadání: Reflexní difrakční mřížka má hustotu vrypů $\sigma = 1\,200$ vrypů/mm. Na mřížku dopadá kolimovaný svazek světla pod úhlem dopadu $\alpha = 25^\circ$. Vypočítejte úhel difrakce β v prvním difrakčním řádu ($m = 1$) pro dvě významné spektrální čáry:

- Čáru vodíku $H\beta$ ($\lambda_1 = 486,1$ nm),
- Čáru vodíku $H\alpha$ ($\lambda_2 = 656,3$ nm).

Řešení: Perioda mřížky d je:

$$d = \frac{1}{\sigma} = \frac{10^{-3} \text{ m}}{1\,200} \approx 8,3333 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 833,33 \text{ nm}$$

Mřížková rovnice zní:

$$m\lambda = d(\sin \alpha + \sin \beta) \implies \sin \beta = \frac{m\lambda}{d} - \sin \alpha$$

Pro zadaný úhel dopadu je $\sin(25^\circ) \approx 0,42262$.

- Pro čáru $H\beta$ ($\lambda_1 = 486,1$ nm):

$$\sin \beta_1 = \frac{1 \cdot 486,1 \text{ nm}}{833,33 \text{ nm}} - 0,42262 = 0,58332 - 0,42262 = 0,16070$$

$$\beta_1 = \arcsin(0,16070) \approx 9,25^\circ$$

- Pro čáru $H\alpha$ ($\lambda_2 = 656,3$ nm):

$$\sin \beta_2 = \frac{1 \cdot 656,3 \text{ nm}}{833,33 \text{ nm}} - 0,42262 = 0,78756 - 0,42262 = 0,36494$$

$$\beta_2 = \arcsin(0,36494) \approx 21,40^\circ$$

Výsledek: Difrakční úhel čáry $H\beta$ činí $9,25^\circ$, pro čáru $H\alpha$ je to $21,40^\circ$. Úhlová separace obou čar na mřížce je $\Delta\beta = 12,15^\circ$.

Úloha 2: Blaze vlnová délka a Littrowova konfigurace

Zadání: Difrakční mřížka má hustotu vrypů $\sigma = 600$ vrypů/mm a blaze úhel $\theta_B = 18,5^\circ$.

- Vypočítejte blaze vlnovou délku λ_B v autokolimační Littrowově konfiguraci v prvním ($m = 1$) a druhém ($m = 2$) difrakčním řádu.
- V jaké části elektromagnetického spektra leží blaze vlnová délka pro $m = 1$?

Řešení: Perioda mřížky je $d = 1/600 \text{ mm}^{-1} = 1,6667 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1\,666,7 \text{ nm}$. V Littrowově konfiguraci platí $\alpha = \beta = \theta_B$, takže mřížková rovnice přechází do tvaru:

$$m\lambda_B = 2d \sin \theta_B$$

Vypočteme součin na pravé straně:

$$2d \sin \theta_B = 2 \cdot 1\,666,7 \text{ nm} \cdot \sin(18,5^\circ) = 3\,333,3 \text{ nm} \cdot 0,31730 = 1\,057,7 \text{ nm}$$

1. Pro $m = 1$:

$$\lambda_{B,1} = \frac{1\,057,7 \text{ nm}}{1} \approx 1\,058 \text{ nm}$$

1. Pro $m = 2$:

$$\lambda_{B,2} = \frac{1\,057,7 \text{ nm}}{2} \approx 528,9 \text{ nm}$$

Výsledek: V prvním řádu je blaze vlnová délka 1 058 nm (blízká infračervená oblast). Ve druhém řádu je blaze vlnová délka 528,9 nm, což odpovídá zelené oblasti viditelného světla.

Úloha 3: Lineární a reciproká disperze spektrografu

Zadání: Spektrograf je osazen mřížkou s 1 800 vrypů/mm pracující v prvním řádu ($m = 1$) v konfiguraci s úhlem difrakce $\beta \approx 30^\circ$. Ohnisková vzdálenost kamerového objektivu je $f_{\text{cam}} = 400 \text{ mm}$. Detektor CCD má velikost pixelu $\Delta x_{\text{pix}} = 13 \mu\text{m}$.

1. Vypočítejte reciprokou lineární disperzi D^{-1} v jednotkách $\text{\AA}/\text{mm}$ a nm/mm .
2. Vypočítejte spektrální rozsah připadající na jeden pixel detektoru ($\Delta\lambda_{\text{pix}}$).

Řešení: Perioda mřížky je $d = 10^6 \text{ nm}/1\,800 \approx 555,56 \text{ nm} = 5\,555,6 \text{ \AA}$. Reciproká lineární disperze je definována vztahem:

$$D^{-1} = \frac{d\lambda}{dx} = \frac{d \cos \beta}{m f_{\text{cam}}}$$

Dosadíme zadané hodnoty ($\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \approx 0,86603$):

$$D^{-1} = \frac{555,56 \text{ nm} \cdot 0,86603}{1 \cdot 400 \text{ mm}} = \frac{481,13 \text{ nm}}{400 \text{ mm}} \approx 1,2028 \text{ nm/mm} = 12,03 \text{ \AA/mm}$$

Spektrální rozsah na jeden pixel o velikosti $\Delta x_{\text{pix}} = 13 \mu\text{m} = 0,013 \text{ mm}$ je:

$$\Delta\lambda_{\text{pix}} = D^{-1} \cdot \Delta x_{\text{pix}} = 12,028 \text{ \AA/mm} \cdot 0,013 \text{ mm} \approx 0,156 \text{ \AA/pix} = 0,0156 \text{ nm/pix}$$

Výsledek: Reciproká disperze spektrografu je 12,03 $\text{\AA}/\text{mm}$ (1,203 nm/mm). Na jeden pixel detektoru připadá 0,156 $\text{\AA}$ spektra.

Úloha 4: Rozlišení sodíkového dubletu a rozlišovací schopnost

Zadání: Sodíkový rezonanční dublet Na I D se skládá ze dvou čar: D_2 na $\lambda_1 = 5\,889,95 \text{ \AA}$ a D_1 na $\lambda_2 = 5\,895,92 \text{ \AA}$.

1. Jakou minimální spektrální rozlišovací schopnost R musí spektrograf mít, aby podle Rayleighova kritéria tyto čáry právě rozlišil?
2. Jakou minimální šířku W musí mít mřížka se 600 vrypů/mm pracující v prvním řádu, aby tohoto rozlišení dosáhla?

Řešení:

1. Rozdíl vlnových délek obou složek činí:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 5\,895,92 \text{ \AA} - 5\,889,95 \text{ \AA} = 5,97 \text{ \AA}$$

Střední vlnová délka je $\lambda_0 \approx 5\,893 \text{ \AA}$. Minimální rozlišovací schopnost je:

$$R = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = \frac{5\,893 \text{ \AA}}{5,97 \text{ \AA}} \approx 987$$

1. Z teoretické rozlišovací schopnosti mřížky $R = mN$ plyne minimální počet osvětlených vrypů v prvním řádu ($m = 1$):

$$N = \frac{R}{m} = \frac{987}{1} = 987 \text{ vrypů}$$

Při hustotě $\sigma = 600 \text{ vrypů/mm}$ je minimální šířka osvětlené plochy mřížky:

$$W = \frac{N}{\sigma} = \frac{987}{600 \text{ mm}^{-1}} \approx 1,65 \text{ mm}$$

Výsledek: K rozlišení sodíkového dubletu postačuje rozlišení $R \approx 987$. Difrakční mřížka s 600 vrypů/mm k tomu teoreticky potřebuje šířku pouhých 1,65 mm (v praxi je rozlišení limitováno šířkou štěrby).

Úloha 5: Echelle spektrografie — difrakční řád a FSR

Zadání: Echelle spektrograf využívá mřížku R2 s periodou $d = 31,6 \text{ }\mu\text{m}$ a blaze úhlem $\theta_B = 63,43^\circ$.

1. Určete difrakční řád m , v němž je v autokolimační geometrii pozorována čára ionizovaného vápníku Ca II K ($\lambda = 393,37 \text{ nm}$).
2. Vypočítejte volný spektrální interval (Free Spectral Range, $\Delta\lambda_{\text{FSR}}$) v tomto řádu.
3. Vypočítejte $\Delta\lambda_{\text{FSR}}$ pro čáru H α ($\lambda = 656,28 \text{ nm}$).

Řešení:

1. V Littrowově konfiguraci platí $m\lambda = 2d \sin \theta_B$. Konstanta $2d \sin \theta_B$ pro tuto mřížku je ($\sin 63,43^\circ = 2/\sqrt{5} \approx 0,89443$):

$$2d \sin \theta_B = 2 \cdot 31,6 \text{ }\mu\text{m} \cdot 0,89443 = 56,528 \text{ }\mu\text{m} = 56\,528 \text{ nm}$$

Pro čáru Ca II K ($\lambda = 393,37 \text{ nm}$):

$$m = \frac{56\,528 \text{ nm}}{393,37 \text{ nm}} \approx 143,7 \implies m = 144$$

1. Volný spektrální interval pro $m = 144$ na centrální vlnové délce $\lambda_c = 56\,528/144 \approx 392,56 \text{ nm}$:

$$\Delta\lambda_{\text{FSR}} = \frac{\lambda_c}{m} = \frac{392,56 \text{ nm}}{144} \approx 2,73 \text{ nm} = 27,3 \text{ \AA}$$

1. Pro čáru H α ($\lambda = 656,28 \text{ nm}$):

$$m_{\text{H}\alpha} = \frac{56\,528 \text{ nm}}{656,28 \text{ nm}} \approx 86,1 \implies m = 86$$

$$\Delta\lambda_{\text{FSR}} = \frac{656,28 \text{ nm}}{86} \approx 7,63 \text{ nm} = 76,3 \text{ \AA}$$

Výsledek: Čára Ca II K se nachází v řádu $m = 144$ s $\Delta\lambda_{\text{FSR}} = 2,73 \text{ nm}$. Čára H α leží v řádu $m = 86$ a její volný spektrální rozsah je téměř třikrát širší: 7,63 nm.

Úloha 6: Ztráty na štěrbině (Slit Losses)

Zadání: Pozorování probíhá na dalekohledu při seeingu s Gaussovským profilem o pološirce $\text{FWHM} = 1,20''$. Štěrba spektrografu má úhlovou šírku $\theta_s = 0,80''$ a je dokonale vycentrována na střed hvězdy.

1. Vypočítejte disperzi σ seeingového disku.
2. Jaké procento světla projde štěrbinou do spektrografu (η_{slit})?
3. O kolik magnitud klesne jasnost hvězdy v důsledku aperturní ztráty na štěrbině?

Řešení:

1. Pro Gaussovský profil platí vztah mezi FWHM a směrodatnou odchylkou σ :

$$\sigma = \frac{\text{FWHM}}{2\sqrt{2\ln 2}} = \frac{\text{FWHM}}{2,35482} = \frac{1,20''}{2,35482} \approx 0,5096''$$

1. Propustnost štěrby o širce θ_s vycentrované na $x = 0$ je:

$$\eta_{\text{slit}} = \text{erf}\left(\frac{\theta_s/2}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \text{erf}\left(\frac{0,40''}{\sqrt{2} \cdot 0,5096''}\right) = \text{erf}\left(\frac{0,40''}{0,7207''}\right) = \text{erf}(0,5550)$$

Využijeme tabulku nebo rozvoj chybové funkce: $\text{erf}(0,5550) \approx 0,567$ neboli 56,7 %.

1. Ztráta v magnitudách činí:

$$\Delta m = -2,5 \log_{10}(\eta_{\text{slit}}) = -2,5 \log_{10}(0,567) \approx -2,5 \cdot (-0,2464) \approx 0,62 \text{ mag}$$

Výsledek: Štěrbinou projde 56,7 % toku hvězdy (ztráta činí 43,3 % fotonů), což odpovídá zeslabení signálu o 0,62 mag.

Úloha 7: Anamorfní faktor a projekce štěrby

Zadání: Spektrograf má kolimátor o ohniskové vzdálenosti $f_{\text{col}} = 1\,000 \text{ mm}$ a kameru o ohniskové vzdálenosti $f_{\text{cam}} = 250 \text{ mm}$. Mřížka pracuje s úhlem dopadu $\alpha = 45^\circ$ a difrakčním úhlem $\beta = 15^\circ$. Geometrická širka vstupní štěrby je $s = 100 \mu\text{m}$.

1. Vypočítejte anamorfní faktor r .
2. Vypočítejte velikost obrazu štěrby na detektoru ve směru disperze (s'_x) a v prostorovém směru (s'_y).

Řešení:

1. Anamorfní faktor je dán poměrem kosinů úhlů:

$$r = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{\cos(45^\circ)}{\cos(15^\circ)} = \frac{0,70711}{0,96593} \approx 0,73205$$

1. V prostorovém směru (podél štěrby) se uplatňuje standardní zvětšení:

$$s'_y = s \cdot \frac{f_{\text{cam}}}{f_{\text{col}}} = 100 \mu\text{m} \cdot \frac{250 \text{ mm}}{1\,000 \text{ mm}} = 25,0 \mu\text{m}$$

Ve směru disperze se obraz štěrby násobí anamorfním faktorem:

$$s'_x = s \cdot \frac{f_{\text{cam}}}{f_{\text{col}}} \cdot r = 25,0 \mu\text{m} \cdot 0,73205 \approx 18,3 \mu\text{m}$$

Výsledek: Anamorfní faktor je $r = 0,732$. Obraz štěrby je na detektoru zúžen na 18,3 μm v disperzním směru, zatímco v prostorovém směru měří 25,0 μm .

Úloha 8: Horneova optimální extrakce — výpočet vah

Zadání: Při extrakci spektra máme v jednom spektrálním sloupci tři prostorové pixely $y \in \{1, 2, 3\}$. Pozadí oblohy bylo odečteno ($S = 0$). Získali jsme následující hodnoty signálu D_y v ADU, normalizovaného profilu P_y a rozptylu V_y (v ADU^2):

- Pixel 1: $D_1 = 120 \text{ ADU}$, $P_1 = 0,20$, $V_1 = 100 \text{ ADU}^2$
- Pixel 2: $D_2 = 610 \text{ ADU}$, $P_2 = 0,60$, $V_2 = 300 \text{ ADU}^2$
- Pixel 3: $D_3 = 190 \text{ ADU}$, $P_3 = 0,20$, $V_3 = 120 \text{ ADU}^2$

1. Vypočítejte celkový tok standardní aperturní integrací ($f_{\text{aper}} = \sum D_y$).
2. Vypočítejte optimální tok f_{opt} a jeho směrodatnou odchylku σ_{opt} podle Horneova algoritmu.

Řešení:

1. Standardní aperturní extrakce:

$$f_{\text{aper}} = 120 + 610 + 190 = 920,0 \text{ ADU}$$

Rozptyl aperturní sumy je:

$$V_{\text{aper}} = V_1 + V_2 + V_3 = 100 + 300 + 120 = 520 \text{ ADU}^2 \implies \sigma_{\text{aper}} = \sqrt{520} \approx 22,80 \text{ ADU}$$

Poměr signálu k šumu: $(S/N)_{\text{aper}} = 920/22,80 \approx 40,35$.

1. Horneova optimální extrakce:

$$f_{\text{opt}} = \frac{\sum_{y=1}^3 \frac{P_y D_y}{V_y}}{\sum_{y=1}^3 \frac{P_y^2}{V_y}}$$

Spočteme jednotlivé členy v čitateli:

- Pixel 1: $(0,20 \cdot 120)/100 = 24/100 = 0,240$
- Pixel 2: $(0,60 \cdot 610)/300 = 366/300 = 1,220$
- Pixel 3: $(0,20 \cdot 190)/120 = 38/120 \approx 0,3167$
- Číselník: $0,240 + 1,220 + 0,3167 = 1,7767$

Jednotlivé členy ve jmenovateli:

- Pixel 1: $(0,20)^2/100 = 0,04/100 = 0,00040$
- Pixel 2: $(0,60)^2/300 = 0,36/300 = 0,00120$
- Pixel 3: $(0,20)^2/120 = 0,04/120 \approx 0,000333$
- Jmenovatel: $0,00040 + 0,00120 + 0,000333 = 0,0019333$

Optimální tok:

$$f_{\text{opt}} = \frac{1,7767}{0,0019333} \approx 918,97 \text{ ADU}$$

Rozptyl optimálního toku:

$$V_{\text{opt}} = \frac{1}{\sum \frac{P_y^2}{V_y}} = \frac{1}{0,0019333} \approx 517,24 \text{ ADU}^2 \implies \sigma_{\text{opt}} \approx 22,74 \text{ ADU}$$

Výsledek: Optimální tok je $919,0 \pm 22,7$ ADU. (U reálného profilu s desítkami pixelů přináší Horneův algoritmus ještě výraznější nárůst S/N).

Úloha 9: Atmosférická extinkce v zenitovém úhlu

Zadání: Hvězda je pozorována v zenitovém úhlu $z = 60^\circ$. Extinkční koeficient atmosféry na vlnové délce $\lambda = 450$ nm je $k = 0,25$ mag/airmass. Tok hvězdy nad atmosférou je F_0 .

1. Jaká je vzdušná hmota X pozorování?
2. Jaký zlomek původního toku F_{obs}/F_0 dopadne do dalekohledu?

Řešení:

1. Vzdušná hmota pro $z = 60^\circ$ v planparalelní aproximaci je:

$$X \approx \sec(60^\circ) = \frac{1}{\cos(60^\circ)} = \frac{1}{0,5} = 2,00$$

1. Podle Bouguerova zákona:

$$\Delta m = k \cdot X = 0,25 \text{ mag/airmass} \cdot 2,00 \text{ airmass} = 0,50 \text{ mag}$$

Poměr toků z Pogsonovy rovnice:

$$\frac{F_{\text{obs}}}{F_0} = 10^{-0,4 \cdot \Delta m} = 10^{-0,4 \cdot 0,50} = 10^{-0,20} \approx 0,631$$

Výsledek: Vzdušná hmota je $X = 2,00$. Do dalekohledu dorazí 63,1 % původního toku (útlum činí 36,9 %).

Úloha 10: Boltzmannova excitační rovnice pro vodík

Zadání: Ve fotosféře Slunce panuje efektivní teplota $T = 5778$ K. Vypočítejte poměr počtu neutrálních atomů vodíku v prvním excitovaném stavu ($n = 2$, odkud vychází Balmerova série) k počtu atomů v základním stavu ($n = 1$). **Řešení:** Pro vodík jsou statistické váhy hladin $g_n = 2n^2$, tedy $g_1 = 2 \cdot 1^2 = 2$ a $g_2 = 2 \cdot 2^2 = 8$. Rozdíl energií mezi hladinami $n = 1$ a $n = 2$ je:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 13,6 \text{ eV} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 10,2 \text{ eV} = 10,2 \cdot 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ J} \approx 1,6342 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Termální energie při teplotě $T = 5778$ K je ($k_B = 1,3807 \cdot 10^{-23}$ J/K):

$$k_B T = 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 5778 \text{ K} \approx 7,9777 \cdot 10^{-20} \text{ J} \approx 0,4979 \text{ eV}$$

Exponent v Boltzmannově rovnici:

$$\frac{\Delta E}{k_B T} = \frac{10,2 \text{ eV}}{0,4979 \text{ eV}} \approx 20,486$$

Poměr populací podle Boltzmannova rozdělení:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) = \frac{8}{2} \cdot \exp(-20,486) = 4 \cdot 1,268 \cdot 10^{-9} \approx 5,07 \cdot 10^{-9}$$

Výsledek: Ve fotosféře Slunce se v prvním excitovaném stavu ($n = 2$) nachází pouze přibližně **jeden z každých 200 milionů atomů neutrálního vodíku!**

Úloha 11: Sahova ionizační rovnice pro vápník ve Slunci

Zadání: Ve sluneční fotosféře ($T = 5\,778\text{ K}$, parciální elektronový tlak $P_e = 1,5\text{ Pa} = 15\text{ dyn/cm}^2$) zkoumáme ionizaci vápníku. Ionizační potenciál neutrálního vápníku Ca I je $\chi = 6,11\text{ eV}$. Partiční funkce jsou $u_{\text{Ca I}} \approx 1,32$ a $u_{\text{Ca II}} \approx 2,30$. Vypočítejte poměr počtu iontů Ca II k neutrálním atomům Ca I ($N_{\text{II}}/N_{\text{I}}$). **Řešení:** Sahova rovnice v tlaku elektronů zní:

$$\frac{N_{\text{II}}}{N_{\text{I}}} P_e = \frac{2u_{\text{II}}}{u_{\text{I}}} k_B T \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\chi}{k_B T} \right)$$

Konstanty: $m_e = 9,1094 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$, $h = 6,6261 \cdot 10^{-34}\text{ J} \cdot \text{s}$, $k_B = 1,3807 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$. Termální vlnový faktor:

$$\left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/2} = \left(\frac{2\pi \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 1,3807 \cdot 10^{-23} \cdot 5\,778}{(6,6261 \cdot 10^{-34})^2} \right)^{3/2} \approx (1,040 \cdot 10^{21})^{1,5} \approx 3,35 \cdot 10^{31}\text{ m}^{-3}$$

Člen $k_B T = 7,978 \cdot 10^{-20}\text{ J}$. Exponent pro $\chi = 6,11\text{ eV}$ a $k_B T = 0,4979\text{ eV}$:

$$\exp \left(-\frac{6,11}{0,4979} \right) = \exp(-12,272) \approx 4,68 \cdot 10^{-6}$$

Poměr partičních funkcí: $2u_{\text{II}}/u_{\text{I}} = 2 \cdot (2,30/1,32) \approx 3,485$. Dosadíme do Sahovy rovnice:

$$\frac{N_{\text{II}}}{N_{\text{I}}} \cdot 1,5\text{ Pa} = 3,485 \cdot (7,978 \cdot 10^{-20}) \cdot (3,35 \cdot 10^{31}) \cdot (4,68 \cdot 10^{-6}) \approx 43,65\text{ Pa}$$

$$\frac{N_{\text{II}}}{N_{\text{I}}} = \frac{43,65}{1,5} \approx 29,1$$

Výsledek: Poměr $N(\text{Ca II})/N(\text{Ca I}) \approx 29,1$. To znamená, že **více než 96,6 % vápníku ve sluneční fotosféře je ionizováno na Ca II**, což vysvětluje obrovskou mohutnost čar Ca II H & K ve spektru Slunce navzdory nízké celkové abundanci vápníku.

Úloha 12: Ekvivalentní šířka Gaussovské absorpční čáry

Zadání: Normalizovaný profil slabé absorpční čáry železa je popsán čistým Gaussovským profilem s centrální hloubkou absorpce $A_0 = 0,35$ (zbytkový tok v jádře $I_0/I_c = 0,65$) a pološířkou $\text{FWHM} = 0,12\text{ \AA}$. Vypočítejte ekvivalentní šířku čáry W_λ v miliangströmech ($\text{m\AA}$). **Řešení:** Hloubka absorpce v profilu je $1 - I_\lambda/I_c = A_0 \exp \left(-\frac{(\Delta\lambda)^2}{2\sigma^2} \right)$.

Ekvivalentní šířka je integrál:

$$W_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0 \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx = A_0 \sqrt{2\pi} \sigma$$

Využijeme vztah mezi FWHM a σ : $\text{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \approx 2,35482\sigma$, tedy $\sigma = \text{FWHM}/2,35482$. Dosadíme:

$$W_\lambda = A_0 \sqrt{2\pi} \frac{\text{FWHM}}{2\sqrt{2\ln 2}} = A_0 \cdot \text{FWHM} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{4\ln 2}} \approx 1,06447 \cdot A_0 \cdot \text{FWHM}$$

Dosadíme zadaná čísla:

$$W_\lambda = 1,06447 \cdot 0,35 \cdot 0,12\text{ \AA} \approx 0,04471\text{ \AA} = 44,7\text{ m\AA}$$

Výsledek: Ekvivalentní šířka čáry je $W_\lambda = 44,7\text{ m\AA}$.

Úloha 13: Určení chemické abundance $[\text{Fe}/\text{H}]$ z křivky růstu

Zadání: V optickém spektru hvězdy byla na lineární větvi křivky růstu změřena slabá čára $\text{Fe I} (\lambda = 5\,225,5 \text{ \AA}, \chi_{\text{exc}} = 3,22 \text{ eV}, \log gf = -1,85)$ s ekvivalentní šířkou $W_\lambda = 18,5 \text{ m\AA}$. Ve spektru Slunce má táž čára ekvivalentní šířku $W_{\lambda,\odot} = 37,0 \text{ m\AA}$. Hvězda má stejnou efektivní teplotu a povrchovou gravitaci jako Slunce. Vypočítejte metalicitu hvězdy $[\text{Fe}/\text{H}]$. **Řešení:** Protože obě čáry leží bezpečně na **lineární větvi křivky růstu** ($W_\lambda < 30 \text{ m\AA}$), je ekvivalentní šířka přímo úměrná sloupcové hustotě atomů N :

$$W_\lambda \propto N(\text{Fe})$$

Jelikož jsou parametry atmosféry ($T_{\text{eff}}, \log g$) shodné se Sluncem, poměr sloupcových hustot přesně odpovídá poměru abundancí:

$$\frac{N(\text{Fe})_*}{N(\text{Fe})_\odot} = \frac{W_{\lambda,*}}{W_{\lambda,\odot}} = \frac{18,5 \text{ m\AA}}{37,0 \text{ m\AA}} = 0,50$$

Metalicita v logaritmické škále:

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \log_{10} \left(\frac{N(\text{Fe})_*}{N(\text{Fe})_\odot} \right) = \log_{10}(0,50) \approx -0,301$$

Výsledek: Hvězda má metalicitu $[\text{Fe}/\text{H}] = -0,30 \text{ dex}$, což znamená, že obsahuje přesně polovinu železa ve srovnání se Sluncem.

Úloha 14: Reflexní radiální rychlost hvězdy a exoplaneta

Zadání: Kolem hvězdy o hmotnosti $M_* = 1,0 M_\odot$ obíhá exoplaneta typu "horký Jupiter" o hmotnosti $M_p = 1,0 M_{\text{Jup}}$ po kruhové dráze ($e = 0$) s oběžnou periodou $P = 3,65 \text{ dne}$ (0,01 roku). Sklon dráhy k zornému paprsku je $i = 90^\circ$ (pozorujeme tranzit). Vypočítejte poloamplitudu radiální rychlosti hvězdy K . **Řešení:** Použijeme vzorec pro poloamplitudu kruhové dráhy ($e = 0$):

$$K = \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{M_*^{2/3}} \approx 28,4 \text{ m/s} \cdot \left(\frac{P}{1 \text{ rok}} \right)^{-1/3} \left(\frac{M_p \sin i}{M_{\text{Jup}}} \right) \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{-2/3}$$

Dosadíme parametry soustavy:

- $P = 0,01 \text{ roku} \Rightarrow P^{-1/3} = (10^{-2})^{-1/3} = 10^{2/3} \approx 4,6416$,
- $M_p \sin i = 1,0 \cdot \sin(90^\circ) = 1,0 M_{\text{Jup}}$,
- $M_* = 1,0 M_\odot$.

Poloamplituda rychlosti je:

$$K = 28,4 \text{ m/s} \cdot 4,6416 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \approx 131,8 \text{ m/s}$$

Výsledek: Exoplaneta vyvolává periodické kolísání radiální rychlosti hvězdy s poloamplitudou $K \approx 132 \text{ m/s}$, což je signál snadno měřitelný i menšími astronomickými spektrografy.

Úloha 15: FRD ztráta na kolimátoru spektrografu

Zadání: Světlo z dalekohledu vstupuje do optického vlákna v kuželu se světelností $f_{\text{in}} = f/5,0$. V důsledku degradace světelnosti (FRD) vystupuje z vlákna kužel se světelností $f_{\text{out}} = f/3,8$. Kolimátor spektrografu má průměr $D_{\text{col}} = 100 \text{ mm}$ a ohniskovou vzdálenost $f_{\text{col}} = 500 \text{ mm}$ (je navržen pro $f/5$). Jaké procento světla vystupujícího z vlákna dopadne mimo kolimátor a ztratí se? **Řešení:**

1. Průměr výstupního svazku D_{beam} ve vzdálenosti kolimátoru ($f_{\text{col}} = 500 \text{ mm}$) pro světelnost $f/3,8$ je:

$$D_{\text{beam}} = \frac{f_{\text{col}}}{f/\#_{\text{out}}} = \frac{500 \text{ mm}}{3,8} \approx 131,58 \text{ mm}$$

1. Plocha průřezu rozšířeného svazku je $A_{\text{beam}} \propto D_{\text{beam}}^2 = (131,58)^2 \approx 17\,313 \text{ mm}^2$. Plocha kolimátoru je $A_{\text{col}} \propto D_{\text{col}}^2 = (100,0)^2 = 10\,000 \text{ mm}^2$. Předpokládáme-li pro zjednodušení přibližně rovnoměrné plošné osvětlení svazku, podíl zachyceného světla je:

$$\eta_{\text{capture}} = \frac{A_{\text{col}}}{A_{\text{beam}}} = \left(\frac{100,0}{131,58} \right)^2 = \left(\frac{3,8}{5,0} \right)^2 = (0,76)^2 \approx 0,5776 = 57,8 \%$$

Ztráta světla (vignetting):

$$\text{Ztráta} = 1 - \eta_{\text{capture}} = 1 - 0,578 = 42,2 \%$$

Výsledek: V důsledku FRD dopadne mimo aperturu kolimátoru přibližně 42 % **veškerého přeneseného světla**, pokud není kolimátor naddimenzován!

Dodatek D: Encyklopedický glosář

Tento glosář shrnuje klíčové pojmy astronomické spektroskopie, optiky a astrofyzikální analýzy dat v česko-anglickém paralelním formátu s podrobnými definicemi a fyzikálními souvislostmi.

Apertura (Aperture)

Vstupní otvor optického přístroje, kterým prochází světelný tok. U dalekohledu je dána průměrem primárního zrcadla či objektivu D_{tel} ; u spektrografu představuje rozměr vstupní štěrbiny (slit) nebo průměr jádra optického vlákna.

Blaze úhel (Blaze angle)

Úhel θ_B sklonu činných reflexních plošek vrypů difrakční mřížky vůči její geometrické rovině. Optimalizuje difrakční účinnost soustředěním zrcadlového odrazu do předem zvoleného difrakčního řádu m a blaze vlnové délky λ_B . V autokolimační Littrowově konfiguraci platí $m\lambda_B = 2d \sin \theta_B$.

BPT diagram (BPT diagram)

Emisní diagnostický diagram zavedený Baldwinem, Phillipsem a Terlevichem (1981). Vynáší poměr optických zakázaných čar $\log_{10}([\text{O III}] \lambda 5007 / \text{H}\beta)$ vůči $\log_{10}([\text{N II}] \lambda 6584 / \text{H}\alpha)$ a slouží k jednoznačnému rozlišení fotoionizačního mechanismu v galaxiích (hvězdotovné H II oblasti vs. aktivní galaktická jádra AGN a LINER).

Degradace světelnosti (Focal Ratio Degradation, FRD)

Optický jev v křemenných vláknech, kdy v důsledku mikroskopických ohybů, pnutí a imperfekcí rozhraní jádro-plášť dochází k rozptylu úhlů paprsků. Výstupní kužel světla je širší než vstupní ($f/\#_{\text{out}} < f/\#_{\text{in}}$), což zvětšuje optické etendue svazku a způsobuje aperturní ztráty na kolimátoru spektrografu.

Disperze (Dispersion)

Schopnost optického prvku prostorově či úhlově oddělit různé vlnové délky elektromagnetického záření. Rozlišujeme:

- **Úhlovou disperzi:** $\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \beta}$ (změna úhlu difrakce na jednotku vlnové délky),
- **Lineární disperzi:** $\frac{dx}{d\lambda} = f_{\text{cam}} \frac{d\beta}{d\lambda}$ (vzdálenost na detektoru na jednotku vlnové délky),
- **Reciprokou lineární disperzi:** $D^{-1} = \frac{d\lambda}{dx} = \frac{d \cos \beta}{m f_{\text{cam}}}$ (vyjadřovanou standardně v $\text{\AA}/\text{mm}$ nebo nm/mm).

Dopplerova tomografie (Doppler tomography / Doppler imaging)

Inverzní výpočetní rekonstrukční technika, která využívá periodické fázové změny v profilech spektrálních čar vyvolané rotací tělesa k vytvoření 2D mapy. Aplikuje se na mapování povrchových skvrn rotujících hvězd (Doppler Imaging) nebo na mapování rychlostního pole akrečních disků v těsných dvojhvězdách v rovině rychlostí (v_x, v_y) .

Echelle mřížka (Echelle grating)

Difrakční mřížka se strmým blaze úhlem ($\theta_B \geq 63,4^\circ$, mřížky R2, R3.1, R4) a hrubou periodou (typicky 31,6 až 79 vrypů/mm), pracující ve vysokých difrakčních řádech ($m \sim 30 - 150$). Poskytuje vysoké spektrální rozlišení ($R > 50\,000$) v kompaktním formátu.

Ekvivalentní šířka (Equivalent width, W_λ)

Integrovaná míra celkové absorpce nebo emise spektrální čáry:

$$W_\lambda = \int \left(1 - \frac{I_\lambda}{I_c}\right) d\lambda$$

Představuje šířku hypotetické obdélníkové čáry se 100% absorpcí, která pohltí stejné množství energie z kontinua jako reálná čára. Je invariantní vůči spektrálnímu rozlišení přístroje.

Grism (Grism)

Optický prvek vzniklý spojením transmisní difrakční mřížky s disperzním hranolem. Je navržen tak, aby pro zvolenou centrální vlnovou délku λ_0 procházel paprsek bez odchylky od optické osy ($m = 1$). Základní prvek bezšterbinové spektroskopie na kosmických dalekohledech (HST, JWST).

Horneova optimální extrakce (Horne optimal extraction)

Statistický algoritmus (Keith Horne, 1986) pro extrakci 1D spektra z 2D CCD snímku. Využívá vážení pixelů v prostorovém profilu stopy inverzní hodnotou jejich variance ($w \propto P/V$), což maximalizuje poměr signálu k šumu (S/N) a umožňuje automatické vyřazení zásahů kosmickým zářením.

Jednotka integrálního pole (Integral Field Unit, IFU)

Optický subsystém spektrografu, který rozkládá dvourozměrný obraz na obloze a přenáší jej na vstup spektrografu tak, aby pro každý prostorový bod (spaxel) vzniklo nezávislé spektrum. Realizuje se maticemi mikročoček, svazky vláken nebo zrcadlovými kráječi obrazu.

Křížová disperze (Cross-dispersion)

Použití sekundárního disperzního prvku (hranolu nebo mřížky s nízkou disperzí) orientovaného kolmo k hlavní rovině disperze echelle mřížky. Odděluje překrývající se vysoké difrakční řády a vytváří dvourozměrný echelogram na plošném detektoru.

Křivka růstu (Curve of Growth, CoG)

Závislost ekvivalentní šířky čáry $\log(W_\lambda/\lambda)$ na sloupcové hustotě absorbujících atomů $\log(Nf\lambda)$. Skládá se ze tří větví: lineární ($W_\lambda \propto N$), ploché/saturační ($W_\lambda \propto \sqrt{\ln N}$) a tlumicí ($W_\lambda \propto \sqrt{N}$).

Laserový frekvenční hřeben (Laser Frequency Comb, LFC)

Metrologický kalibrátor nové generace využívající femtosekundový laser fázově uzamčený k atomovým hodinám. Vytváří miliony ekvidistantních spektrálních čar s přesností sub-cm/s, což eliminuje instrumentální drift spektrografu při hledání extrasolárních planet.

Lokální termodynamická rovnováha (Local Thermodynamic Equilibrium, LTE)

Fyzikální aproximace ve stavbě hvězdných atmosfér, která předpokládá, že v každém bodě prostředí s lokální teplotou T je kinetická distribuce částic popsána Maxwellovým rozdělením, excitace Boltzmannovou rovnicí a ionizace Sahaovou rovnicí, ačkoliv záření jako celek není v rovnováze.

Moffatův profil (Moffat profile)

Empirický prostorový profil bodového obrazu hvězdy v pozemním dalekohledu:

$$I(r) = I_0 \left[1 + \left(\frac{r}{\alpha} \right)^2 \right]^{-\beta}$$

Lépe než Gaussův profil popisuje široká křídla atmosférického seeingu způsobená turbulencemi.

Multiobjektová spektroskopie (Multi-Object Spectroscopy, MOS)

Metoda umožňující simultánní snímání desítek až tisíců spekter různých těles v jednom zorném poli pomocí štěrbinových masek či roboticky polohovaných optických vláken (např. přístroje SDSS, DESI, 4MOST).

Rozlišovací schopnost (Resolving power, R)

Bezrozměrná veličina charakterizující schopnost spektrografu separovat blízké vlnové délky: $R = \lambda / \Delta\lambda$. Pro mřížku s N vrypů v řádu m platí $R_{\text{theor}} = mN$.

Sahova rovnice (Saha equation)

Termodynamická rovnice odvozená Meghnadem Sahu (1920) popisující stupeň ionizace plynu v závislosti na teplotě T a elektronovém tlaku P_e .

Spaxel (Spaxel / Spatial pixel)

Elementární prostorový pixel v trojrozměrné datové krychli IFU spektroskopie, který v sobě nese kompletní jednorozměrné spektrum toku v závislosti na vlnové délce.

Telurické čáry (Telluric lines)

Parazitní absorpční čáry a pásy vznikající v zemské atmosféře absorpcí molekulami H_2O , O_2 , CO_2 , CH_4 a O_3 .

Voigtův profil (Voigt profile)

Profil spektrální čáry vzniklý konvolucí centrálního Dopplerovského Gaussova profilu (tepelný pohyb a mikroturbulence) a vnějších Lorentzovských tlumících křídel (zářivý útlum a tlakové srážky).

Volný spektrální interval (Free Spectral Range, FSR)

Rozsah vlnových délek $\Delta\lambda_{\text{FSR}} = \lambda/m$ v rámci jednoho difrakčního řádu, který není překryt sousedním difrakčním řádem.

VPHG (Volume Phase Holographic Grating)

Objemová fázová holografická mřížka tvořená periodickou modulací indexu lomu v dichromované želatině mezi skleněnými hranoly. Využívá Braggovy difrakce a dosahuje účinnosti přesahující 90 %.

Voronoiho binnace (Voronoi binning)

Adaptivní prostorové shlukování spaxelů v 2D obrazu či IFU krychli do nepravidelných Voronoiho polygonů tak, aby bylo dosaženo konstantního poměru signálu k šumu S/N napříč celou plochou galaxie.

Zeemanovo-Dopplerovo zobrazování (Zeeman-Doppler Imaging, ZDI)

Pokročilá spektropolarimetrická tomografická metoda využívající časovou řadu všech čtyř Stokesových parametrů (I , Q , U , V) pro simultánní prostorovou rekonstrukci povrchových teplotních skvrn a 3D vektorového magnetického pole rotující hvězdy.