

AstroHUB

Nebeská mechanika

Základy orbitální dynamiky a kosmických letů

AUTOR

David Pěkník

OBSAH KNIHY

•	Úvod a předmluva: Vítejte ve světě kosmických drah	4
---	--	---

ČÁST I: FYZIKÁLNÍ A MATEMATICKÉ ZÁKLADY ORBITÁLNÍ MECHANIKY

Kapitola 1	Fyzikální principy oběhového pohybu a kosmické rychlosti	6
1.1	Myšlenkový experiment: Newtonovo dělo a zakřivení zemského povrchu	6
1.2	Matematické odvození 1. kosmické rychlosti	8
1.3	Gravitační zrychlení ve výšce a tajemství stavu beztlíže	10
1.4	Odvození 2. kosmické (únikové) rychlosti	12
1.5	Tři kosmické rychlosti: Přehledové srovnání	14
Kapitola 2	Gravitační pole a tajemství kosmického těžiště	16
2.1	Newtonův gravitační zákon a zákon obrácených čtverců	16
2.2	Standardní gravitační parametr (μ): Rodné číslo těles	18
2.3	Kosmický tanec dvou těles: Kde leží barycentrum?	20
Kapitola 3	Zákony zachování a tajemství orbitální rychlosti	23
3.1	Krasobruslařský efekt ve vesmíru: Zachování momentu hybnosti	23
3.2	Energetická horská dráha: Zachování mechanické energie	25
3.3	Nejzajímavější vzorec nebeské mechaniky: Rovnice Vis-Viva	27

ČÁST II: GEOMETRIE A ČASOVÁ ZÁVISLOST KOSMICKÝCH DRAH

Kapitola 4	Keplerovy zákony a tajemství kosmických elips	30
4.1	Detektivka v renesanční Praze: Boj o 8 úhlových minut	30
4.2	Tři Keplerovy zákony a jejich matematická formulace	32
Kapitola 5	Kde se těleso na dráze nachází? (Čas, úhly a anomálie)	36
5.1	Tři anomálie: Most mezi plynoucím časem a polohou v prostoru	36
5.2	Keplerova rovnice: Tajemství transcendentního vztahu	38
5.3	Numerické řešení: Newtonova-Raphsonova metoda tečen	39
5.4	Převod na skutečný úhel (pravou anomálii v)	40
Kapitola 6	Šest parametrů kosmického tance (Keplerovy dráhové elementy)	42
6.1	Fyzikální podstata a geometrie šesti Keplerových elementů	43
6.2	Perifokální souřadnicová soustava (PQW)	46
6.3	3D Eulerovy rotační matice do ekvatoriální soustavy ECI	48
6.4	Zpětný převod ze stavového vektoru na Keplerovy elementy	51
6.5	Řešené výpočetní příklady	54

ČÁST III: TYPY DRAH A ORBITÁLNÍ MANÉVRY

Kapitola 7	Kosmická patra kolem Země: Typy a režimy oběžných drah	57
7.1	Přehled a rozbor orbitálních pater (LEO, MEO, GEO, HEO)	57
7.2	Aerodynamický odpor v LEO a orbitální rozpad	60
7.3	Kompletní matematické odvození geostacionární dráhy (GEO)	62
7.4	Fyzika a matematika heliosynchronní dráhy (SSO)	65
7.5	Řešené výpočetní příklady	67
Kapitola 8	Orbitální manévry a rozpočet Δv (Jak se řídí loď)	69
8.1	Jak se rakety pohybují ve vakuu: Tsiolkovského rovnice	69
8.2	Co je to Δv : Kosmická peněženka	71
8.3	Jak se řídí loď: Zrychlení, brzdění a změna sklonu	73
Kapitola 9	Cestování mezi orbitami: Přechodové trajektorie a startovací okna	75
9.1	Hohmannova přechodová elipsa: Matematické odvození	75
9.2	Bi-eliptický přechod (Sternfeldův přechod)	78
9.3	Synodická perioda a geometrie startovacích oken	80
9.4	Řešené výpočetní příklady	82

ČÁST IV: MEZIPLANETÁRNÍ LETY A REÁLNÝ VESMÍR

Kapitola 10	Gravitační prak: Jak sondy kradou energii planetám	84
10.1	Fyzikální podstata a vektorový rozbor gravitačního praku	84
10.2	Geometrie hyperbolického průletu a úhel ohybu trajektorie	86
10.3	Powered Gravity Assist (Kombinovaný Oberthův průlet)	88
10.4	Řešené výpočetní příklady	90
Kapitola 11	Problém tří těles a Lagrangeovy gravitační ostrovy	92
11.1	Problém tří těles a Poincarého deterministický chaos	92
11.2	Kruhový omezený problém tří těles (CR3BP)	93
11.3	Rotující soustava souřadnic a efektivní potenciál	95

11.4	Jacobiho integrál a plochy nulové rychlosti	97
11.5	Analytické odvození polohy kolineárních bodů (L1, L2, L3)	98
11.6	Triangulární body (L4 a L5) a analýza stability	99
11.7	Dráhy v okolí libračních bodů: Halo, Lissajous a NRHO	100
Kapitola 12	Reálný vesmír: Vlivy, které narušují dokonalé dráhy	102
12.1	Zploštění Země a multipólový rozvoj gravitačního potenciálu	102
12.2	Dlouhodobé sekulární efekty způsobené J2	105
12.3	Matematické odvození kritické inklinace	107
12.4	Aerodynamický odpor atmosféry a orbitální paradox	108
12.5	Tlak slunečního záření (SRP) a slapové síly	110
Kapitola 13	Sledování družic v praxi a formát TLE elementů	112
13.1	Formát dvouřádkových elementů (TLE)	112
13.2	Algoritmus ověření kontrolního součtu (Checksum Modulo 10)	114
13.3	Výpočet orbitálních parametrů z elementů TLE	115
13.4	Perturbační model SGP4 / SDP4: Mean vs. Osculating Elements	117
13.5	Transformace do topocentrických souřadnic pozorovatele	118
13.6	Astronomické časové systémy a Juliánské datum	119

PŘÍLOHY A PRAKTICKÁ MINIMA

Dodatek A	Základní matematicko–fyzikální minimum a vektorový aparát	121
Dodatek B	Přehled fundamentálních astronomických konstant a parametrů těles	131
Dodatek C	Česko–anglický odborný glosář astrodynamiky	139

Úvod a předmluva: Vítejte ve světě kosmických drah

Když se v noci podíváte na oblohu a spatříte tichou tečku družice křížující hvězdné nebe, díváte se na výsledek jedné z nejkrásnějších věd, jaké kdy lidstvo vytvořilo – **nebeské mechaniky**.

Tento obor zkoumá, jak se tělesa pohybují v prostoru pod vlivem gravitace. Po celá tisíciletí lidé pozorovali tanec planet na pozadí hvězd a přemýšleli, jaká neviditelná pravidla tento pohyb řídí. Dnes už tyto zákonitosti nejen známe, ale díky nim dokážeme navigovat družice, vysílat sondy na okraj naší Sluneční soustavy a bezpečně dopravovat lidské posádky na oběžnou dráhu.

Proč vesmír funguje jinak, než čekáme?

Při prvním setkání s kosmickými lety často narážíme na jevy, které zcela odporují naší každodenní pozemské zkušenosti:

- **Ve vesmíru motor nepotřebujete k tomu, abyste letěli vpřed.** Na oběžné dráze loď udržuje v neustálém pohybu její vlastní setrvačnost v kombinaci se zemskou přitažlivostí. Motory se zapínají jen na krátké okamžiky, když potřebujeme změnit směr nebo výšku dráhy.
- **Stav beztlíže neznamená, že gravitace zmizela.** Astronauti na palubě Mezinárodní vesmírné stanice se nevznášejí proto, že by tam nebyla přitažlivost, ale proto, že stanice i s celou posádkou se nachází v nepřetržitém volném pádu.
- **Když chcete ve vesmíru dohonit cíl před sebou, musíte paradoxně zpomalit.** Přidáním plynu se totiž dostanete na vyšší dráhu, kde poletíte pomaleji a cíl vám ještě více uteče.

Jak je tato kniha napsána

Cílem této publikace je otevřít fascinující svět orbitální dynamiky **studentům, nadšencům do astronomie a kosmonautiky i úplným laickým začátečníkům**.

Často se stává, že knihy o nebeské mechanice odradí čtenáře hned na prvních stránkách záplavou těžkých diferenciálních rovnic a abstraktní matematiky. Naším cílem je pravý opak:

1. **Přednost má intuice a pochopení:** Dříve než se objeví jakékoliv číslo, vysvětlíme si princip pomocí jednoduchých myšlenkových pokusů a přirovnání ze života.
2. **Minimum vzorců, maximum souvislostí:** Vzorce používáme jen tam, kde skutečně pomáhají pochopit základní řád věcí, a vždy je doprovázíme srozumitelným slovním popisem.
3. **Příklady z reálné kosmonautiky:** Vše si ukazujeme na skutečných misích – od letů programu Apollo k Měsíci až po stanici ISS či meziplanetární sondy Voyager.

Přejeme vám inspirativní a dobrodružné čtení na cestě za pochopením zákonů, které hýbou vesmírem!

Kapitola 1: Fyzikální principy oběhového pohybu a kosmické rychlosti

Když sledujeme přímé televizní přenosy z paluby Mezinárodní vesmírné stanice a vidíme kosmonauty, jak se bez námahy vznášejí v prostoru a ukusují poletující kapky vody, u většiny lidí vyvstane naprosto přirozená myšlenka: „Ve výšce čtyř set kilometrů nad zemí už zkrátka nefunguje gravitace a stanice se na obloze drží díky neustálému tahu raketových motorů.“

Skutečnost je však mnohem překvapivější, elegantnější a krásnější. Základním tajemstvím nebeské mechaniky je poznatek, že **oběžná dráha není stavem absence zemské přitažlivosti, nýbrž stavem nepřetržitého volného pádu, který nikdy neskončí dopadem na zem.** Kosmická loď na oběžné dráze gravitační sílu nepřemáhá ani se jí nevzpírá – naopak, plně se jejímu působení poddává.

Tento princip poprvé vysvětlil a matematicky formuloval sir Isaac Newton v roce 1687 ve svém stěžejním díle *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Newton dokázal, že stejná gravitační síla, která způsobuje pád zralého jablka ze stromu k zemi, drží Měsíc na jeho dráze kolem Země a všechny planety v jejich tanci kolem Slunce.

1.1 Myšlenkový experiment: Newtonovo dělo a zakřivení zemského povrchu

K intuitivnímu objasnění toho, jak oběžná dráha funguje, zkonstruoval Isaac Newton slavný myšlenkový pokus s obřím dělem umístěným na vrcholu gigantické hory. Vrchol této pomyslné hory ční vysoko nad husté vrstvy zemské atmosféry, aby vystřelenou koulí nebrzdil odpor vzduchu.

Představme si, že do děla nabijeme střelný prach a budeme postupně zvyšovat ústřovou rychlost koule:

1. **Při nízké rychlosti (např. běžný výstřel z pušky, $v \approx 1 \text{ km/s}$):** Projektil letí dopředu, ale zemská gravitace jej neúprosně stahuje dolů. Koule opíše klasickou balistickou křivku a po několika kilometrech dopadne na zemský povrch nedaleko úpatí hory.
1. **Při vyšší rychlosti ($v \approx 5 \text{ km/s}$):** Projektil překonává obrovské vzdálenosti tisíců kilometrů. Zde se již naplno projevuje kulovitý tvar naší planety – povrch Země pod letící koulí se v důsledku svého zakřivení znatelně svažuje dolů. Koule dopadne mnohem dále, až za horizont na protilehlém kontinentu.
1. **Při první kosmické rychlosti ($v_1 \approx 7,9 \text{ km/s} = 28\,500 \text{ km/h}$):** Nastává kouzelný stav rovnováhy. Koule padá vlivem zemské tíže k zemi přesně stejným tempem, jakým se zakřivený povrch planety pod ní propadá dolů! Koule neustále padá, ale zemský povrch jí neustále uhýbá. Koule Země nikdy nezasáhne, obletí celou planetu dokola v konstantní výšce a přiletí k dělu zezadu – vznikla **stabilní kruhová oběžná dráha**.
1. **Při eliptické rychlosti ($7,9 < v < 11,2 \text{ km/s}$):** Projektil má více pohybové energie, než kolik je zapotřebí pro kružnici. V bodě výstřelu má obrovskou rychlost, která jej na protilehlé straně Země vynese do mnohem větší výšky. Dráha se protáhne do **uzavřené elipsy**.
1. **Při druhé kosmické rychlosti ($v \geq 11,2 \text{ km/s} = 40\,300 \text{ km/h}$):** Pohybová energie koule je tak obrovská, že zcela překoná gravitační přitažlivost Země. Těleso se vzdaluje po otevřené **parabolické** nebo **hyperbolické** dráze a zemské gravitační pole opouští navždy do hlubokého meziplanetárního prostoru.

Geometrické odvození: Proč právě 8 kilometrů za sekundu?

Proč musí těleso u Země letět zrovna rychlostí téměř 8 kilometrů za sekundu, a ne třeba 500 metrů za sekundu?

Země je koule o poloměru $R_{\oplus} \approx 6\,371 \text{ km}$. Z jednoduché geometrie (pomocí Pythagorovy věty) vyplývá základní pravidlo zemského zakřivení: **Na každých 8 kilometrů vodorovného letu poklesne zakřivený horizont Země přibližně o 5 metrů dolů.**

Podle vzorce pro dráhu volného pádu z klidu:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

(kde $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ je tíhové zrychlení a $t = 1$ sekunda)

spadne jakékoli volně puštěné těleso během první sekundy k zemi přesně o:

$$s = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 1^2 \approx 4,9 \text{ metru} \approx \mathbf{5 \text{ metrů}}$$

A nyní spojíme oba poznatky dohromady:

- Pokud kámen za 1 sekundu uletí dopředu **8 kilometrů**, spadne vlivem gravitace k zemi o **5 metrů**.
- Jenže povrch Země pod ním za těchto 8 kilometrů letu klesl rovněž o **5 metrů**!
- Kámen je tedy na konci sekundy **stále ve stejné výšce nad povrchem**, jako byl na jejím začátku!

Aby kámen urazil 8 kilometrů za jedinou sekundu, musí mít rychlost 8 km/s (28 800 km/h). Tímto prostým geometrickým faktem je dána rychlost oběhu kolem naší planety.

1.2 Matematické odvození 1. kosmické rychlosti

Jak tuto rychlost spočítáme zcela přesně pomocí fyzikálních zákonů?

Při pohybu po kružnici musí být síla, která těleso táhne do středu (gravitační síla F_g), přesně rovna síle potřebné k zakřívování dráhy (dostředivé síle F_d):

$$F_g = F_d$$

Dosadíme Newtonův gravitační zákon na levou stranu a vzorec pro dostředivou sílu na pravou stranu:

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Všimněte si, že na obou stranách rovnice vystupuje hmotnost družice m . Můžeme ji proto celou vykrátit:

$$G \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

Vynásobíme obě strany poloměrem r :

$$\frac{G \cdot M}{r} = v^2$$

Odmocněním získáme fundamentální vzorec pro **1. kosmickou (kruhovou) rychlost**:

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

Podrobný rozbor vzorce pro začátečníky: Co které písmeno a znaménko znamená?

Když se na tento vzorec podíváme, vidíme v něm dokonalou logickou stavebnici:

- **Písmeno v_1 (na levé straně):** Představuje **výslednou kruhovou rychlost** v metrech za sekundu [m/s]. Je to rychlost, kterou se družice musí pohybovat po své kruhové dráze, aby nespadla na planetu, ale ani neodlétla do vesmíru.
- **Symbol odmocniny ($\sqrt{\quad}$):** Odmocnina se ve vzorci objevila proto, že kinetická energie družice závisí na druhé mocnině rychlosti (v^2). Znamená to důležitou věc: **závislost není přímo úměrná**. Pokud bychom chtěli oběžnou rychlost zdvojnásobit, musela by mít planeta čtyřikrát větší hmotnost ($2^2 = 4$).
- **Zlomková čára ($\frac{\quad}{\quad}$):** Představuje dělení. Veličiny nahoře (v čitateli) rychlost zvětšují, veličiny dole (ve jmenovateli) ji zmenšují.
- **Písmeno G (v čitateli nahoře):** Je **Newtonova gravitační konstanta** ($G \approx 6,6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$). Vyjadřuje fundamentální sílu gravitačního přitahování v našem vesmíru. Je to pevné číslo, které platí stejně na Zemi jako v nejvzdálenější galaxii.

- **Písmeno M (v čitateli nahoře):** Je **hmotnost centrální planety** v kilogramech [kg] (pro Zemi je to $5,972 \times 10^{24}$ kg). Proč je hmotnost planety nahoře? Čím je planeta těžší a masivnější, tím silněji těleso přitahuje. A čím silnější je přitažlivost, tím rychleji musíte letět, abyste stihli kolem planety uhýbat a nespadli na ni! Kolem obřího Jupiteru musíte letět čtyřikrát rychleji než kolem Země.
- **Písmeno μ (řecké mí, $\mu = G \cdot M$):** V praxi se gravitační konstanta G a hmotnost planety M násobí dohromady do jediné veličiny, které říkáme **gravitační parametr planety** [km^3/s^2]. Pro Zemi má hodnotu přibližně $\mu_{\oplus} \approx 398\,600 \text{ km}^3/\text{s}^2$.
- **Písmeno r (ve jmenovateli dole):** Je **vzdálenost od STŘEDU planety** v metrech či kilometrech ($r = R + h$, kde R je poloměr planety a h je nadmořská výška). Proč je vzdálenost dole ve jmenovateli? Protože gravitační síla se vzdáleností slábne. Čím dále od Země letíte, tím slaběji vás planeta přitahuje – a tím **menší rychlost** vám stačí k udržení na dráze!
- **Co ve vzorci ZCELA CHYBÍ? (Malé písmeno m – hmotnost družice):** Všimněte si zásadního faktu: ve výsledném vzorci vůbec není hmotnost družice! To znamená, že stanice ISS vážící 450 tun, malý satelit o váze 1 kg i astronaut na vesmírné procházce obíhají ve stejné výšce **naprosto stejnou rychlostí**. Gravitace přitahuje těžší tělesa větší silou, ale těžší tělesa mají zároveň větší setrvačnost – tyto dva vlivy se ve vakuu navzájem dokonale vykrátí.

Rozměrová kontrola jednotek: Proč z odmocniny vyjde metr za sekundu?

Začátečníka často zarazí, jak se složité jednotky gravitační konstanty promění v obyčejnou rychlost. Ukažme si to krok za krokem:

1. Jednotka gravitačního parametru $\mu = G \cdot M$ je:

$$[\mu] = \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \text{kg} = \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$$

1. Nyní tento výraz vydělíme poloměrem r , jehož jednotkou je metr [m]:

$$\left[\frac{\mu}{r} \right] = \frac{\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}}{\text{m}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

1. Na závěr provedeme odmocninu:

$$\left[\sqrt{\frac{\mu}{r}} \right] = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Jednotky se dokonale zkrátily a výsledkem je skutečně **metr za sekundu**!

Přehledná tabulka veličin pro 1. kosmickou rychlost

Symbol	Název veličiny	Základní jednotka SI	Praktická jednotka	Význam ve výpočtu
v_1	1. kosmická rychlost	m/s	km/s, km/h	Rychlost nutná pro kruhový oběh
G	Gravitační konstanta	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$	–	Univerzální konstanta ($6,674 \times 10^{-11}$)
M	Hmotnost planety	kg	kg	Hmotnost přitahujícího tělesa
μ	Gravitační parametr (GM)	m^3/s^2	km^3/s^2	Součin $G \cdot M$ (pro Zemi 398 600,44)
r	Vzdálenost od středu	m	km	Vzdálenost od těžiště ($r = R + h$)
R	Poloměr planety	m	km	Poloměr koule (Země: 6 371 km)
h	Nadmořská výška	m	km	Výška nad povrchem planety

Řešený příklad 1.1: Oběžná rychlost a doba oběhu stanice ISS

Zadání: Mezinárodní vesmírná stanice (ISS) obíhá kolem Země ve výšce $h = 415$ km nad zemským povrchem. Vypočítejte:

1. Skutečnou oběžnou rychlost stanice v km/s a v km/h.
2. Dobu, za jakou stanice oběhne celou Zemi (orbitální periodu T) v minutách.
3. Kolikrát stanice obkrouží Zemi během 24 hodin.

Vstupní hodnoty:

- Poloměr Země: $R_{\oplus} = 6\,371\text{ km}$
- Nadmořská výška stanice: $h = 415\text{ km}$
- Gravitační parametr Země: $\mu_{\oplus} = 398\,600,44\text{ km}^3/\text{s}^2$

Postup výpočtu krok za krokem:

1. Nejprve musíme určit celkovou vzdálenost stanice od středu Země (r):

$$r = R_{\oplus} + h = 6\,371 + 415 = \mathbf{6\,786\text{ km}}$$

1. Dosadíme do vzorce kruhové rychlosti:

$$v = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r}} = \sqrt{\frac{398\,600,44}{6\,786}} = \sqrt{58,7386} \approx \mathbf{7,664\text{ km/s}}$$

Převědeme na kilometry za hodinu (vynásobením číslem 3 600, protože hodina má 3 600 sekund):

$$v = 7,664 \times 3\,600 \approx \mathbf{27\,590\text{ km/h}}$$

1. Vypočítáme délku celé oběžné dráhy (obvod kružnice $s = 2\pi r$):

$$s = 2 \cdot \pi \cdot 6\,786 \approx 2 \cdot 3,14159 \cdot 6\,786 \approx \mathbf{42\,637\text{ km}}$$

1. Vypočítáme dobu oběhu T (dráha dělená rychlostí):

$$T = \frac{s}{v} = \frac{42\,637}{7,664} \approx \mathbf{5\,563\text{ sekund}}$$

Převědeme sekundy na minuty (dělením číslem 60):

$$T = \frac{5\,563}{60} \approx \mathbf{92,7\text{ minuty} \approx 1\text{ hodina a }33\text{ minut}}$$

1. Počet oběhů za 24 hodin (jeden den má 1 440 minut):

$$N = \frac{1\,440}{92,7} \approx \mathbf{15,5\text{ oběhu za den}}$$

Praktický závěr: Stanice ISS se řítí vesmírem zběsilou rychlostí přes **27 500 km/h** (z Prahy do Brna by doletěla za necelých 25 sekund!). Celou planetu Zemi obkrouží za pouhou hodinu a půl. Astronauti na její palubě díky tomu zažívají východ nebo západ Slunce každých 45 minut – celkem 16krát za den!

1.3 Gravitační zrychlení ve výšce a tajemství stavu beztíže

Častým mýtem mezi lidmi je představa, že ve výšce 400 km už neexistuje zemská gravitace. Pojďme si spočítat, jak silná gravitace na stanici ISS ve skutečnosti působí.

Gravitační zrychlení v libovolné vzdálenosti r od středu planety spočítáme podle vzorce:

$$g(r) = \frac{\mu}{r^2}$$

Podrobný rozbor vzorce pro gravitační zrychlení:

- $g(r)$: Zrychlení volného pádu v metrech za sekundu na druhou [m/s^2]. Na povrchu Země je to známých $9,81\text{ m/s}^2$.
- μ : Gravitační parametr planety ($G \cdot M$).
- r^2 : Druhá mocnina vzdálenosti od středu planety. Právě druhá mocnina způsobuje, že se vzdalováním gravitace rychle slábne (tzv. zákon obrácených čtverců).

Řešený příklad 1.2: Kolik procent gravitace působí na stanici ISS?

Výpočet na povrchu Země ($r = 6\,371\text{ km}$):

$$g_0 = \frac{398\,600,44}{(6\,371)^2} = \frac{398\,600,44}{40\,589\,641} \approx 9,82\text{ m/s}^2$$

Výpočet ve výšce stanice ISS ($r = 6\,786\text{ km}$):

$$g_{ISS} = \frac{398\,600,44}{(6\,786)^2} = \frac{398\,600,44}{46\,049\,796} \approx 8,66\text{ m/s}^2$$

Porovnání obou hodnot:

$$\frac{g_{ISS}}{g_0} = \frac{8,66}{9,82} \approx 0,882 = 88,2\%$$

Fyzikální závěr: Zemská gravitace ve výšce stanice ISS dosahuje celých **88,2 % své plné pozemské síly!** Je oslabena o pouhých necelých 12 procent. Kdybychom postavili pevnou věž vysokou 400 kilometrů a postavili se na její vrchol na osobní váhu, člověk vážící 80 kg by navážil téměř 71 kg. Cítil by se téměř stejně těžký jako doma.

Proč se tedy astronauti vznášejí?

Důvodem je **princip ekvivalence (shodnosti)**: Představte si velký výtah v mrakodrapu, kterému prasknou všechna nosná lana. Kabina výtahu padá volným pádem k zemi se zrychlením $g = 9,81\text{ m/s}^2$.

Co se stane uvnitř padajícího výtahu?

- Lidé v kabině padají k zemi zrychlením g .
- Podlaha výtahu pod jejich nohama padá k zemi naprosto stejným zrychlením g .
- Pokud člověk pustí z ruky jablko, jablko padá k zemi rovněž zrychlením g .
- Protože všechno padá naprosto stejným tempem, podlaha nepůsobí na nohy žádným tlakem a jablko zůstane viset vedle vaší ruky. Všichni uvnitř prožívají dokonalý **stav beztíže!**

Na oběžné dráze astronauti prožívají přesně tento padající výtah. Kosmická loď i kosmonauté nepřetržitě padají k Zemi. Rozdíl je pouze v tom, že díky obrovské boční rychlosti 28 000 km/h zemský povrch pod nimi neustále uhýbá, takže kabina nikdy nenarazí do dna šachty. Stav beztíže tedy neznamená nepřítomnost gravitace, ale její volné, ničím nerušené působení.

1.4 Odvození 2. kosmické (únikové) rychlosti

Pokud chceme vyslat sondu k Měsíci, k Marsu nebo ještě dále do vesmíru, nestačí nám kruhová rychlost. Musíme lodi udělit tak velkou kinetickou energii, aby dokázala zcela vylézt z gravitační jámy planety.

Ze zákona zachování mechanické energie platí, že celková energie tělesa je součtem kinetické energie (energie pohybu) a potenciální energie (energie polohy):

$$E_{celk} = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M \cdot m}{r}$$

Proč je gravitační potenciální energie záporná?

Začátečníky často mate znaménko minus (–) před gravitační potenciální energií. Proč tam je? Gravitace je výhradně přitažlivá síla. Představte si gravitační pole planety jako **hlubokou nálevkovitou jámu**:

- Na dně jámy (na povrchu planety) jsme gravitačně uvězněni. Naše energie je hluboko v záporných hodnotách.
- Čím výše z jámy stoupáme, tím je gravitační sevření slabší a energie stoupá k nule.
- Teprve v nekonečné vzdálenosti ($r \rightarrow \infty$), kde už na nás planeta vůbec nedosáhne, je gravitační potenciál roven **nule**.
- Znaménko minus nám tedy říká, kolik energie nám ještě chybí k tomu, abychom se z gravitační jámy osvobodili!

Aby těleso dokázalo uniknout do nekonečna a gravitace planety jej už nikdy nestáhla zpět, musí být jeho celková energie alespoň nulová ($E_{celk} = 0$):

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = 0$$

Vykrátíme hmotnost tělesa m :

$$\frac{1}{2}v_2^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Vynásobíme dvěma:

$$v_2^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{r} = \frac{2\mu}{r}$$

Odmocněním získáváme vzorec pro **2. kosmickou (únikovou) rychlost**:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

Krásný vztah mezi 1. a 2. kosmickou rychlostí: Magická odmocnina ze dvou

Když porovnáme vzorec pro 1. kosmickou rychlost $v_1 = \sqrt{\mu/r}$ a 2. kosmickou rychlost $v_2 = \sqrt{2\mu/r}$, spatříme úžasnou matematickou eleganci:

$$v_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{2} \cdot v_1 \approx 1,4142 \cdot v_1$$

To je jedno ze zlatých pravidel kosmonautiky: **Úniková rychlost je vždy přesně $\sqrt{2}$ -násobkem (o 41,4 % vyšší) než kruhová rychlost ve stejné výšce!**

Ať jste u Země, u Marsu, u obřího Jupiteru nebo na oběžné dráze kolem Slunce, k opuštění oběžné dráhy vám stačí zvýšit rychlost o pouhých **41,4 %**!

Řešený příklad 1.3: Únikové rychlosti z Měsíce a Marsu

Zadání: Vypočítejte únikovou rychlost z povrchu Měsíce a Marsu a porovnejte je se Zemí. **Vstupní hodnoty:**

- **Země:** $\mu_{\oplus} = 398\,600 \text{ km}^3/\text{s}^2$, poloměr $R_{\oplus} = 6\,371 \text{ km}$
- **Měsíc:** $\mu_{\text{Měsíc}} = 4\,903 \text{ km}^3/\text{s}^2$, poloměr $R_{\text{Měsíc}} = 1\,737 \text{ km}$
- **Mars:** $\mu_{\text{Mars}} = 42\,828 \text{ km}^3/\text{s}^2$, poloměr $R_{\text{Mars}} = 3\,390 \text{ km}$

Výpočet:

1. **Úniková rychlost ze Země:**

$$v_{2,\oplus} = \sqrt{\frac{2 \cdot 398\,600}{6\,371}} = \sqrt{125,13} \approx 11,19 \text{ km/s} \approx 40\,300 \text{ km/h}$$

1. **Úniková rychlost z Měsíce:**

$$v_{2,\text{Měsíc}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4\,903}{1\,737}} = \sqrt{\frac{9\,806}{1\,737}} = \sqrt{5,645} \approx 2,38 \text{ km/s} \approx 8\,550 \text{ km/h}$$

1. **Úniková rychlost z Marsu:**

$$v_{2,\text{Mars}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 42\,828}{3\,390}} = \sqrt{\frac{85\,656}{3\,390}} = \sqrt{25,267} \approx 5,03 \text{ km/s} \approx 18\,100 \text{ km/h}$$

Astrofyzikální význam výsledku (Proč má Měsíc vakuové ticho a Země hustý vzduch?): Molekuly plynů v atmosféře (kyslík, dusík, vodní pára) se neustále pohybují tepelným chaotickým pohybem. Při teplotě kolem 20 °C dosahuje průměrná tepelná rychlost lehkých molekul stovek metrů za sekundu.

- Na Měsíci je úniková rychlost pouhých 2,38 km/s. Zahřáté molekuly plynu tuto rychlost snadno překonaly a během stovek milionů let z Měsíce nenávratně unikly do otevřeného vesmíru. Měsíc si proto nedokázal udržet žádnou atmosféru!
- Na Zemi je úniková rychlost vysoká (11,2 km/s), takže zemská gravitace dokáže kyslík i dusík spolehlivě držet po miliardy let.

1.5 Tři kosmické rychlosti: Přehledové srovnání

V kosmonautice používáme tři základní rychlostní milníky vztažené k naší planetě Zemi:

Kosmická rychlost	Odborný název	Teoretický vzorec	Hodnota u povrchu Země	Fyzikální význam v praxi	Reálný příklad mise
1. kosmická (v_1)	Kruhová rychlost	$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$	7,91 km/s (28 480 km/h)	Těleso nespadne a trvale obíhá Zemi po kružnici	ISS, satelity Starlink, Hubble
2. kosmická (v_2)	Parabolická (úniková)	$v_2 = \sqrt{2} \cdot v_1$	11,19 km/s (40 280 km/h)	Těleso překoná gravitaci Země a odletí k jiným planetám	Lety Apollo k Měsíci, sondy k Marsu
3. kosmická (v_3)	Heliocentrický únik	$v_3 \approx 16,67 \text{ km/s}$	16,67 km/s (60 000 km/h)	Těleso překoná i gravitaci Slunce a opustí Sluneční soustavu	Sondy Voyager 1 a 2, New Horizons

☒ SHRNUTÍ: CO SI Z TÉTO KAPITOLY ODNÉŠT

- **Oběžná dráha je nekonečný volný pád:** Družice nespadne na zem proto, že letí tak rychle do strany (8 km/s), že zakřivený povrch planety pod ní neustále ubíhá dolů.
- **Kruhová rychlost** ($v_1 = \sqrt{\mu/r}$): Závisí pouze na hmotnosti planety a vzdálenosti od jejího středu. Na hmotnosti družice vůbec nezáleží – pířko i stanice ISS obíhají stejně rychle.
- **Úniková rychlost** ($v_2 = \sqrt{2} \cdot v_1$): Je vždy přesně o 41,4 % vyšší než kruhová rychlost ve stejné výšce.
- **Stav beztíže:** Na stanici ISS působí téměř 90 % zemské gravitace. Beztíže vzniká tím, že stanice i posádka padají společně volným pádem.

Kapitola 2: Gravitační pole a tajemství kosmického těžiště

Když stojíme na zemském povrchu, vnímáme gravitaci jako samozřejmost – jako neviditelné lano, které drží naše nohy přilepené k zemi a nutí upuštěný telefon spadnout na podlahu. V nebeské mechanice je však gravitace jediným vládcem vesmíru, neviditelným dirigentem, který řídí tanec planet kolem Slunce, pohyb měsíců i dráhy kosmických sond letících k okrajům naší soustavy.

V této kapitole prozkoumáme základní matematický zákon gravitačního přitahování, rozebereme si každou jeho část do nejmenších detailů a odhalíme fascinující tajemství: **ve vesmíru ve skutečnosti žádné těleso neobíhá kolem středu jiného tělesa**. Všechna tělesa tančí kolem společného pomyslného bodu v prostoru – kolem **barycentra**.

2.1 Newtonův gravitační zákon a zákon obrácených čtverců

V roce 1687 formuloval Isaac Newton gravitační zákon, který platí v celém pozorovatelném vesmíru:

$$F_g = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Podrobný rozbor vzorce pro začátečníky: Co které písmeno a číslo znamená?

Tento vzorec vypadá na první pohled jednoduše, ale je v něm ukryta celá fyzika vesmíru:

- **Písmeno F_g (na levé straně):** Představuje **gravitační přitažlivou sílu** mezi dvěma tělesy. Udává se v **newtonech [N]**. Pro představu z běžného života: síla jednoho newtonu (1 N) je přibližně tíha, kterou v dlani tlačí tabulka čokolády o hmotnosti 100 gramů. Gravitační síla mezi Zemí a Měsícem je nepředstavitelná – činí přibližně 2×10^{20} N (dvě stě trilionů newtonů)!
- **Znaménko rovnosti (=):** Vyjadřuje, že gravitační síla je přesně určena součinem hmotností a vzdáleností.
- **Písmeno G (v čitateli nahoře):** Je **univerzální gravitační konstanta**:

$$G \approx 6,6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Co znamená to extrémně malé číslo 10^{-11} ? * Znamená to 0,000000000066743. Gravitace je ve skutečnosti **nejslabší ze všech fyzikálních sil ve vesmíru!** Dva lidé sedící vedle sebe v lavici se přitahují gravitační silou o velikosti pouhých stomiliontin newtonu, kterou vůbec nemůžeme cítit. Gravitace se stane mocnou teprve tehdy, když se spojí hmota celé planety o váze bilionů bilionů tun.

- **Součin hmotností $M \cdot m$ (v čitateli nahoře):** Zde násobíme hmotnost prvního tělesa (M) a hmotnost druhého tělesa (m) v kilogramech [kg]. Proč se obě hmotnosti násobí? * Podle 3. Newtonova pohybového zákona (akce a reakce) platí: jestliže Země přitahuje vás, **vy přitahujete Zemi naprosto stejnou silou!** Gravitace je vždy vzájemná. Čím hmotnější jsou obě tělesa, tím větší silou se k sobě přitahují.
- **Člen r^2 (ve jmenovateli dole – druhá mocnina vzdálenosti):** Zde leží největší tajemství nebeské mechaniky. Vzdálenost r mezi středy obou těles vystupuje **ve druhé mocnině**. Říkáme tomu **zákon obrácených čtverců** ($1/r^2$).

Proč právě druhá mocnina vzdálenosti (r^2)? Geometrické odůvodnění

Proč gravitační síla klesá právě se čtvercem vzdálenosti, a ne třeba lineárně s r nebo s třetí mocninou r^3 ?

Důvod je geometrický: žijeme v **trojrozměrném prostoru**. Představte si gravitační pole jako světlo ze svíčky hořící v temné místnosti:

- Světlo se šíří ze středu všemi směry do tvaru koule.
- Povrch koule o poloměru r se počítá podle známého geometrického vzorce:

$$S = 4\pi r^2$$

- Když se vzdálenost od svíčky **zdvojnásobí** ($r = 2$), stejné množství světla se musí rozprostřít na kouli se **čtyřnásobným povrchem** ($2^2 = 4$). Světlo je tedy čtyřikrát slabší!
- Když se vzdálenost zvětší **desetkrát** ($r = 10$), plocha naroste **stonásobně** ($10^2 = 100$). Světlo je stonásobně slabší.

U gravitace se děje naprosto totéž. Gravitační silové působení se ze středu planety „rozředí“ na povrchu stále větší pomyslné sféry o ploše $4\pi r^2$. Hustota gravitačního toku proto nutně klesá nepřímo úměrně **druhé mocnině vzdálenosti** ($1/r^2$).

Co zákon obrácených čtverců znamená v praxi?

Změna vzdálenosti od středu planety	Matematický výpočet ($1/r^2$)	Jak se změní gravitační přitažlivost
Vzdálenost se zdvojnásobí ($2\times$)	$1/2^2 = 1/4$	Klesne na čtvrtinu (25 %)
Vzdálenost se ztrojnásobí ($3\times$)	$1/3^2 = 1/9$	Klesne na jednu devítinu (11 %)
Vzdálenost se zvětší desetkrát ($10\times$)	$1/10^2 = 1/100$	Klesne na setinu (1 %)
Vzdálenost se zvětší šedesátkrát ($60\times$, jako k Měsíci)	$1/60^2 = 1/3\,600$	Klesne 3 600krát!

Právě proto je zemská přitažlivost na nízké dráze ve výšce 400 km stále téměř plná (vzdálenost od středu Země vzrostla ze 6 371 km na 6 786 km, což je navýšení pouze o 6,5 %, takže síla klesla jen o 12 %), zatímco u Měsíce je zemská gravitace slabší více než 3 600krát!

2.2 Standardní gravitační parametr (μ): Rodné číslo těles

V kosmických agenturách jako NASA nebo ESA téměř nikdy nevidíte inženýry násobit gravitační konstantu G a hmotnost planety M odděleně. Místo toho používají jejich součin označený řeckým písmenem μ (**mí**):

$$\mu = G \cdot M$$

Proč se to dělá? (Metrologické vysvětlení pro začátečníky)

Určit gravitační konstantu G v pozemské laboratoři pomocí zkrcovaných vah je mimořádně obtížné. Gravitace je slabá a ruší ji každý otřes budovy i projíždějící tramvaj. Její hodnotu známe pouze na 4 až 5 platných cifer.

Když však sledujeme družici obíhající kolem planety, z její doby oběhu T a vzdálenosti r dokážeme pomocí Keplerova zákona určit **součin $G \cdot M$ s neuvěřitelnou přesností na 10 až 12 desetinných míst!**

V astrodynamice má proto každé těleso Sluneční soustavy své přesné „rodné číslo“ μ :

Těleso	Hmotnost M [kg]	Gravitační parametr μ [km ³ /s ²]	Tíhové zrychlení na povrchu g [m/s ²]
Slunce	$1,9885 \times 10^{30}$	132 712 440 018	274 m/s ² (28 g)
Jupiter	$1,8982 \times 10^{27}$	126 686 534	24,79 m/s ² (2,53 g)
Saturn	$5,6834 \times 10^{26}$	37 931 187	10,44 m/s ² (1,06 g)
Země	$5,9722 \times 10^{24}$	398 600,4418	9,81 m/s ² (1,00 g)
Venuše	$4,8675 \times 10^{24}$	324 859	8,87 m/s ² (0,90 g)
Mars	$6,4171 \times 10^{23}$	42 828,3	3,72 m/s ² (0,38 g)
Merkur	$3,3011 \times 10^{23}$	22 032	3,70 m/s ² (0,38 g)
Měsíc	$7,342 \times 10^{22}$	4 902,8	1,62 m/s ² (0,165 g)
Pluto	$1,303 \times 10^{22}$	871	0,62 m/s ² (0,063 g)

2.3 Kosmický tanec dvou těles: Kde leží barycentrum?

Když se podíváme na nákres v běžných encyklopediích, vidíme uprostřed nehybnou Zemi a kolem ní kroužící Měsíc. Z hlediska fyziky je to však nepřesné.

Podle zákona akce a reakce platí: pokud Země přitahuje Měsíc, Měsíc přitahuje Zemi naprosto stejnou silou! Proto Země nemůže stát nehybně na místě. Ve skutečnosti **obě tělesa společně obíhají kolem jednoho společného těžiště celé soustavy**, kterému

říkáme **barycentrum**.

Představte si dětskou houpačku (páku):

- Když na jedné straně sedí dospělý člověk a na druhé malé dítě, opěrný bod uprostřed (těžiště) musí být posunut velmi blízko k dospělému, aby byla houpačka v rovnováze.
- Ve vesmíru platí momentová věta rovnováhy:

$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$$

Matematické odvození polohy barycentra

Celková vzdálenost mezi středy obou těles je $d = r_1 + r_2$. Odtud vyjádříme vzdálenost druhého tělesa:

$$r_2 = d - r_1$$

Dosadíme do momentové věty:

$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot (d - r_1)$$

$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot d - m_2 \cdot r_1$$

Převědeme členy s neznámou r_1 na levou stranu:

$$m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_1 = m_2 \cdot d$$

$$r_1 \cdot (m_1 + m_2) = m_2 \cdot d$$

Vydělíme celkovou hmotností soustavy ($m_1 + m_2$) a získáme vzorec pro vzdálenost těžiště od středu prvního tělesa:

$$r_1 = d \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

A pro vzdálenost těžiště od středu druhého tělesa:

$$r_2 = d \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Podrobný rozbor vzorce pro barycentrum:

- r_1 : Vzdálenost barycentra (těžiště) od středu těžšího tělesa (např. Země).
- d : Vzdálenost mezi středy obou těles.
- **Zlomek** $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$: Poměr hmotnosti menšího tělesa k celkové hmotnosti obou těles dohromady. Proč je v čitateli nahoře hmotnost toho DRUHÉHO tělesa m_2 ?* Přesně jako na houpačce: čím těžší je to druhé těleso, tím dále od středu tělesa 1 se těžiště posune! Kdyby obě tělesa vážila stejně ($m_1 = m_2$), zlomek bude roven $1/2$ a těžiště bude ležet přesně uprostřed mezi nimi ($r_1 = d/2$).

Řešený příklad 2.1: Kde leží těžiště soustavy Země–Měsíc?

Zadání: Vypočítejte polohu barycentra soustavy Země–Měsíc a zjistěte, zda se toto těžiště nachází uvnitř zemského tělesa, nebo ve volném vesmíru. **Vstupní data:**

- Hmotnost Země: $M_{\oplus} = 5,9722 \times 10^{24}$ kg
- Hmotnost Měsíce: $M_{\text{Měsíc}} = 7,342 \times 10^{22}$ kg
- Průměrná vzdálenost středů: $d = 384\,400$ km
- Poloměr planety Země: $R_{\oplus} = 6\,371$ km

Postup výpočtu krok za krokem:

1. Vypočítáme celkovou hmotnost soustavy:

$$M_{celk} = M_{\oplus} + M_{Měsíc} = 5,9722 \times 10^{24} + 0,0734 \times 10^{24} \approx \mathbf{6,0456 \times 10^{24} \text{ kg}}$$

1. Vypočítáme poměr hmotností:

$$\frac{M_{Měsíc}}{M_{celk}} = \frac{7,342 \times 10^{22}}{6,0456 \times 10^{24}} \approx \mathbf{0,012144 \approx 1,21 \%}$$

1. Dosadíme do vzorce pro vzdálenost barycentra od středu Země r_1 :

$$r_1 = d \cdot \frac{M_{Měsíc}}{M_{celk}} = 384\,400 \cdot 0,012144 \approx \mathbf{4\,668 \text{ km}}$$

1. Porovnáme výsledek s poloměrem Země ($R_{\oplus} = 6\,371 \text{ km}$):

$$h = R_{\oplus} - r_1 = 6\,371 - 4\,668 = \mathbf{1\,703 \text{ km}}$$

Fyzikální závěr: Společné těžiště soustavy Země–Měsíc leží **4 668 km od středu Země**, což znamená zhruba **1 700 km pod zemským povrchem** (uvnitř zemského pláště). Země a Měsíc tedy obíhají kolem tohoto bodu. Zatímco Měsíc obíhá po obrovské dráze o poloměru 380 000 km, samotná planeta Země se při tom kolébá po malé kružnici o poloměru 4 668 km jednou za 27,3 dne rychlostí přibližně 45 km/h!

Řešený příklad 2.2: Kde leží těžiště soustavy Slunce–Jupiter?

Jupiter je největší planetou naší soustavy – váží více než 300 zeměkoulí. Kde leží barycentrum naší mateřské hvězdy a tohoto plynného obra?

Vstupní data:

- Hmotnost Slunce: $M_{\odot} = 1,9885 \times 10^{30} \text{ kg}$
- Hmotnost Jupiteru: $M_{Jup} = 1,8982 \times 10^{27} \text{ kg}$
- Vzdálenost Jupiteru od Slunce: $d = 778,57 \times 10^6 \text{ km}$
- Poloměr Slunce: $R_{\odot} = 696\,340 \text{ km}$

Výpočet:

1. Poměr hmotností:

$$\frac{M_{Jup}}{M_{\odot} + M_{Jup}} = \frac{1,8982 \times 10^{27}}{1,9904 \times 10^{30}} \approx 0,00095368$$

1. Vzdálenost těžiště od středu Slunce:

$$r_1 = 778,57 \times 10^6 \cdot 0,00095368 \approx \mathbf{742\,500 \text{ km}}$$

1. Porovnáme s poloměrem Slunce ($R_{\odot} = 696\,340 \text{ km}$):

$$\Delta r = r_1 - R_{\odot} = 742\,500 - 696\,340 = \mathbf{+46\,160 \text{ km}}$$

Fascinující fyzikální objev: Těžiště soustavy Slunce–Jupiter leží **více než 46 000 km nad povrchem Slunce**, tedy v otevřeném kosmickém prostoru! Slunce tedy v žádném případě není nehybným středem naší soustavy. Jupiter svým gravitačním tahem nutí Slunce obíhat kolem prázdného bodu ve vesmíru rychlostí přibližně 12,5 m/s (45 km/h)!

Jak astronomové objevují cizí planety u vzdálených hvězd? (Metoda radiálních rychlostí)

Tento tanec hvězdy kolem barycentra dnes představuje nejúspěšnější nástroj k objevování cizích planet (exoplanet) v hlubokém vesmíru.

Cizí planeta je příliš malá a temná, než abychom ji mohli vidět přímo dalekohledem. Když však kolem hvězdy obíhá těžká planeta, hvězda se vlivem pohybu kolem barycentra periodicky kolébá – chvíli se pohybuje směrem k Zemi a chvíli od Země:

- Když se hvězda pohybuje směrem k nám, její světlo se vlivem Dopplerova jevu posune k **modrému konci spektra**.

- Když se vzdaluje, posune se k **červenému konci spektra**.

Z tohoto nepatrného barevného posunu světla dokážeme s jistotou určit přítomnost neviditelné planety, její hmotnost i dobu oběhu na vzdálenost stovek světelných let!

Řešený příklad 2.3: Pluto a Charon – Skutečná dvojplaneta

Trpasličí planeta Pluto má měsíc Charon, který je na poměry měsíců obrovský – váží celých 12 % hmotnosti samotného Pluta ($m_2/m_1 \approx 0,122$).

- Vzdálenost mezi nimi: $d = 19\,596\text{ km}$
- Poloměr Pluta: $R_{Pluto} = 1\,188\text{ km}$

Vypočítáme polohu jejich barycentra:

$$r_1 = d \cdot \frac{m_{Charon}}{m_{Pluto} + m_{Charon}} = 19\,596 \cdot \frac{0,122}{1 + 0,122} \approx 19\,596 \cdot 0,1087 \approx \mathbf{2\,130\text{ km}}$$

Porovnáme s poloměrem Pluta (1 188 km):

$$\Delta r = 2\,130 - 1\,188 \approx \mathbf{942\text{ km}}$$

Závěr: Těžiště soustavy leží téměř **tisíc kilometrů nad povrchem Pluta v prázdném prostoru**. Pluto a Charon jsou prototypem skutečné **gravitační dvojplanety** – obě tělesa krouží kolem prázdného bodu mezi nimi jako dvě závaží spojená neviditelnou tyčí.

☒ SHRNUÍ: CO SI Z TÉTO KAPITOLY ODNÉŠT

- **Gravitační zákon** ($F_g = G \frac{Mm}{r^2}$): Gravitace je vzájemná přitažlivost mezi dvěma tělesy. Klesá s druhou mocninou vzdálenosti ($1/r^2$), protože se silové působení rozprostírá na povrch sféry ($4\pi r^2$).
- **Gravitační parametr** ($\mu = GM$): Součin gravitační konstanty a hmotnosti planety, který známe z pozorování drah s mnohonásobně vyšší přesností než samotné G nebo M .
- **Barycentrum** ($r_1 = d \frac{m_2}{m_1 + m_2}$): Tělesa nikdy neobíhají kolem středu druhého tělesa, ale kolem společného těžiště.
- **Země vs. Jupiter**: Barycentrum Země a Měsíce leží 1 700 km pod zemským povrchem, zatímco barycentrum Slunce a Jupiteru leží celých 46 000 km nad povrchem Slunce v otevřeném vesmíru.

Kapitola 3: Zákony zachování a tajemství orbitální rychlosti

Když se podíváte na krasobruslaře provádějícího piruetu na ledě, spatříte fascinující fyzikální kouzlo: když má paže rozpažené do stran, točí se pomalu a ladně. Jakmile však prudce přitáhne ruce k hrudi, jeho rotace se okamžitě a bez jediného odrazu zběsile zrychlí. Když paže znovu roztáhne, pohyb se poslušně zpomalí.

Přesně toto pravidlo řídí veškerý pohyb nebeských těles ve vesmíru. Oběžná dráha není statický kruh, ale obrovská kosmická horská dráha, na které těleso neustále přelévá energii z jedné formy do druhé.

V této kapitole odhalíme dva neotřesitelné pilíře nebeské mechaniky: **zákon zachování momentu hybnosti** a **zákon zachování mechanické energie**. Tyto dva zákony vyústí v nejslavnější a nejvíce používaný vzorec celé astrodynamiky – **rovnici Vis–Viva**.

3.1 Krasobruslařský efekt ve vesmíru: Zachování momentu hybnosti

Při pohybu v gravitačním poli směřuje přitažlivá síla vždy přesně do středu planety. To znamená, že vůči středu planety nepůsobí **žádný točivý moment** – síla se nesnaží těleso v rotaci zrychlit ani zbrzdit, míří přímo do osy otáčení.

Z druhého Newtonova pohybového zákona pro rotační pohyb proto vyplývá fundamentální pravidlo: **specifický orbitální moment hybnosti h se v čase absolutně nemění**:

$$h = r \cdot v_{\perp} = \text{konst.}$$

- r – okamžitá vzdálenost tělesa od středu planety v metrech [m].
- $v_{\perp}$ – složka rychlosti kolmá k průvodiči (obvodová rychlost) v metrech za sekundu [m/s].
- h – specifický moment hybnosti na jeden kilogram hmotnosti [m²/s].

Důsledek pro eliptickou dráhu: Tajemství apsid

Na protáhlé eliptické dráze se vzdálenost od planety neustále mění:

- V nejnižším bodě dráhy (**pericentru**, u Země v perigeu) je těleso planetě nejbližší: vzdálenost je minimální (r_p).
- V nejvyšším bodě dráhy (**apocentru**, u Země v apogeu) je těleso od planety nejdále: vzdálenost je maximální (r_a).

V obou těchto bodech letí těleso přesně kolmo ke spojnici se středem planety. Protože součin vzdálenosti a rychlosti musí zůstat stálý ($h = \text{konst.}$), platí nádherně jednoduchý vztah:

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$$

- r_p – vzdálenost v perigeu (nejblíže k planetě).
- v_p – maximální rychlost v perigeu.
- r_a – vzdálenost v apogeu (nejdále od planety).
- v_a – minimální rychlost v apogeu.

Co to znamená v praxi?

Přesně jako krasobruslař:

- Když se družice přiblíží k planetě (r_p je malé), musí se její rychlost v_p prudce zvýšit, aby součin zůstal zachován!
- Když se družice vzdálí do hlubin vesmíru (r_a je velké), její rychlost v_a se poslušně zpomalí.

Družice tedy kolem planety prolétne obrovskou rychlostí jako vystřelená z praku, a jak stoupá vzhůru, postupně brzdí, až v nejvyšším bodě téměř zastaví.

3.2 Energetická horská dráha: Zachování mechanické energie

V dokonalém vakuu vesmíru neexistuje žádný vzduch, který by kosmickou loď brzdil třením. Mechanická energie se nemá kam vytrátit – nemůže se proměnit v teplo ani zvuk.

Celková specifická mechanická energie družice $\mathcal{E}$ (energie vztažená na 1 kg hmotnosti tělesa, s jednotkou [J/kg] nebo [km²/s²]) je dána součtem kinetické (pohybové) a gravitační potenciální (polohové) energie:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \text{konst.}$$

V nebeské mechanice platí mimořádně hluboký teoretický objev: **celková energie uzavřené eliptické dráhy závisí výhradně na její velké poloose a :**

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a}$$

- a – velká poloosa elipsy (polovina nejdelšího rozměru dráhy).
- μ – gravitační parametr planety ($G \cdot M$).

Proč je celková energie oběžné dráhy záporná?

Všimněte si znaménka minus (–) před zlomkem:

- **Záporná energie ($\mathcal{E} < 0$):** Znamená, že těleso je **gravitačně uvězněno** v gravitační studni planety. Nemá dostatek energie na to, aby odletělo pryč. Všechny uzavřené oběžné dráhy (kružnice a elipsy) mají zápornou celkovou energii! Čím menší je velká poloosa a (čím blíže u planety obíháte), tím je energie zápornější a tím těžší je z gravitačního sevření uniknout.
- **Nulová energie ($\mathcal{E} = 0$):** Těleso má přesně tolik energie, aby uniklo do nekonečna. Dráha se otevře do **paraboly**.
- **Kladná energie ($\mathcal{E} > 0$):** Těleso má přebytek energie. Unikne do mezihvězdného prostoru po **hyperbole** a v nekonečnu mu ještě zbude nenulová rychlost.

3.3 Nejslavnější vzorec nebeské mechaniky: Rovnice Vis–Viva

Nyní spojíme oba výrazy pro celkovou energii dohromady:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

Chceme zjistit, jakou okamžitou rychlost v má těleso v libovolném bodě své dráhy ve vzdálenosti r . Převědeme potenciální energii na pravou stranu:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2a} = \mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$$

Celou rovnici vynásobíme dvěma ($2 \cdot \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$ a $2 \cdot \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}$):

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Odmocněním získáváme slavnou **rovnici Vis–Viva** (z latinského *živá síla*):

$$v(r) = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Podrobný rozbor rovnice Vis–Viva pro začátečníky: Co které číslo a písmeno znamená?

Tato jediná rovnice je „švýcarským nožem“ každého raketového navigátora. Pojdme si ji rozebrat do posledního symbolu:

- **Písmeno $v(r)$ (na levé straně):** Okamžitá rychlost tělesa v metrech za sekundu [m/s] nebo kilometrech za sekundu [km/s].
- **Písmeno μ (před závorkou):** Gravitační parametr planety ($G \cdot M$). Pro Zemi je to $398\,600 \text{ km}^3/\text{s}^2$. Čím těžší je planeta, tím vyšší je rychlost.
- **Člen $\frac{2}{r}$ (v závorce první):** Představuje vliv **okamžité vzdálenosti**. r je vzdálenost od středu planety právě v tomto okamžiku*. Odkud se vzala ta dvojka v čitateli? Pochází z kinetické energie $\frac{1}{2}v^2$, kterou jsme na začátku odvození vynásobili dvěma! * Když se těleso přiblíží k planetě (r je malé), zlomek $2/r$ prudce vzroste – a proto družice letí nejrychleji!
- **Znaménko minus (–) v závorce:** Vyjadřuje zákon zachování energie: potenciální a kinetická energie se přelévají jako voda mezi dvěma spojenými nádobami. Když jedna roste, druhá musí klesnout.
- **Člen $\frac{1}{a}$ (v závorce druhý):** Představuje **celkovou velikost a energii celé dráhy** (a je velká poloosa elipsy). * Všimněte si, že pro celou jednu neměnnou oběžnou dráhu je číslo $1/a$ **stálá konstanta**! Vůbec se během oběhu nemění.

Jak rovnice Vis–Viva vysvětluje všechny typy drah?

Podívejme se, jak elegantně z této jediné rovnice vyplynou všechny ostatní vzorce nebeské mechaniky:

1. **Dokonalá kružnice** ($r = a$): Na kruhové dráze je vzdálenost r v každém okamžiku rovna velké poloose a . Dosadíme $r = a$:

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\mu \cdot \frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

Okamžitě jsme získali známý vzorec pro 1. kosmickou rychlost! Na kružnici je rychlost v každém bodě stálá.

1. **Parabola – únik z gravitace** ($a \rightarrow \infty$): Parabolická dráha má nekonečně velkou poloosu ($a = \infty$). Člen $1/\infty$ je roven nule:

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - 0 \right)} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

A máme před sebou přesně vzorec pro 2. kosmickou únikovou rychlost!

1. **Eliptická dráha:** * V nejnižším bodě (pericentru r_p) je r nejmenší, takže člen $2/r$ je maximální $\Rightarrow$ **zde je rychlost největší** (v_{max}). * V nejvyšším bodě (apocentru r_a) je r největší, takže člen $2/r$ je minimální $\Rightarrow$ **zde je rychlost nejmenší** (v_{min}).

Řešený příklad 3.1: Satelit Molnija – Rychlost v perigeu versus v apogeu

Družice typu Molnija létají po vysoce protáhlé dráze, aby zajišťovaly telekomunikační spojení pro severní polární oblasti.

- Výška v perigeu: $h_p = 500 \text{ km}$
- Výška v apogeu: $h_a = 40\,000 \text{ km}$
- Poloměr Země: $R_\oplus = 6\,371 \text{ km}$
- Gravitační parametr Země: $\mu_\oplus = 398\,600,44 \text{ km}^3/\text{s}^2$

Zadání: Vypočítejte velkou poloosu a a pomocí rovnice Vis–Viva spočítejte rychlost družice v nejnižším bodě (v_p) a v nejvyšším bodě (v_a).

Postup výpočtu krok za krokem:

1. Vypočítáme vzdálenosti od středu Země:

$$r_p = R_\oplus + h_p = 6\,371 + 500 = \mathbf{6\,871 \text{ km}}$$

$$r_a = R_\oplus + h_a = 6\,371 + 40\,000 = \mathbf{46\,371 \text{ km}}$$

1. Velká poloosa a je průměrem obou vzdáleností:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{6\,871 + 46\,371}{2} = \frac{53\,242}{2} = \mathbf{26\,621 \text{ km}}$$

1. Vypočítáme stálý člen energie $1/a$:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{26\,621} \approx 0,00003756 \text{ km}^{-1}$$

1. Výpočet rychlosti v perigeu ($r = 6\,871 \text{ km}$):

$$\frac{2}{r_p} = \frac{2}{6\,871} \approx 0,00029108 \text{ km}^{-1}$$

Rozdíl v závorce:

$$\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} = 0,00029108 - 0,00003756 = 0,00025352 \text{ km}^{-1}$$

Vynásobíme parametrem $\mu_{\oplus}$:

$$v_p^2 = 398\,600,44 \cdot 0,00025352 \approx 101,05 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

Odmocníme:

$$v_p = \sqrt{101,05} \approx 10,05 \text{ km/s} \approx 36\,180 \text{ km/h}$$

1. Výpočet rychlosti v apogeu ($r = 46\,371 \text{ km}$):

$$\frac{2}{r_a} = \frac{2}{46\,371} \approx 0,00004313 \text{ km}^{-1}$$

Rozdíl v závorce:

$$\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} = 0,00004313 - 0,00003756 = 0,00000557 \text{ km}^{-1}$$

Vynásobíme parametrem $\mu_{\oplus}$:

$$v_a^2 = 398\,600,44 \cdot 0,00000557 \approx 2,22 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

Odmocníme:

$$v_a = \sqrt{2,22} \approx 1,49 \text{ km/s} \approx 5\,360 \text{ km/h}$$

1. Kontrola krasobruslařského efektu ($r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$):

$$r_p \cdot v_p = 6\,871 \times 10,05 \approx 69\,053 \text{ km}^2/\text{s}$$

$$r_a \cdot v_a = 46\,371 \times 1,49 \approx 69\,092 \text{ km}^2/\text{s}$$

Hodnoty se s přesností na zaokrouhlení dokonale shodují!

Fyzikální závěr: V perigeu nad jižní polokoulí prolétá družice zběsilou rychlostí přes 10 km/s. V apogeu nad severním pólem však zpomalí na pouhých 1,49 km/s – pohybuje se téměř **sedmkrát pomaleji!** Díky tomu stráví 10 hodin ze své dvanáctihodinové oběžné doby vysoko na obloze nad Kanadou a severním Ruskem jako pomyslná televizní věž.

Řešený příklad 3.2: Halleyova kometa u Slunce versus na okraji soustavy

Slavná Halleyova kometa obíhá kolem Slunce ($\mu_{\odot} = 132\,712\,440\,000 \text{ km}^3/\text{s}^2$) po extrémně protáhlé dráze s periodou 76 let:

- V perihelu (nejblíže Slunci): $r_p = 0,586 \text{ AU} \approx 87,66 \times 10^6 \text{ km}$ (blíže než Venuše!).
- V afelu (nejdále od Slunce): $r_a = 35,10 \text{ AU} \approx 5\,250,9 \times 10^6 \text{ km}$ (až za drahou Neptunu!).
- Velká poloosa: $a = (r_p + r_a)/2 = (0,586 + 35,10)/2 = 17,843 \text{ AU} \approx 2\,669,3 \times 10^6 \text{ km}$.

Dosadíme do rovnice Vis-Viva:

1. Rychlost v perihelu (u Slunce):

$$v_p = \sqrt{\mu_{\odot} \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} \approx 54,6 \text{ km/s} \approx 196\,500 \text{ km/h}$$

2. Rychlost v afelu (v temnotách za Neptunem):

$$v_a = \sqrt{\mu_{\odot} \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} \approx 0,91 \text{ km/s} \approx 3\,270 \text{ km/h}$$

Poměr rychlostí:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{54,6}{0,91} \approx 60 : 1$$

Halleyova kometa se u Slunce řítí **šedesátkrát rychleji** než na okraji Sluneční soustavy! Proto proletí kolem Země a Slunce během několika málo měsíců, zatímco v mrazivých dálkách za Neptunem tráví celá desetiletí.

☑ SHRNUÍ: CO SI Z TÉTO KAPITOLY ODNĚŠT

- **Zachování momentu hybnosti** ($r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$): Gravitace nepůsobí žádný točivý moment. U planety letí těleso nejrychleji, v dálce nejpomaleji.
- **Záporná energie** ($\mathcal{E} = -\mu/2a$): Všechny uzavřené oběžné dráhy (kružnice a elipsy) mají zápornou mechanickou energii, protože jsou gravitačně vázány.
- **Rovnice Vis-Viva** ($v = \sqrt{\mu(2/r - 1/a)}$): Univerzální vzorec astrodynamiky, který umožňuje spočítat rychlost v kterémkoli bodě libovolné dráhy pouze ze znalosti poloměru r a velké poloosy a .

Kapitola 4: Keplerovy zákony a tajemství kosmických elips

Po více než dva tisíce let věřili největší učenici a filosofové západního světa – od starořeckého myslitele Aristotela přes alexandrijského astronoma Klaudia Ptolemaia až po středověké teology –, že nebeská sféra je říší absolutní dokonalosti. A protože kruh byl považován za nejdokonalější geometrický tvar, panovalo nezvratné dogma: **veškerá nebeská tělesa se musí pohybovat po dokonalých kružnicích stálou, neměnnou rychlostí.**

Když v 16. století polský astronom Mikuláš Koperník způsobil revoluci a sesadil Zemi ze středu vesmíru, v jedné věci zůstal věrný starověku: planety podle něj stále obíhaly po kružnicích. Aby jeho model souhlasil s pozorováním, musel dráhy poskládat z desítek složitých kružnic na kružnicích (epicyklů). Celý systém byl nepřirozený a umělý.

Tuto posvátnou iluzi rozbil teprve jeden muž, pracující v křivolakých uličkách renesanční Prahy na dvoře císaře Rudolfa II. – německý matematik a astronom **Johannes Kepler**.

4.1 Detektivka v renesanční Praze: Boj o 8 úhlových minut

V roce 1600 přicestoval do Prahy sedmadvacetiletý matematik Johannes Kepler. Přijal pozvání dánského šlechtice **Tychona Brahe**, který tehdy působil jako císařský matematik. Tito dva muži byli naprostými protiklady: Tycho byl vznětlivý šlechtic a největší pozorovatel své doby, který bez dalekohledu dokázal pomocí obřích kvadrantů změřit polohy planet s nevídanou přesností. Kepler byl tichý, geniální teoretik s mimořádným matematickým nadáním.

Tycho Brahe Keplerovi přidělil zdánlivě neřešitelný oříšek – pozorování rudé planety **Mars**, jejíž pohyb na obloze vykazoval největší anomálie. Když Tycho na podzim 1601 v Praze náhle zemřel, Kepler získal přístup k celoživotnímu pokladu: desítkám let nejpresnějších měření poloh Marsu.

Kepler strávil **pět let vyčerpávajícími ručními výpočty**, které zaplnily více než 900 listů papíru. Opakovaně se pokoušel napasovat pohyb Marsu na kružnici. Zkoušel posunout střed, měnit rychlosti – a dosáhl téměř dokonalého výsledku. Jeho kruhový model seděl na všechna pozorování... **až na dvě.**

V těchto dvou bodech se předpověď lišila od Tychových měření o pouhých **8 úhlových minut** (čtvrtina průměru měsíčního úplňku). Mnoho astronomů by odchylku ignorovalo, ale Kepler věděl, jak nekompromisně přesný Tycho byl. Napsal:

📌 ZAJÍMAVOST

„Těchto pouhých osm minut samo o sobě ukázalo cestu k úplné reformě celé astronomie.“

Kepler zahodil pět let práce, opustil posvátnou kružnici a vyzkoušel **elipsu**. Všechny dílky skládačky do sebe okamžitě a s absolutní přesností zapadly.

4.2 Tři Keplerovy zákony a jejich matematická formulace

1. Keplerův zákon: Zákon eliptických drah

📌 PLANETY SE POHYBUJÍ PO ELIPSÁCH, V JEJICHŽ JEDNOM SPOLEČNÉM OHNISKU SE NACHÁZÍ SLUNCE.

Elipsa je oválná křivka, která má dvě ohniska (F_1, F_2). Slunce sedí v jednom ohnisku; druhé ohnisko je prázdné. Matematicky vyjadřujeme tvar elipsy v polárních souřadnicích vzorcem:

$$r(\nu) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$$

Podrobný rozbor vzorce elipsy pro začátečníky:

- $r(\nu)$: Vzdálenost planety od Slunce v daném okamžiku.
- a (**velká poloosa**): Polovina nejdelšího rozměru elipsy. Udává celkovou velikost dráhy.
- e (**excentricita neboli výstřednost**): Číslo od 0 do 1, které říká, jak moc je elipsa zploštělá: * $e = 0$: Dokonalá kružnice (obě ohniska splynou do jednoho středu). * $0 < e < 1$: Protáhlá elipsa (čím blíže k 1, tím protáhlejší „doutník“). * $e = 1$: Otevřená parabola.
- ν (**řecké ν – pravá anomálie**): Úhel měřený od nejnižšího bodu dráhy (perihelu).
- **Člen $\cos \nu$** : Kosinus úhlu, který periodicky kolísá od +1 do -1: * **V perihelu (nejblíže Slunci, $\nu = 0^\circ$)**: Kosinus je roven +1 ($\cos 0^\circ = 1$). Jmenovatel je maximální ($1 + e$), a proto je vzdálenost minimální:

$$r_p = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{1 + e} = a(1 - e)$$

* **V afelu (nejdále od Slunce, $\nu = 180^\circ$)**: Kosinus je roven -1 ($\cos 180^\circ = -1$). Jmenovatel je minimální ($1 - e$), a proto je vzdálenost maximální:

$$r_a = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{1 - e} = a(1 + e)$$

Všimněte si, jak je matematika krásná: jednoduchý kosinus způsobuje, že se planeta plynule a hladce přibližuje a vzdaluje od Slunce!

2. Keplerův zákon: Zákon ploch

❶ **PRŮVODIČ SPOJUJÍCÍ PLANETU SE SLUNCEM OPÍŠE ZA STEJNÝ ČASOVÝ INTERVAL VŽDY STEJNOU PLOCHU.**

Plošná rychlost $\frac{dA}{dt}$ je v čase dokonale stálá a přímo souvisí se specifickým momentem hybnosti h :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} = \text{konst.}$$

Proč je to právě polovina momentu hybnosti ($h/2$)? Představte si úzký trojúhelník, který průvodič opíše za malý okamžik dt : základna trojúhelníku je dráha $v_\perp dt$ a výška je poloměr r . Plocha trojúhelníku je

$\frac{1}{2} \cdot \text{základna} \cdot \text{výška} = \frac{1}{2} (v_\perp dt) r = \frac{1}{2} (rv_\perp) dt = \frac{1}{2} h dt$. Vydělením časem dt dostaneme okamžitě $h/2$!

Tento zákon geometricky vysvětluje krasobruslařský efekt: když je planeta blízko Slunci, průvodič je krátký, a aby trojúhelník měl velkou plochu, musí planeta letět velmi rychle. V dále je průvodič dlouhý, takže k opisu stejné plochy stačí pomalý pohyb.

3. Keplerův zákon: Harmonický zákon

❶ **POMĚR DRUHÝCH MOCNIN OBĚŽNÝCH DOB DVOU PLANET SE ROVNÁ POMĚRU TŘETÍCH MOCNIN JEJICH VELKÝCH POLOOS.**

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \implies \frac{T^2}{a^3} = \text{konst.}$$

Newton později tento zákon zpřesnil pomocí gravitačního zákona:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)} \approx \frac{4\pi^2}{\mu}$$

Proč právě druhá mocnina času (T^2) a třetí mocnina vzdálenosti (a^3)?

Začátečníci se často ptají: „Proč je tam tak zvláštní kombinace mocnin – druhá a třetí?“

Pojďme si to odvodit jednoduše z fyziky:

1. **Délka oběžné dráhy** roste přímo úměrně s velkou poloosou a ($s = 2\pi a \implies s \propto a$).
2. **Kruhová oběžná rychlost** klesá s odmocninou ze vzdálenosti ($v = \sqrt{\mu/a} \implies v \propto a^{-1/2}$).
3. **Doba jednoho oběhu** (T) je dráha dělená rychlostí:

$$T = \frac{s}{v} \propto \frac{a}{a^{-1/2}} = a^{1-(-1/2)} = a^{3/2} = \sqrt{a^3}$$

4. Nyní celou rovnici umocníme na druhou:

$$T^2 \propto a^3$$

To je celé tajemství! Druhá mocnina času a třetí mocnina vzdálenosti je přirozeným důsledkem toho, že ve větší vzdálenosti je dráha delší a zároveň se po ní planeta pohybuje pomaleji!

Zjednodušený tvar 3. Keplerova zákona pro naši Sluneční soustavu

Pokud zvolíme praktické astronomické jednotky:

- Doba oběhu T v **pozemských letech** [roky],
- Velká poloosa a v **astronomických jednotkách** [1 AU $\approx$ 149 597 870 km – vzdálenost Země od Slunce],

potom pro naši Zemi platí $T = 1$ rok a $a = 1$ AU. Konstanta $T^2/a^3 = 1^2/1^3 = 1$! Pro kteroukoli planetu, planetku nebo kometu obíhající kolem našeho Slunce platí geniálně prostý vzorec:

$$\begin{aligned} T^2 &= a^3 \\ T &= a^{3/2} = a\sqrt{a} \\ a &= T^{2/3} = \sqrt[3]{T^2} \end{aligned}$$

Tento vzorec umožňuje okamžitě spočítat dobu oběhu jakéhokoli tělesa pouze ze znalosti jeho vzdálenosti, aniž bychom museli znát gravitační konstantu či hmotnost Slunce!

Řešený příklad 4.1: Oběh a vzdálenosti planety Mars

Zadání: Velká poloosa dráhy Marsu je $a = 1,52368$ AU a její excentricita je $e = 0,09340$.

1. Vypočítejte dobu jednoho oběhu Marsu kolem Slunce v pozemských dnech (1 rok = 365,256 dne).
2. Vypočítejte vzdálenost Marsu v perihelu (r_p) a v afelu (r_a) v milionech kilometrů.

Výpočet:

1. Doba oběhu v letech ze 3. Keplerova zákona:

$$T = a^{3/2} = 1,52368^{1,5} = 1,52368 \cdot \sqrt{1,52368} \approx 1,52368 \cdot 1,23437 \approx \mathbf{1,8808 \text{ roku}}$$

Převědeme roky na pozemské dny:

$$T = 1,8808 \times 365,256 \approx \mathbf{686,97 \text{ dne} \approx 687 \text{ dní}}$$

1. Vzdálenost v perihelu (nejblíže Slunci):

$$r_p = a(1 - e) = 1,52368 \cdot (1 - 0,09340) = 1,52368 \cdot 0,90660 \approx \mathbf{1,3814 \text{ AU}}$$

V milionech kilometrů (1 AU $\approx$ 149,6 mil. km):

$$r_p = 1,3814 \times 149,598 \approx \mathbf{206,65 \text{ mil. km}}$$

1. Vzdálenost v afelu (nejdále od Slunce):

$$r_a = a(1 + e) = 1,52368 \cdot (1 + 0,09340) = 1,52368 \cdot 1,09340 \approx \mathbf{1,6660 \text{ AU}}$$

V milionech kilometrů:

$$r_a = 1,6660 \times 149,598 \approx \mathbf{249,23 \text{ mil. km}}$$

Rozdíl mezi nejbližším a nejvzdálenějším bodem dráhy Marsu činí:

$$\Delta r = 249,23 - 206,65 = \mathbf{42,58 \text{ milionu kilometrů!}}$$

Právě tento obrovský rozdíl 42 milionů kilometrů způsobil oněch slavných 8 úhlových minut odchylky, které dovedly Keplera k formulaci moderní astronomie.

Řešený příklad 4.2: Jak dlouho trvá let k Marsu? (Hohmannova přechodová dráha)

Kosmické sondy (jako Curiosity nebo Perseverance) nelétají k Marsu po přímce, ale po přechodové elipse, která se v perihelu dotýká dráhy Země a v afelu dráhy Marsu:

1. Vzdálenost Země: $r_1 = 1,000 \text{ AU}$
2. Vzdálenost Marsu: $r_2 \approx 1,524 \text{ AU}$
3. Velká poloosa přechodové dráhy je průměrem obou hodnot:

$$a_{trans} = \frac{1,000 + 1,524}{2} = \mathbf{1,262 \text{ AU}}$$

1. Doba oběhu po celé této pomyslné elipse by podle 3. Keplerova zákona byla:

$$T_{trans} = a_{trans}^{3/2} = 1,262^{1,5} \approx \mathbf{1,418 \text{ roku}}$$

1. Kosmická loď však letí pouze **přesně polovinu této elipsy** (ze Země k Marsu):

$$t_{let} = \frac{T_{trans}}{2} = \frac{1,418}{2} \approx \mathbf{0,709 \text{ roku}}$$

Převědeme na dny a měsíce:

$$t_{let} = 0,709 \times 365,25 \approx \mathbf{258,9 \text{ dne} \approx 8,5 \text{ měsíce}}$$

Závěr: Délku letu k Marsu spočítal Johannes Kepler svým 3. zákonem celých 350 let předtím, než se do vesmíru vynesla první lidská raketa!

☒ SHRNUÍ: CO SI Z TÉTO KAPITOLY ODNÉST

- **1. Keplerův zákon** ($r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu}$): Oběžné dráhy jsou elipsy s centrálním tělesem v jednom ohnisku. Nejnížší bod je $r_p = a(1 - e)$, nejvyšší bod je $r_a = a(1 + e)$.
- **2. Keplerův zákon** ($\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}$): Plošná rychlost je stálá. Těleso se u planety pohybuje nejrychleji a v dále nejpomaleji.
- **3. Keplerův zákon** ($T^2 = a^3$): Čtverec doby oběhu se rovná třetí mocnině velké poloosy. Cesta k Marsu po přechodové poloelipse trvá přesně 8,5 měsíce.

Kapitola 5: Kde se těleso na dráze nachází? (Čas, úhly a anomálie)

V předchozí kapitole jsme odhalili geometrii kosmických elips. Známe jejich tvar, velikost a víme, kudy dráha prostorem vede. Pro letové ředitele v řídicích střediscích a pro navigační počítače je to však teprve polovina úlohy.

V každodenní kosmické praxi musíme umět odpovědět na klíčovou otázku: „Kde přesně na této eliptické dráze se kosmická loď bude nacházet v konkrétní okamžik *t* (například zítra v 15:24:18)?“

Na kružnici by to bylo snadné – těleso letí stále stejnou rychlostí. Na eliptické dráze se však rychlost neustále mění: v perigeu loď letí zřejmě rychle, v apogeju se líně vleče. Jednoduchý vzorec ze základní školy $s = v \cdot t$ zde nelze použít.

Astronomové proto museli vytvořit matematický most mezi plynoucím časem a polohou v prostoru: soustavu tří úhlů, kterým říkáme **orbitální anomálie**, propojených slavnou **Keplerovou rovnicí**.

5.1 Tři anomálie: Most mezi plynoucím časem a polohou v prostoru

Slovo *anomálie* pochází z řeckého *anōmalos* (nepravidelný). V nebeské mechanice toto slovo překvapivě neoznačuje žádnou chybu, nýbrž **úhel měřený od nejnižšího bodu dráhy (pericentra)**.

Abychom dokázali určit polohu tělesa v čase, definujeme tři různé úhly:

''' Excentrická anomálie (E) na opsané kružnici | v ČAS (t) -----> Střední anomálie (M) -----> Pravá anomálie (ν) [hodinky] [rovnoměrný úhel] [skutečný úhel v 3D] '''

1. Pravá anomálie (ν – řecké ν , v literatuře též θ)

Je to **skutečný fyzický úhel v prostoru** mezi bodem pericentra (nejnižším bodem dráhy) a okamžitou polohou tělesa, měřený ze středu centrálního tělesa (z ohniska elipsy).

- V pericentru (nejblíže): $\nu = 0^\circ$.
- V apocentru (nejdále): $\nu = 180^\circ$.
- Toto je reálný směr, kam se musíme podívat dalekohledem nebo kam míří směrové antény!

2. Střední anomálie (M)

Je to **plynoucí čas přímo převedený na úhel**. Představme si fiktivní „stínovou družici“, která by obíhala po dokonalé kružnici se stejnou dobou oběhu T jako naše skutečná družice na elipse. Její úhlová rychlost (tzv. **střední pohyb n**) je naprosto stálá:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

Střední anomálie M v libovolný čas t od průchodu pericentrem (t_p) roste zcela rovnoměrně:

$$M(t) = n \cdot (t - t_p) = \frac{2\pi}{T} \cdot (t - t_p)$$

- Když uplyne polovina doby oběhu ($T/2$), střední anomálie je přesně $M = 180^\circ = \pi$ rad.
- Když uplyne čtvrtina doby oběhu ($T/4$), M je přesně $90^\circ = \pi/2$ rad.

3. Excentrická anomálie (E)

Je to pomocný geometrický úhel definovaný na kružnici opsané kolem celé elipsy se středem v geometrickém středu elipsy C . Umožňuje elegantně vyjádřit vzdálenost tělesa od ohniska bez použití složitých zlomků:

$$r = a(1 - e \cos E)$$

5.2 Keplerova rovnice: Tajemství transcendentního vztahu

V roce 1609 odvodil Johannes Kepler vztah, který dává do přímé souvislosti plynoucí čas (střední anomálii M) s geometrií elipsy (excentrickou anomálií E):

$$M = E - e \cdot \sin E$$

Podrobný rozbor Keplerovy rovnice pro začátečníky: Co které písmeno a znaménko znamená?

- **Písmeno M (na levé straně):** Střední anomálie v **radiánech** [rad]. Je to uplynulý čas od perigea vynásobený středním pohybem.
- **Písmeno E (vpravo první):** Hledaná excentrická anomálie v **radiánech** [rad].
- **Znaménko minus ($-$) a člen $e \cdot \sin E$:** Tento člen je **opravou na nerovnoměrnost pohybu**: * Na kruhové dráze ($e = 0$) je člen $e \sin E = 0$ a platí jednoduše $M = E$. Čas a poloha plynou ruku v ruce. * Na protáhlé elipse ($e > 0$) v první polovině dráhy (při letu z perigea do apogea) se družice vzdaluje a zpomaluje. Skutečná geometrická poloha E proto „předbíhá“ rovnoměrný čas M ($E > M$). Abychom z většího úhlu E dostali menší čas M , musíme kladný člen $e \sin E$ **odečíst!**
- **Proč MUSÍ být úhly v radiánech a ne ve stupních?** Toto je nejčastější past pro studenty. Úhel v radiánech je bezrozměrné číslo (poměr délky oblouku k poloměru: $180^\circ = \pi \approx 3,14159$ rad, $1 \text{ rad} \approx 57,2958^\circ$). Funkce sinus dává rovněž čisté bezrozměrné číslo. Pokud bychom dosadili E ve stupních, sčítali bychom stupně s bezrozměrnými čísly (např. $60^\circ - 0,2 \cdot 0,866$), což je matematický nesmysl!

V čem spočívá matematická past?

- Pokud znáte polohu na elipse E , spočítat čas M je triviální dosazení do vzorce.
- V reálné kosmické navigaci je tomu však **přesně naopak**: vy znáte čas na hodinkách t (a tedy znáte M) a **chcete vypočítat polohu E !**
- Jenže neznámá E vystupuje v rovnici dvakrát: jednou volně jako lineární proměnná a podruhé „uvězněná“ uvnitř goniometrické funkce $\sin E$.
- Takové rovnici říkáme **transcendentní**. Francouzský matematik Joseph Liouville dokázal, že ji **nelze vyřešit žádnou algebraickou úpravou** – neexistuje žádný vzorec typu $E = \dots$, který by E vyjádřil pomocí běžných funkcí!

5.3 Numerické řešení: Newtonova–Raphsonova metoda tečen

Když rovnici nelze rozlousknout vzorcem, inženýři a počítače ji řeší pomocí **postupného zpřesňování odhadu (iterací)**.

Nejvýkonnější metodou je **Newtonova–Raphsonova metoda tečen**: Hledáme kořen funkce:

$$f(E) = E - e \cdot \sin E - M = 0$$

Její derivace podle proměnné E je:

$$f'(E) = 1 - e \cdot \cos E$$

Z předchozího odhadu E_k spočítáme nový, mnohem přesnější odhad E_{k+1} podle vzorce:

$$E_{k+1} = E_k - \frac{f(E_k)}{f'(E_k)} = E_k - \frac{E_k - e \sin E_k - M}{1 - e \cos E_k}$$

Jako počáteční nultý odhad (E_0) zvolíme přímo hodnotu střední anomálie:

$$E_0 = M$$

Tento iterační proces konverguje neuvěřitelně rychle: s každým dalším krokem se počet správných desetinných míst zdvojnásobí! Obvykle stačí **pouhé 3 až 4 kroky** a výsledek je přesný na dvanáct cifer.

5.4 Převod na skutečný úhel (pravou anomálii ν)

Jakmile numericky nalezneme hodnotu E , skutečný fyzický úhel v prostoru ν spočítáme pomocí jednoduchého Gaussova vztahu:

$$\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

A přesnou okamžitou vzdálenost od středu planety určíme ze vzorce:

$$r = a(1 - e \cos E)$$

Řešený příklad 5.1: Krok za krokem výpočet polohy družice v čase

Zadání: Kosmická sonda obíhá po eliptické dráze s velkou poloosou $a = 10\,000$ km a excentricitou $e = 0,20$ kolem Země. V určitém čase uplynulém od perigea má střední anomálii $M = 1,000000$ rad (což odpovídá úhlu $57,296^\circ$).

1. Newtonovou metodou vypočítejte excentrickou anomálii E krok za krokem.
2. Vypočítejte skutečnou pravou anomálii ν a okamžitou výšku nad zemským povrchem ($R_\oplus = 6\,371$ km).

Výpočet krok za krokem: Krok 0 (Počáteční odhad):

$$E_0 = M = 1,000000 \text{ rad}$$

Krok 1 (První iterace):

$$\sin(E_0) = \sin(1,000000) \approx 0,841471$$

$$\cos(E_0) = \cos(1,000000) \approx 0,540302$$

$$f(E_0) = 1,000000 - 0,2 \cdot 0,841471 - 1,000000 = -0,168294$$

$$f'(E_0) = 1 - 0,2 \cdot 0,540302 = 1 - 0,108060 = 0,891940$$

Nový zpřesněný odhad E_1 :

$$E_1 = E_0 - \frac{f(E_0)}{f'(E_0)} = 1,000000 - \frac{-0,168294}{0,891940} = 1,000000 + 0,188683 = \mathbf{1,188683 \text{ rad}}$$

Krok 2 (Druhá iterace):

$$\sin(E_1) = \sin(1,188683) \approx 0,927941$$

$$\cos(E_1) = \cos(1,188683) \approx 0,372726$$

$$f(E_1) = 1,188683 - 0,2 \cdot 0,927941 - 1,000000 = +0,003095$$

$$f'(E_1) = 1 - 0,2 \cdot 0,372726 = 0,925455$$

Nový odhad E_2 :

$$E_2 = 1,188683 - \frac{0,003095}{0,925455} = 1,188683 - 0,003344 = \mathbf{1,185339 \text{ rad}}$$

Krok 3 (Třetí iterace): Opakováním postupu získáme:

$$E_3 = \mathbf{1,185338 \text{ rad}}$$

Hodnoty E_2 a E_3 se shodují na 5 platných desetinných míst! Hledaná hodnota je:

$$E \approx 1,18534 \text{ rad} \approx \mathbf{67,915^\circ}$$

Výpočet skutečné polohy (ν) a nadmořské výšky:

1. Skutečný úhel ν :

$$\frac{E}{2} = \frac{1,18534}{2} = 0,59267 \text{ rad} \implies \tan(0,59267) \approx 0,67319$$

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{1+0,2}{1-0,2}} = \sqrt{1,5} \approx 1,22474$$

$$\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = 1,22474 \cdot 0,67319 \approx 0,82448$$

$$\frac{\nu}{2} = \arctan(0,82448) \approx 0,68953 \text{ rad} \implies \nu = 2 \cdot 0,68953 \approx \mathbf{1,37906 \text{ rad} \approx 79,015^\circ}$$

1. Okamžitá vzdálenost a výška:

$$r = a(1 - e \cos E) = 10\,000 \cdot (1 - 0,2 \cdot \cos(67,915^\circ)) = 10\,000 \cdot (1 - 0,2 \cdot 0,37596) = \mathbf{9\,248 \text{ km}}$$

$$h = r - R_\oplus = 9\,248 - 6\,371 = \mathbf{2\,877 \text{ km nad zemí}}$$

Fyzikální shrnutí pro začátečníky: Zatímco fiktivní rovnoměrný čas (střední anomálie M) naměřil úhel pouhých $57,3^\circ$, skutečná družice se na elipse pohybuje rychleji a v prostoru se posunula již o celých $79,0^\circ$ a vystoupala do výšky $2\,877 \text{ km}$ nad zemský povrch!

☒ SHRNUTÍ: CO SI Z TÉTO KAPITOLY ODNÉST

- **Střední anomálie** ($M = n(t - t_p)$): Rovnoměrně plynoucí čas vyjádřený jako úhel.
- **Keplerova rovnice** ($M = E - e \sin E$): Základní most mezi časem a prostorem. Je transcendentní, vyžaduje numerické řešení.
- **Newtonova metoda**: Počítá postupnými aproximacemi ($E_{k+1} = E_k - \frac{f(E_k)}{f'(E_k)}$) a během 3 až 4 kroků určí polohu s extrémní přesností.
- **Skutečná poloha** (ν a r): Z excentrické anomálie E snadno spočítáme skutečný úhel ν i vzdálenost $r = a(1 - e \cos E)$.

Kapitola 6: Šest parametrů kosmického tance (Keplerovy dráhové elementy)

Když dispečeři na mezinárodním letišti sledují let dopravního letadla, zajímají je v podstatě pouze čtyři základní údaje: zeměpisná šířka, zeměpisná délka, barometrická výška a okamžitý kurz. Letadlo se totiž pohybuje uvnitř tenké slupky zemské atmosféry, vázáno na zemský povrch.

Jak ale předat jednoznačnou, přesnou a časově stálou „kosmickou adresu“ družice, která se řítí volným prostorem rychlostí přes 27 000 km/h, každou sekundu mění všechny tři prostorové souřadnice i vektor rychlosti a celou planetu obkrouží za pouhých 90 minut?

V trojrozměrném gravitačním poli má pohyb tělesa **šest stupňů volnosti**. Okamžitý stav tělesa lze sice popsat třemi složkami polohy $\vec{r} = (x, y, z)$ a třemi složkami rychlosti $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, avšak tato čísla se v čase neustále překotně mění. Astronomové a kosmičtí inženýři proto vytvořili mnohem elegantnější reprezentaci: **šest klasických Keplerových dráhových elementů** (orbitálních parametrů $\{a, e, i, \Omega, \omega, \nu\}$).

V ideálním Keplerově gravitačním poli dvou těles je pět z těchto šesti parametrů **naprosto konstantních** a charakterizuje neměnnou geometrii dráhy v prostoru. Pouze jediný parametr – pravá anomálie ν – se plynule mění s časem a ukazuje, kde na této stálé prostorové trajektorii se těleso právě nachází.

6.1 Fyzikální podstata a geometrie šesti Keplerových elementů

Keplerovy elementy představují hierarchickou stavebnici, která postupně definuje tvar dráhy, její prostorové natočení a okamžitou polohu tělesa:

1. **Geometrie v rovině dráhy (velikost a tvar):** Velká poloosa (a) a numerická excentricita (e).
2. **Prostorová orientace roviny dráhy ve 3D:** Sklon dráhy (i) a délka vzestupného uzlu (Ω).
3. **Orientace dráhy uvnitř její roviny:** Argument pericentra (ω).
4. **Okamžitá poloha tělesa na dráze:** Pravá anomálie (ν).

`` Z (Severní nebeský pól) ^ | h (Normála roviny dráhy) | ^ | / | (Sklon dráhy) | / | ----- Rovina rovníku (XY) / \ / \ Omega (RAAN) / \ o----->----- Vzestupný uzel (n) / \ / \ omega (Argument pericentra) Jarní bod V \ (Upsilon) \* Pericentrum (P) \ \ nu (Pravá anomálie) \ @ Těleso (r) ``

1. Velká poloosa (a – Semi-Major Axis)

Udává charakteristický **rozměr oběžné dráhy** a přímo určuje celkovou specifickou mechanickou energii soustavy $\mathcal{E}$. Pro eliptickou dráhu představuje polovinu délky hlavní osy elipsy:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}$$

kde r_p je vzdálenost pericentra a r_a vzdálenost apocentra od ohniska.

Podle rovnice Vis-Viva závisí specifická mechanická energie $\mathcal{E}$ výhradně na velké poloose a :

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

Velká poloosa rovněž přímo diktuje oběžnou dobu tělesa podle 3. Keplerova zákona:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

2. Numerická excentricita (e – Eccentricity)

Bezrozměrná veličina charakterizující **geometrický tvar kuželosečky**, tedy míru jejího zploštění od dokonalého kruhu:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{c}{a}$$

kde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ je lineární excentricita (vzdálenost ohniska od středu elipsy). Podle hodnoty e klasifikujeme typy trajektorií:

- $e = 0$: Dokonalá kružnice (středová dráha).
- $0 < e < 1$: Uzavřená eliptická dráha.
- $e = 1$: Parabolická úniková trajektorie ($\mathcal{E} = 0$).
- $e > 1$: Otevřená hyperbolická trajektorie ($\mathcal{E} > 0$).

3. Sklon dráhy (i – Inclination)

Úhel mezi **vektorem specifického momentu hybnosti** $\vec{h}$ (který je kolmý k rovině oběžné dráhy) a zemskou rotační osou $\vec{K} = (0, 0, 1)^T$. Sklon dráhy udává náklon roviny oběhu vůči základní referenční rovině (u Země vůči světovému rovníku, u meziplanetárních letů vůči rovině ekliptiky):

$$i = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right), \quad i \in [0^\circ, 180^\circ]$$

- $i = 0^\circ$: Rovňková prográdní dráha (let přesně nad rovníkem ve směru rotace planety od západu na východ).
- $0^\circ < i < 90^\circ$: Přímá (prográdní) oběžná dráha.
- $i = 90^\circ$: Polární dráha (satelit přelétá zemský severní i jižní pól).
- $90^\circ < i < 180^\circ$: Zpětná (retrográdní) dráha (let proti směru rotace planety).
- $i = 180^\circ$: Rovňková retrográdní dráha.

4. Délka vzestupného uzlu (Ω – Right Ascension of the Ascending Node, RAAN)

Průsečnice roviny oběžné dráhy s rovinou rovníku se nazývá **uzlová přímka**. Těleso protíná rovník ve dvou bodech:

- **Vzestupný uzel (Ascending Node)**: Bod, kde těleso přechází z jižní polokoule na severní (z roste z záporných hodnot do kladných).
- **Sestupný uzel (Descending Node)**: Bod, kde těleso přechází ze severní polokoule na jižní.

Úhel Ω se měří v rovině rovníku od **jarního bodu** (Υ , směru k jarní rovnodennosti) proti směru hodinových ručiček k vzestupnému uzlu. Úhel nabývá hodnot $\Omega \in [0^\circ, 360^\circ)$ a fixuje prostorové natočení uzlové přímky v inerciálním prostoru.

5. Argument pericentra (ω – Argument of Perigee / Periapsis)

Úhel měřený **přímo v rovině oběžné dráhy** od vzestupného uzlu k pericentru (bodu nejtěsnějšího přiblížení k centrálnímu tělesu) ve směru pohybu tělesa:

$$\omega \in [0^\circ, 360^\circ)$$

Argument pericentra určuje, kde na orbitální smyčce leží nejnižší bod – zda nad jižní polokoulí, nad rovníkem ($\omega = 0^\circ$ nebo 180°), či nad severním pólem ($\omega = 90^\circ$).

6. Pravá anomálie (ν – True Anomaly)

Geometrický úhel měřený v rovině dráhy od pericentra k okamžité poloze tělesa ve směru letu:

$$\nu \in [0^\circ, 360^\circ)$$

V pericentru platí $\nu = 0^\circ$, v apocentru $\nu = 180^\circ$. Na rozdíl od předchozích pěti elementů je pravá anomálie dynamickou proměnnou, která se s časem neustále mění.

Symbol	Český název	Anglický termín	Jednotka	Definiční obor	Fyzikální a geometrický význam
a	Velká poloosa	Semi-major axis	km / m	$a > 0$ (elipsa)	Určuje rozměr dráhy, specifickou energii a oběžnou periodu
e	Numerická excentricita	Eccentricity	bezrozměrné	$0 \leq e < 1$	Určuje geometrický tvar kuželosečky (eliptičnost)

Symbol	Český název	Anglický termín	Jednotka	Definiční obor	Fyzikální a geometrický význam
i	Sklon dráhy	Inclination	$\text{deg}(^{\circ})/\text{rad}$	$0^{\circ} \leq i \leq 180^{\circ}$	Úhel sklonu roviny dráhy k rovině rovníku
Ω	Délka vzestupného uzlu	RAAN	$\text{deg}(^{\circ})/\text{rad}$	$0^{\circ} \leq \Omega < 360^{\circ}$	Azimut uzlové přímky v rovině rovníku od jarního bodu
ω	Argument pericentra	Argument of periapsis	$\text{deg}(^{\circ})/\text{rad}$	$0^{\circ} \leq \omega < 360^{\circ}$	Úhlová vzdálenost pericentra od vzestupného uzlu
ν	Pravá anomálie	True anomaly	$\text{deg}(^{\circ})/\text{rad}$	$0^{\circ} \leq \nu < 360^{\circ}$	Okamžitá úhlová poloha tělesa měřená od pericentra

6.2 Perifokální souřadnicová soustava (PQW)

Pro analytické výpočty trajektorií je mimořádně výhodné definovat lokální pravoúhlou soustavu spojenou přímo s rovinou oběžné dráhy. Tato soustava se v astrodynamice označuje jako **perifokální souřadnicová soustava** a její báze se značí vektory $\{\vec{P}, \vec{Q}, \vec{W}\}$:

- **Osa $\vec{P}$:** Jednotkový vektor ležící v rovině dráhy a směřující z ohniska (středu planety) přímo do pericentra.
- **Osa $\vec{Q}$:** Jednotkový vektor ležící v rovině dráhy, kolmý na $\vec{P}$, otočený o 90° ve směru pohybu tělesa (odpovídá směru pravé anomálie $\nu = 90^{\circ}$).
- **Osa $\vec{W}$:** Jednotkový vektor kolmý k rovině dráhy, orientovaný ve směru specifického momentu hybnosti $\vec{h}$, definovaný vektorovým součinem $\vec{W} = \vec{P} \times \vec{Q} = \frac{\vec{h}}{h}$.

Polohový vektor v perifokální soustavě

V rovině dráhy je poloha tělesa popsána polárními souřadnicemi (r, ν) . V kartézské bázi PQW je polohový vektor triviální, protože třetí složka je z definice nulová ($r_W = 0$):

$$\vec{r}_{PQW} = \begin{bmatrix} r \cos \nu \\ r \sin \nu \\ 0 \end{bmatrix}$$

kde okamžitá vzdálenost r je dána polární rovnicí kuželosečky:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$$

kde $p = a(1 - e^2)$ je parametr kuželosečky (semilatus rectum).

Matematické odvození rychlostního vektoru v soustavě PQW

Rychlostní vektor $\vec{v}_{PQW}$ získáme časovou derivací polohového vektoru $\vec{r}_{PQW}$:

$$\vec{v}_{PQW} = \frac{d\vec{r}_{PQW}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{r} \cos \nu - r \dot{\nu} \sin \nu \\ \dot{r} \sin \nu + r \dot{\nu} \cos \nu \\ 0 \end{bmatrix}$$

Derivujeme vzdálenost r podle času:

$$\dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{1 + e \cos \nu} \right) = \frac{p \cdot e \sin \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} \dot{\nu} = \frac{r^2}{p} e \sin \nu \cdot \dot{\nu}$$

Ze zákona zachování specifického momentu hybnosti víme, že plošná rychlost je konstantní:

$$h = r^2 \dot{\nu} = \sqrt{\mu p} \implies \dot{\nu} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}$$

Dosadíme $\dot{\nu}$ do výrazu pro $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \frac{r^2}{p} e \sin \nu \left(\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \right) = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu$$

Dále vyjádříme transversální složku rychlosti $r\dot{\nu}$:

$$r\dot{\nu} = r \left(\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \right) = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} = \frac{\sqrt{\mu p}}{\frac{p}{1+e \cos \nu}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \nu)$$

Nyní dosadíme obě složky $\dot{r}$ a $r\dot{\nu}$ do jednotlivých kartézských složek rychlosti v_P a v_Q :

$$v_P = \dot{r} \cos \nu - r\dot{\nu} \sin \nu = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu \cos \nu - \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \nu) \sin \nu = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \nu$$

$$v_Q = \dot{r} \sin \nu + r\dot{\nu} \cos \nu = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin^2 \nu + \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \nu) \cos \nu = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (e \sin^2 \nu + \cos \nu + e \cos^2 \nu)$$

Jelikož $\sin^2 \nu + \cos^2 \nu = 1$, člen v závorce se zjednoduší na $(e + \cos \nu)$. Výsledný přesný analytický tvar rychlostního vektoru v perifokální soustavě je tedy:

$$\vec{v}_{PQW} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \nu \\ \sqrt{\frac{\mu}{p}} (e + \cos \nu) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tento elegantní vzorec ukazuje, že v perifokální soustavě lze stavový vektor $[\vec{r}_{PQW}, \vec{v}_{PQW}]$ vyčíslit přímočaře bez jakýchkoli numerických aproximací.

6.3 3D Eulerovy rotační matice do ekvatoriální soustavy ECI

Perifokální soustava PQW je lokální soustavou konkrétní dráhy. Abychom znali polohu družice vzhledem k Zemi a jejím pozemním stanicím, musíme stavový vektor transformovat do geocentrické rovníkové inerciální soustavy **ECI (Earth-Centered Inertial)** s ortonormální bází $\{\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}$:

- Osa $\vec{I}$ míří k jarnímu bodu Υ .
- Osa $\vec{K}$ míří k severnímu nebeskému pólu (podél osy rotace Země).
- Osa $\vec{J} = \vec{K} \times \vec{I}$ leží v rovině rovníku a doplňuje pravotočivou soustavu.

Transformace z perifokální báze do báze ECI představuje sled tří klasických Eulerových rotací v opačném směru:

1. Rotace kolem osy $Z(W)$ o úhel $-\omega$ (návrat z pericentra do uzlové přímky).
2. Rotace kolem osy X (přímky uzlů) o úhel $-i$ (sklopení z roviny dráhy do roviny rovníku).
3. Rotace kolem osy $Z(K)$ o úhel $-\Omega$ (otočení z uzlové přímky k jarnímu bodu).

Celková transformační matice $\mathbf{R}_{ECI \leftarrow PQW}$ je dána součinem elementárních rotačních matic:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(-\Omega) \cdot \mathbf{R}_x(-i) \cdot \mathbf{R}_z(-\omega)$$

Kde jednotlivé elementární matice jsou:

$$\mathbf{R}_z(-\Omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_x(-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_z(-\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Roznásobením získáme výslednou matici směrových kosinů $\mathbf{R}$, jejíž sloupce tvoří přímo jednotkové vektory $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{W}$ vyjádřené v souřadnicích ECI:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} P_x & Q_x & W_x \\ P_y & Q_y & W_y \\ P_z & Q_z & W_z \end{bmatrix}$$

Jednotlivé složky matice $\mathbf{R}$ jsou:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i \\ R_{12} &= -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i \\ R_{13} &= \sin \Omega \sin i \\ R_{21} &= \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i \\ R_{22} &= -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i \\ R_{23} &= -\cos \Omega \sin i \\ R_{31} &= \sin \omega \sin i \\ R_{32} &= \cos \omega \sin i \\ R_{33} &= \cos i \end{aligned}$$

Transformace polohového a rychlostního vektoru do soustavy ECI má pak tvar prostého maticového násobení:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{ECI} &= \mathbf{R} \cdot \vec{r}_{PQW} \\ \vec{v}_{ECI} &= \mathbf{R} \cdot \vec{v}_{PQW} \end{aligned}$$

Jelikož matice $\mathbf{R}$ je ortogonální ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$), zpětná transformace z ECI do PQW se provede pouhým vynásobením transponovanou maticí: $\vec{r}_{PQW} = \mathbf{R}^T \vec{r}_{ECI}$.

SINGULARITY KLASICKÝCH ELEMENTŮ A EKVINOKCIÁLNÍ PARAMETRY

Klasické Keplerovy elementy trpí dvěma matematickými singularitami při dělení nulou: 1. **Kruhová dráha** ($e = 0$): Pericentrum není definováno, argument pericentra ω a pravá anomálie ν ztrácejí smysl. Zavádí se argument šířky $u = \omega + \nu$. 2. **Rovňová dráha** ($i = 0^\circ$): Rovina dráhy splývá s rovinou rovníku, uzlová přímka $\vec{n} = \vec{0}$ a úhel Ω není definován. Zavádí se délka pericentra $\varpi = \Omega + \omega$ a pravá délka $\lambda = \Omega + \omega + \nu$. Pro univerzální numerické integrátory bez singularit se proto v profesionální astrodynamice používají *ekvinokciální orbitální elementy* $(a, h_k, h_h, p_k, q_k, \lambda)$.

6.4 Zpětný převod ze stavového vektoru na Keplerovy elementy

Při reálném sledování družic radary nebo palubním přijímačem GNSS získáváme okamžitý stavový vektor $\vec{r} = [x, y, z]^T$ a $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ v inerciálním systému ECI. Zpětný převod na Keplerovy elementy je deterministický algoritmus založený na vektorovém kalkulu:

Krok 1: Velikost polohy a rychlosti

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Krok 2: Specifický moment hybnosti $\vec{h}$

Vektor momentu hybnosti je kolmý k rovině dráhy:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} yv_z - zv_y \\ zv_x - xv_z \\ xv_y - yv_x \end{bmatrix}, \quad h = |\vec{h}| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}$$

Krok 3: Vektor uzlové přímky $\vec{n}$

Uzlová přímka představuje průnik roviny dráhy s rovinou rovníku (XY). Je kolmá k ose $\vec{K} = [0, 0, 1]^T$ i k momentu hybnosti $\vec{h}$:

$$\vec{n} = \vec{K} \times \vec{h} = \begin{bmatrix} -h_y \\ h_x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad n = |\vec{n}| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$$

Krok 4: Vektor excentricity $\vec{e}$ (Laplaceův–Rungeův–Lenzův vektor)

Vektor $\vec{e}$ leží v rovině dráhy a směřuje přímo do pericentra. Jeho velikost je rovna numerické excentricitě e :

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu} \left[\left(v^2 - \frac{\mu}{r} \right) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v} \right], \quad e = |\vec{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}$$

Krok 5: Specifická mechanická energie $\mathcal{E}$ a velká poloosa a

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \implies a = -\frac{\mu}{2\mathcal{E}} = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}}$$

Krok 6: Sklon dráhy i

$$i = \arccos \left(\frac{h_z}{h} \right)$$

Krok 7: Délka vzestupného uzlu Ω

$$\cos \Omega = \frac{n_x}{n} = \frac{-h_y}{n}$$

Pokud $n_y < 0$ (tj. $h_x < 0$), uzel leží ve III. nebo IV. kvadrantu:

$$\Omega = \begin{cases} \arccos \left(\frac{n_x}{n} \right) & \text{pro } n_y \geq 0 \\ 360^\circ - \arccos \left(\frac{n_x}{n} \right) & \text{pro } n_y < 0 \end{cases}$$

Krok 8: Argument pericentra ω

$$\cos \omega = \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{n \cdot e}$$

Pokud složka vektoru excentricity $e_z < 0$, pericentrum leží pod rovinou rovníku:

$$\omega = \begin{cases} \arccos \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{n \cdot e} \right) & \text{pro } e_z \geq 0 \\ 360^\circ - \arccos \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{n \cdot e} \right) & \text{pro } e_z < 0 \end{cases}$$

Krok 9: Pravá anomálie ν

$$\cos \nu = \frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{e \cdot r}$$

Pokud je radiální rychlost záporná ($\vec{r} \cdot \vec{v} < 0$), těleso se přibližuje k pericentru:

$$\nu = \begin{cases} \arccos \left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{e \cdot r} \right) & \text{pro } \vec{r} \cdot \vec{v} \geq 0 \\ 360^\circ - \arccos \left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{e \cdot r} \right) & \text{pro } \vec{r} \cdot \vec{v} < 0 \end{cases}$$

6.5 Řešené výpočetní příklady

Řešený příklad 6.1: Kompletní rekonstrukce všech 6 elementů ze stavového vektoru

Zadání: Kosmická loď má v geocentrických inerciálních souřadnicích (ECI) okamžitý stavový vektor:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6\,600 \\ 3\,800 \end{bmatrix} \text{ km}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -7\,200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

Gravitační parametr Země uvažujte $\mu_{\oplus} = 398\,600,44 \text{ km}^3/\text{s}^2$. Vypočítejte krok za krokem všech 6 Keplerových elementů $\{a, e, i, \Omega, \omega, \nu\}$ a určete charakter dráhy. **Postup výpočtu: 1. Velikost polohového vektoru r :**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0^2 + 6\,600^2 + 3\,800^2} = \sqrt{0 + 43\,560\,000 + 14\,440\,000} = \sqrt{58\,000\,000} \approx 7\,615,773 \text{ km}$$

2. Velikost vektoru rychlosti v :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(-7\,200)^2 + 0^2 + 0^2} = 7\,200 \text{ km/s}$$

3. Vektor specifického momentu hybnosti $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$:

$$h_x = yv_z - zv_y = 6\,600 \cdot 0 - 3\,800 \cdot 0 = 0 \text{ km}^2/\text{s}$$

$$h_y = zv_x - xv_z = 3\,800 \cdot (-7\,200) - 0 \cdot 0 = -27\,360 \text{ km}^2/\text{s}$$

$$h_z = xv_y - yv_x = 0 \cdot 0 - 6\,600 \cdot (-7\,200) = +47\,520 \text{ km}^2/\text{s}$$

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ -27\,360 \\ 47\,520 \end{bmatrix} \text{ km}^2/\text{s}$$

Velikost momentu hybnosti:

$$h = \sqrt{0^2 + (-27\,360)^2 + 47\,520^2} = \sqrt{748\,569\,600 + 2\,258\,150\,400} = \sqrt{3\,006\,720\,000} \approx 54\,833,566 \text{ km}^2/\text{s}$$

4. Vektor uzlové přímky $\vec{n} = \vec{K} \times \vec{h}$:

$$n_x = -h_y = -(-27\,360) = +27\,360 \text{ km}^2/\text{s}$$

$$n_y = h_x = 0 \text{ km}^2/\text{s}$$

$$n_z = 0 \text{ km}^2/\text{s}$$

$$n = |\vec{n}| = \sqrt{27\,360^2 + 0^2} = 27\,360 \text{ km}^2/\text{s}$$

5. Sklon dráhy i :

$$\cos i = \frac{h_z}{h} = \frac{47\,520}{54\,833,566} \approx 0,866622 \implies i = \arccos(0,866622) \approx 29,9315^\circ \approx 29^\circ 55' 53''$$

6. Délka vzestupného uzlu Ω :

$$\cos \Omega = \frac{n_x}{n} = \frac{27\,360}{27\,360} = 1,000000 \implies \Omega = 0,0000^\circ$$

Protože $n_y = 0 \geq 0$, uzel leží přímo ve směru jarního bodu Υ . **7. Specifická energie $\mathcal{E}$ a velká poloosa a :**

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r} = \frac{7\,200^2}{2} - \frac{398\,600,44}{7\,615,773} = 25,92000 - 52,33878 = -26,41878 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

Protože $\mathcal{E} < 0$, dráha je uzavřená elipsa:

$$a = -\frac{\mu_{\oplus}}{2\mathcal{E}} = -\frac{398\,600,44}{2 \cdot (-26,41878)} = \frac{398\,600,44}{52,83756} \approx 7\,543,884 \text{ km}$$

8. Vektor excentricity $\vec{e}$: Všimněme si, že skalární součin $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \cdot (-7,2) + 6\,600 \cdot 0 + 3\,800 \cdot 0 = 0$. Polohový vektor je kolmý na rychlost, což znamená, že těleso se nachází přesně v apsidální přímce (v pericentru nebo apocentru).

$$v^2 - \frac{\mu_{\oplus}}{r} = 51,84000 - 52,33878 = -0,49878 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu_{\oplus}} \left[\left(v^2 - \frac{\mu_{\oplus}}{r} \right) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v} \right] = \frac{-0,49878}{398\,600,44} \begin{bmatrix} 0 \\ 6\,600 \\ 3\,800 \end{bmatrix} \approx -1,25133 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 \\ 6\,600 \\ 3\,800 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -0,008259 \\ -0,004755 \end{bmatrix}$$

Velikost excentricity:

$$e = \sqrt{0^2 + (-0,008259)^2 + (-0,004755)^2} \approx 0,009530$$

Dráha je tedy téměř kruhová elipsa s malou excentricitou $e \approx 0,00953$. **9. Argument pericentra ω :** Vektor $\vec{n} = [27\,360, 0, 0]^T$ a vektor $\vec{e} = [0, -0,008259, -0,004755]^T$. Skalární součin: $\vec{n} \cdot \vec{e} = 27\,360 \cdot 0 + 0 + 0 = 0$.

$$\cos \omega = \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{n \cdot e} = 0 \implies \omega_0 = 90^\circ$$

Protože složka $e_z = -0,004755 < 0$, aplikujeme kvadrantové pravidlo:

$$\omega = 360^\circ - 90^\circ = 270,0000^\circ$$

10. Pravá anomálie ν :

$$\cos \nu = \frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{e \cdot r} = \frac{0 \cdot 0 + (-0,008259) \cdot 6\,600 + (-0,004755) \cdot 3\,800}{0,009530 \cdot 7\,615,773} = \frac{-54,5094 - 18,0690}{72,5783} = \frac{-72,5784}{72,5783} = -1,00000$$

$$\nu = \arccos(-1,00000) = 180,0000^\circ$$

Element Vypočtená hodnota

Fyzikální interpretace

a	7 543,88 km	Velká poloosa (střední výška $h_{stf} = a - R_{\oplus} \approx 1\,173 \text{ km}$)
e	0,00953	Téměř kruhová eliptická dráha
i	29,93°	Prográdní dráha se sklonem cca 30° k rovníku
Ω	0,00°	Vzestupný uzel leží přímo v jarním bodě
ω	270,00°	Pericentrum se nachází v nejjižnějším bodě dráhy
ν	180,00°	Družice se právě nachází v apocentru své dráhy ($r = r_a$)

Řešený příklad 6.2: Výpočet souřadnic stanice ISS ve 3D prostoru (ECI)

Zadání: Mezinárodní vesmírná stanice ISS má v dané epoše následující Keplerovy elementy:

- Velká poloosa: $a = 6\,790,000 \text{ km}$
- Excentricita: $e = 0,000800$
- Sklon dráhy: $i = 51,6400^\circ$
- Délka vzestupného uzlu: $\Omega = 120,0000^\circ$
- Argument pericentra: $\omega = 75,0000^\circ$
- Pravá anomálie: $\nu = 45,0000^\circ$
- Parametr Země: $\mu_{\oplus} = 398\,600,44 \text{ km}^3/\text{s}^2$

Vypočítejte polohový vektor $\vec{r}_{PQW}$ a rychlostní vektor $\vec{v}_{PQW}$ v perifokální soustavě a transformujte je pomocí 3D rotační matice do stavového vektoru $[\vec{r}_{ECI}, \vec{v}_{ECI}]$ v ekvatoriální soustavě. **Postup výpočtu: 1. Parametr dráhy p a okamžitá vzdálenost r :**

$$p = a(1 - e^2) = 6\,790\,000 \cdot (1 - 0,000800^2) = 6\,790\,000 \cdot (1 - 0,00000064) \approx 6\,789\,996 \text{ km}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} = \frac{6\,789\,996}{1 + 0,000800 \cdot \cos(45^\circ)} = \frac{6\,789\,996}{1 + 0,000800 \cdot 0,707107} = \frac{6\,789\,996}{1,000566} \approx 6\,786\,157 \text{ km}$$

Okamžitá výška stanice nad koulí o poloměru 6 371 km činí $h = 6\,786\,157 - 6\,371 \approx 415,16$ km. **2. Polohový vektor v perifokální rovině $\vec{r}_{PQW}$:**

$$r_P = r \cos(45^\circ) = 6\,786\,157 \cdot 0,707107 \approx 4\,798\,538 \text{ km}$$

$$r_Q = r \sin(45^\circ) = 6\,786\,157 \cdot 0,707107 \approx 4\,798\,538 \text{ km}$$

$$r_W = 0,000 \text{ km}$$

$$\vec{r}_{PQW} = \begin{bmatrix} 4\,798\,538 \\ 4\,798\,538 \\ 0,000 \end{bmatrix} \text{ km}$$

3. Rychlostní vektor v perifokální rovině $\vec{v}_{PQW}$: Konstanta rychlosti:

$$\sqrt{\frac{\mu_\oplus}{p}} = \sqrt{\frac{398\,600,44}{6\,789\,996}} = \sqrt{58,704077} \approx 7,661859 \text{ km/s}$$

Složky rychlosti:

$$v_P = -\sqrt{\frac{\mu_\oplus}{p}} \sin(45^\circ) = -7,661859 \cdot 0,707107 \approx -5,417752 \text{ km/s}$$

$$v_Q = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{p}} (e + \cos 45^\circ) = 7,661859 \cdot (0,000800 + 0,707107) = 7,661859 \cdot 0,707907 \approx 5,423882 \text{ km/s}$$

$$v_W = 0,000 \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{PQW} = \begin{bmatrix} -5,417752 \\ 5,423882 \\ 0,000 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

Celková rychlost stanice: $v = \sqrt{(-5,417752)^2 + 5,423882^2} \approx 7,6662 \text{ km/s} \approx 27\,598 \text{ km/h}$. **4. Vyčíslení 3D rotační matice**

R: Goniometrické hodnoty zadaných úhlů:

- $\Omega = 120^\circ \implies \cos \Omega = -0,500000, \sin \Omega = 0,866025$
- $i = 51,64^\circ \implies \cos i = 0,620601, \sin i = 0,784126$
- $\omega = 75^\circ \implies \cos \omega = 0,258819, \sin \omega = 0,965926$

Dosadíme do jednotlivých prvků matice **R**:

$$R_{11} = (-0,5) \cdot 0,258819 - 0,866025 \cdot 0,965926 \cdot 0,620601 = -0,129410 - 0,519142 = -0,648552$$

$$R_{12} = -(-0,5) \cdot 0,965926 - 0,866025 \cdot 0,258819 \cdot 0,620601 = 0,482963 - 0,139104 = 0,343859$$

$$R_{13} = 0,866025 \cdot 0,784126 = 0,679074$$

$$R_{21} = 0,866025 \cdot 0,258819 + (-0,5) \cdot 0,965926 \cdot 0,620601 = 0,224144 - 0,299727 = -0,075583$$

$$R_{22} = -0,866025 \cdot 0,965926 + (-0,5) \cdot 0,258819 \cdot 0,620601 = -0,836516 - 0,080312 = -0,916828$$

$$R_{23} = -(-0,5) \cdot 0,784126 = 0,392063$$

$$R_{31} = 0,965926 \cdot 0,784126 = 0,757408$$

$$R_{32} = 0,258819 \cdot 0,784126 = 0,202947$$

$$R_{33} = 0,620601$$

Výsledná rotační matice:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -0,648552 & 0,343859 & 0,679074 \\ -0,075583 & -0,916828 & 0,392063 \\ 0,757408 & 0,202947 & 0,620601 \end{bmatrix}$$

5. Výpočet polohy $\vec{r}_{ECI} = \mathbf{R} \cdot \vec{r}_{PQW}$:

$$x = (-0,648552) \cdot 4\,798,538 + 0,343859 \cdot 4\,798,538 + 0 = -3\,112,104 + 1\,650,024 = -1\,462,08 \text{ km}$$

$$y = (-0,075583) \cdot 4\,798,538 + (-0,916828) \cdot 4\,798,538 + 0 = -362,687 - 4\,399,435 = -4\,762,12 \text{ km}$$

$$z = 0,757408 \cdot 4\,798,538 + 0,202947 \cdot 4\,798,538 + 0 = 3\,634,451 + 973,849 = +4\,608,30 \text{ km}$$

$$\vec{r}_{ECI} = \begin{bmatrix} -1\,462,08 \\ -4\,762,12 \\ +4\,608,30 \end{bmatrix} \text{ km}$$

Kontrola normy polohy: $|\vec{r}_{ECI}| = \sqrt{(-1462,08)^2 + (-4762,12)^2 + 4608,30^2} \approx 6\,786,16 \text{ km}$ (shoduje se přesně s r).

6. Výpočet rychlosti $\vec{v}_{ECI} = \mathbf{R} \cdot \vec{v}_{PQW}$:

$$v_x = (-0,648552) \cdot (-5,417752) + 0,343859 \cdot 5,423882 = 3,51370 + 1,86505 = +5,379 \text{ km/s}$$

$$v_y = (-0,075583) \cdot (-5,417752) + (-0,916828) \cdot 5,423882 = 0,40949 - 4,97277 = -4,563 \text{ km/s}$$

$$v_z = 0,757408 \cdot (-5,417752) + 0,202947 \cdot 5,423882 = -4,10344 + 1,10076 = -3,003 \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{ECI} = \begin{bmatrix} +5,379 \\ -4,563 \\ -3,003 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

Kontrola normy rychlosti: $|\vec{v}_{ECI}| = \sqrt{5,379^2 + (-4,563)^2 + (-3,003)^2} \approx 7,666 \text{ km/s}$ (shoduje se s v).

Tímto způsobem dokáže navigační počítač stanice ISS v reálném čase převádět matematicky čisté orbitální parametry na okamžité prostorové souřadnice s centimetrovou přesností.

SHRNUTÍ: CO SI Z TÉTO KAPITOLY ODNĚST

- **Šestice Keplerových elementů** $\{a, e, i, \Omega, \omega, \nu\}$: Zcela jednoznačně popisuje oběžnou dráhu v 3D prostoru. Velká poloosa a a excentricita e určují tvar, úhly i, Ω, ω prostorovou orientaci a pravá anomálie ν okamžitou polohu tělesa.
- **Perifokální soustava PQW**: Přirozená lokální soustava v rovině dráhy. Polohový vektor $\vec{r}_{PQW} = [r \cos \nu, r \sin \nu, 0]^T$ a rychlostní vektor $\vec{v}_{PQW} = [-\sqrt{\mu/p} \sin \nu, \sqrt{\mu/p}(e + \cos \nu), 0]^T$ v ní mají jednoduché analytické vyjádření.
- **Eulerova transformace do ECI**: Pevná inerciální poloha se získá trojicí rotací $\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(-\Omega)\mathbf{R}_x(-i)\mathbf{R}_z(-\omega)$. Sloupce matice tvoří jednotkové směrové vektory báze PQW vyjádřené v ECI.
- **Ekvivalence stavového vektoru a elementů**: Ze stavového vektoru $[\vec{r}, \vec{v}]$ lze přes moment hybnosti $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$, uzlový vektor $\vec{n} = \vec{K} \times \vec{h}$ a Laplaceův vektor excentricity $\vec{e}$ přímochaře zrekonstruovat všech 6 Keplerových elementů.

Kapitola 7: Kosmická patra kolem Země: Typy a režimy oběžných drah

Když architekt navrhuje moderní multifunkční mrakodrap, každé poschodí budovy má své přísné funkční určení. V suterénu a přízemí se nachází rušné metro, technické zázemí a zásobování. Ve středních patrech pulzují komerční kanceláře a obchody. V nejvyšších patrech sídlí klidné rezidence, zatímco na střeše mrakodrapu jsou umístěny tiché radiové retranslatory, meteorologické radary a vyhlídkové věže.

Kolní prostor naší planety funguje jako gigantický **kosmický mrakodrap**. V astrodynamice neexistuje jediná univerzální oběžná dráha vhodná pro všechny úkoly. Prostor od horní hranice atmosféry až po vzdálenosti statisíců kilometrů je rozčleněn do specifických pater a orbitálních režimů.

Volba konkrétního patra představuje jedno ze základních rozhodnutí celé kosmické mise:

- Určuje energetickou náročnost startu (potřebný celkový impuls Δv) a tím velikost a cenu nosné rakety.
- Diktuje dobu oběhu družice – od 90 minut na nízké dráze až po 24 hodin na stacionární dráze.
- Vymezuje zorné pole senzorů, geometrické rozlišení optiky a latenci radiového signálu.
- Vystavuje kosmickou loď specifickému prostředí: od brzděného odporu zbytkové atmosféry až po ničivé toky nabitých částic ve Van Allenových radiačních pásech.

7.1 Přehled a rozbor orbitálních pater

Oběžné dráhy kolem Země klasifikujeme především podle jejich výšky nad povrchem, sklonu roviny oběhu a tvaru elipsy.

''' Výška (km) ^ | |--- 35 786 km ----- GEO (Geostacionární dráha: $T = 23\text{ h }56\text{ min}$, $v = 3,07\text{ km/s}$) | | 20 000 - 24 000 km MEO (Navigační systémy: Galileo, GPS, GLONASS) | |--- 2 000 km ----- Horní hranice LEO / Vnitřní Van Allenův pás | | 400 - 800 km LEO (ISS, Starlink, SSO: Sentinel, Landsat) |--- 160 km ----- Spodní hranice stabilního oběhu (Kármánova hranice: 100 km) +-----> ZEMĚ '''

Nízká oběžná dráha (LEO – Low Earth Orbit)

Nízká oběžná dráha sahá od výšky zhruba **160 km** (kde ještě aerodynamický odpor umožňuje setrvat alespoň několik oběhů bez okamžitého pádu) do výšky **2 000 km** (kde začíná intenzivní vnitřní Van Allenův radiační pás).

- **Typičtí zástupci:** Mezinárodní vesmírná stanice ISS ($h \approx 415\text{ km}$), Hubbleův vesmírný dalekohled ($h \approx 535\text{ km}$), megakonstelace družicového internetu Starlink ($h \approx 550\text{ km}$) a OneWeb ($h \approx 1\,200\text{ km}$).
- **Hlavní výhody:** Nejnižší energetická náročnost vynesení nákladu ($\Delta v \approx 9,3\text{ až }9,5\text{ km/s}$ z povrchu Země), vynikající prostorové rozlišení kamer (desítky centimetrů na pixel) a minimální zpoždění přenosu signálu (latence 2,5 až 8 ms).
- **Limitující faktory:** Působení zbytkové atmosféry vedoucí k postupnému rozpadu dráhy a nutnosti motorických korekcí, krátká doba přímé radiové viditelnosti z jedné pozemní stanice (pouze 8 až 12 minut během jednoho přeletu) a vysoká hustota kosmického smetí.

Střední oběžná dráha (MEO – Medium Earth Orbit)

Pásmo mezi **2 000 km** a **35 786 km** tvoří střední oběžná dráha. Doménou MEO jsou celosvětové družicové navigační systémy (GNSS):

- **Evropský systém Galileo:** výška $h = 23\,222\text{ km}$, sklon $i = 56^\circ$, perioda $T \approx 14\text{ h }05\text{ min}$.
- **Americký systém GPS (Navstar):** výška $h = 20\,180\text{ km}$, sklon $i = 55^\circ$, polosynchronní perioda $T \approx 11\text{ h }58\text{ min}$ (přesně polovina siderického dne).
- **Ruský systém GLONASS:** výška $h = 19\,100\text{ km}$, sklon $i = 64,8^\circ$, perioda $T \approx 11\text{ h }15\text{ min}$.

V těchto výškách má satelit přímou viditelnost na téměř celou zemskou polokouli, takže pro stoprocentní globální pokrytí kdekoli na Zemi postačuje konstelace 24 až 30 satelitů. Družice v MEO však musí procházet vnějším Van Allenovým radiačním pásem a jejich elektronika vyžaduje masivní stínění proti vysokoenergetickým elektronům a protonům.

Geostacionární a geosynchronní dráha (GEO / GSO)

Ve výšce přesně 35 786 km nad rovníkem se oběžná doba družice vyrovná periodě rotace Země kolem své osy. **Geosynchronní dráha (GSO):** Jakákoli dráha s periodou rovné siderickému dni ($T = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4,09 \text{ s}$). Pokud má nenulový sklon ($i > 0$) nebo elipticitu ($e > 0$), družice při pohledu ze Země vykresluje na obloze uzavřenou křivku ve tvaru osmičky (tzv. analemu*).

- **Geostacionární dráha (GEO):** Speciální případ GSO, kde je sklon přesně nulový ($i = 0^\circ$) a dráha je dokonale kruhová ($e = 0$). Družice se nachází stále nad stejným bodem zemského rovníku a na obloze zdánlivě nehybně stojí. To umožňuje využívat pevně namířené parabolické antény bez natáčecích mechanismů (satelitní televize, meteorologické družice Meteosat, GOES).

Protože geostacionární dráha tvoří jednorozměrnou kružnici o pevně daném poloměru, kapacita orbitálních pozic je fyzicky omezená. Jednotlivé sloty a vysílací frekvence celosvětově přiděluje Mezinárodní telekomunikační unie (ITU). Družice na konci životnosti musí uvolnit své místo a motoricky vystoupat na tzv. *hřbitovní dráhu* (Graveyard Orbit) nejméně 300 km nad pás GEO.

Heliosynchronní dráha (SSO – Sun-Synchronous Orbit)

Speciální typ kvazipolární dráhy v LEO (výšky typicky 600 až 800 km, sklon 97° až 99°), na které gravitační vliv zploštění Země stáčí rovinu dráhy přesně stejnou úhlovou rychlostí, jakou obíhá Země kolem Slunce ($0,9856^\circ/\text{den}$). Družice tak přelétá nad libovolnou zeměpisnou šířkou vždy ve stejném místním slunečním čase (např. v 10:30 dopoledne). Zajišťuje to konstantní světelné podmínky pro optický dálkový průzkum Země (Sentinel, Landsat) i stálý osvit solárních panelů (dráhy typu *dawn-dusk*).

Vysoce eliptické dráhy (HEO – Highly Elliptical Orbit)

Pro státy ve vysokých zeměpisných šířkách (např. Rusko, Kanada, Skandinávie) je signál z geostacionární dráhy nepoužitelný, protože družice nad rovníkem leží příliš nízko nad obzorem nebo pod ním. Řešením jsou vysoce protáhlé eliptické dráhy:

- **Dráha Molnija:** poloosa $a \approx 26\,600 \text{ km}$, excentricita $e \approx 0,72$, sklon $i = 63,4^\circ$, perioda $T = 12 \text{ hodin}$.
- **Dráha Tundra:** geosynchronní obdoba s periodou $T = 24 \text{ hodin}$, $e \approx 0,25$ až $0,40$, sklon $i = 63,4^\circ$.

Podle 2. Keplerova zákona se družice v okolí apogea pohybuje nejpomaleji. Satelit na dráze Molnija stráví téměř 8 hodin ze své dvanáctihodinové periody vysoko nad severním polárním kruhem, kde plní funkci virtuální stacionární stanice.

7.2 Aerodynamický odpor v LEO a orbitální rozpad

I ve výškách stovek kilometrů nad zemským povrchem není vakuum dokonalé. Družice se střetávají se zředěnými atomy atomárního kyslíku (O) a molekulami dusíku (N_2).

Matematický model brzdné síly

V režimu volně molekulárního proudění (Knudsenovo číslo $Kn \gg 1$) je aerodynamická síla vyjádřena vztahem:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \cdot C_D \cdot A$$

Zrychlení způsobené odporem vzduchu získáme vydělením hmotností družice m :

$$a_D = \frac{F_D}{m} = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \cdot \left(\frac{C_D \cdot A}{m} \right) = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \cdot B$$

kde veličina $B = \frac{C_D \cdot A}{m}$ je **balistický koeficient** (v astrodynamice se někdy definuje jeho převrácená hodnota $BC = \frac{m}{C_D A}$, tzv. *balistický parametr*).

Pokles velké poloosy za jeden oběh

Při každém oběhu vykoná brzdná síla zápornou mechanickou práci:

$$\Delta \mathcal{E}_{rev} = \oint \vec{F}_D \cdot d\vec{r} = -F_D \cdot (2\pi a) = -\frac{1}{2} \rho v^2 C_D A \cdot 2\pi a = -\pi \rho v^2 C_D A a$$

Specifická orbitální energie je svázána s velkou poloosou vztahem $\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a}$. Diferenciací získáme:

$$d\mathcal{E} = \frac{\mu}{2a^2} da$$

Dosažením kruhové rychlosti $v^2 = \frac{\mu}{a}$ do výrazu pro ztrátu specifické energie $\Delta\mathcal{E}_{rev}/m$ dostáváme úbytek velké poloosy za jeden jediný oběh:

$$\Delta a_{rev} = -2\pi \frac{C_D A}{m} \rho a^2 = -2\pi B \rho a^2$$

Počet oběhů za jeden pozemský den činí $N_{den} = \frac{86\,400}{T}$. Denní pokles výšky dráhy Δh_{den} je pak:

$$\Delta h_{den} \approx N_{den} \cdot \Delta a_{rev} = -\frac{86\,400}{2\pi \sqrt{a^3/\mu}} \cdot 2\pi B \rho a^2 = -86\,400 \cdot B \cdot \rho \cdot \sqrt{\mu a}$$

Hustota atmosféry $\rho(h)$ klesá s výškou přibližně exponenciálně:

$$\rho(h) = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{h - h_0}{H}\right)$$

kde H je atmosférická výšková škála ($H \approx 50$ až 70 km v LEO). Protože hustota silně závisí na sluneční aktivitě (ultrafialovém záření a slunečním toku F10.7 nafukujícím termosféru), může se brzdění v době slunečního maxima zvýšit až desetinásobně.

7.3 Kompletní matematické odvození geostacionární dráhy (GEO)

Aby družice setrvala nehybně nad konkrétním bodem rovníku, musí být splněny tři striktní podmínky:

1. **Nulová excentricita** ($e = 0$): Dráha musí být kruhová, aby se neměnila orbitální rychlost družice v průběhu dne.
2. **Nulový sklon** ($i = 0^\circ$): Rovina dráhy musí přesně ležet v rovině zemského rovníku, jinak by se družice pohybovala na obloze na sever a na jih.
3. **Shoda orbitální a rotační periody**: Oběžná doba družice se musí rovnat siderickému dni Země T_{sid} .

Siderický den vs. sluneční den

Běžný sluneční den trvá přesně 24 hodin = 86 400 sekund. Během tohoto dne se však Země posune po své oběžné dráze kolem Slunce o zhruba 1° . Aby se Slunce dostalo do stejného poledníku, musí se Země otočit o 361° .

Skutečná otočka Země vůči vzdáleným hvězdám (inerciálnímu prostoru) o 360° trvá **siderický den**:

$$T_{sid} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4,0905 \text{ s} = 86\,164,0905 \text{ s}$$

Úhlová rychlost rotace Země je tedy:

$$\omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{T_{sid}} = \frac{2\pi}{86\,164,0905} \approx 7,292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Odvození velké poloosy a_{GEO}

Na kruhové dráze je gravitační síla v rovnováze s dostředivou silou:

$$\frac{GM_{\oplus}m}{r^2} = m\omega_{\oplus}^2 r \implies \frac{\mu_{\oplus}}{r^2} = \omega_{\oplus}^2 r$$

Vyjádříme poloměr dráhy $r = a_{GEO}$:

$$a_{GEO}^3 = \frac{\mu_{\oplus}}{\omega_{\oplus}^2} = \frac{\mu_{\oplus} T_{sid}^2}{4\pi^2}$$

$$a_{GEO} = \sqrt[3]{\frac{\mu_{\oplus} T_{sid}^2}{4\pi^2}}$$

Dosadíme přesné geocentrické parametry ($\mu_{\oplus} = 398\,600,4418 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $T_{sid} = 86\,164,0905 \text{ s}$):

$$a_{GEO}^3 = \frac{398\,600,4418 \cdot (86\,164,0905)^2}{4\pi^2} = \frac{398\,600,4418 \cdot 7\,424\,250\,459}{39,4784176} \approx \frac{2,959296 \times 10^{15}}{39,4784176} \approx 7,495984 \times 10^{13} \text{ km}^3$$

Odmocněním třetí odmocninou získáme přesný poloměr geostacionární dráhy:

$$a_{GEO} = \sqrt[3]{7,495984 \times 10^{13}} \approx \mathbf{42\,164,17 \text{ km}}$$

Výška nad zemským povrchem h_{GEO} a oběžná rychlost

Skutečný rovníkový poloměr zemského elipsoidu WGS-84 je $R_{eq} = 6\,378,137 \text{ km}$. Výška geostacionární dráhy nad hladinou moře na rovníku je:

$$h_{GEO} = a_{GEO} - R_{eq} = 42\,164,17 - 6\,378,14 = \mathbf{35\,786,03 \text{ km} \approx 35\,786 \text{ km}}$$

Oběžná rychlost družice na GEO:

$$v_{GEO} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a_{GEO}}} = \sqrt{\frac{398\,600,4418}{42\,164,17}} = \sqrt{9,45353} \approx \mathbf{3,07466 \text{ km/s} \approx 3,075 \text{ km/s}}$$

V běžných jednotkách se družice pohybuje rychlostí $v_{GEO} \approx 11\,069 \text{ km/h}$.

7.4 Fyzika a matematika heliosynchronní dráhy (SSO)

Země není dokonalá homogenní koule. Odstředivá síla rotace způsobuje rovníkové vyduť – rovníkový poloměr ($6\,378,14 \text{ km}$) je o $21,38 \text{ km}$ větší než polární poloměr ($6\,356,75 \text{ km}$).

V gravitačním potenciálu Země tento přebytek hmoty reprezentuje druhý zonální harmonický koeficient $J_2 \approx 1,08263 \times 10^{-3}$. Gravitační potenciál má tvar:

$$V(r, \phi) = -\frac{\mu}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \frac{3 \sin^2 \phi - 1}{2} \right]$$

Sekulární precese uzlové přímky

Gravitační moment působící na nakloněnou dráhu způsobuje precesní pohyb uzlové přímky. Střední časová změna délky vzestupného uzlu $\frac{d\Omega}{dt}$ za jeden oběh je dána rovnicí:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{p} \right)^2 n \cos i$$

kde:

- $J_2 = 1,08263 \times 10^{-3}$ – dynamický faktor zploštění Země,
- $R_{\oplus} = 6\,378,137 \text{ km}$ – rovníkový poloměr Země,
- $p = a(1 - e^2)$ – parametr kuželosečky v kilometrech,
- $n = \sqrt{\mu/a^3}$ – střední pohyb (orbitální frekvence v rad/s),
- i – sklon dráhy.

Podmínka heliosynchronicity

Během jednoho tropického roku ($365,2422 \text{ dne}$) oběhne Země kolem Slunce dráhu 360° . Aby rovina dráhy svírala se spojnicí Země–Slunce stále stejný úhel, musí se uzlová přímka stáčet stejnou rychlostí:

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_{SSO} = \frac{360^\circ}{365,2422 \text{ dne}} \approx 0,985647^\circ/\text{den} = \frac{2\pi \text{ rad}}{365,2422 \times 86\,400 \text{ s}} \approx \mathbf{1,99106 \times 10^{-7} \text{ rad/s}}$$

Všimněte si znaménka: protože požadovaná rotace uzlu je kladná (ve směru oběhu Země kolem Slunce od západu na východ) a znaménko v rovnici precese je záporné, musí být $\cos i$ **záporný**:

$$\cos i < 0 \implies 90^\circ < i < 180^\circ$$

Heliosynchronní dráha musí být principiálně **retrográdní**!

KRITICKÝ SKLON A ZAMRZLÉ APSIDY DRAH TYPU MOLNIJA

Zploštění Země J_2 nepůsobí pouze stáčení uzlové přímky, ale vyvolává také sekulární stáčení apsidální přímky (rotaci perigea):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_\oplus}{p} \right)^2 n (5 \cos^2 i - 1)$$

U vysoce eliptické dráhy by rotaci perigea znamenala katastrofu: apogeum by se časem přesunulo ze severní polokoule na jižní. Aby apsidy zůstaly „zamrzlé“ ($\frac{d\omega}{dt} = 0$), musí platit:

$$5 \cos^2 i - 1 = 0 \implies \cos i = \frac{1}{\sqrt{5}} \implies i = \arccos(0,447214) \approx \mathbf{63,435^\circ}$$

Proto mají ruské komunikační družice Molnija a Tundra sklon přesně $63,4^\circ$.

Orbitální režim	Zkratka	Typická výška h	Sklon dráhy i	Oběžná doba T	Oběžná rychlost v	Typické aplikace a mise
Nízká zemská	LEO	160 až 2 000 km	0° až 180°	88 až 127 min	7,8 až 6,9 km/s	ISS, Starlink, Hubble, pilotované lety
Heliosynchronní	SSO	600 až 800 km	97° až 99°	96 až 101 min	7,5 až 7,4 km/s	Sentinel, Landsat, meteorologie
Střední zemská	MEO	2 000 až 35 786 km	55° až 65°	2 až 24 h	6,9 až 3,1 km/s	Navigace Galileo, GPS, GLONASS
Geostacionární	GEO	35 786 km	$0,0^\circ$	23 h 56 min	3,075 km/s	TV vysílání, Meteosat, telekomunikace
Vysoce eliptická	HEO	500 až 40 000 km	$63,4^\circ$	12 h (Molnija) / 24 h	1,5 až 10 km/s	Pokrytí polárních oblastí a arktické pásmo

7.5 Řešené výpočetní příklady

Řešený příklad 7.1: Kompletní výpočet GEO a zpoždění rádiového signálu

Zadání: Družice televizního vysílání je umístěna na geostacionární dráze GEO ($h_{GEO} = 35\,786$ km).

- Vypočítejte teoretické zpoždění signálu při obousměrné komunikaci (round-trip time) pro stanici ležící přímo v sub-satelitním bodě na rovníku.
- Vypočítejte šikmou vzdálenost a obousměrné zpoždění signálu pro pozemní stanici v Praze (zeměpisná šířka $\phi = 50,0^\circ$ s.š., předpokládejme stejnou zeměpisnou délku jako družice). Rychlost šíření signálu je $c = 299\,792,458$ km/s.

Postup výpočtu: 1. Zpoždění v nadiru (na rovníku): Vzdálenost stanice od družice je rovna nadmořské výšce dráhy $d_{nad} = h_{GEO} = 35\,786,03$ km. Signál letí z pozemního vysílače k družici a odražený/retranslonavý signál zpět k přijímači. Celková dráha signálu tam a zpět činí:

$$D_{nad} = 2 \cdot d_{nad} = 2 \cdot 35\,786,03 = 71\,572,06 \text{ km}$$

Časové zpoždění:

$$\tau_{nad} = \frac{D_{nad}}{c} = \frac{71\,572,06}{299\,792,458} \approx 0,23874 \text{ s} \approx \mathbf{238,7 \text{ ms} \approx 240 \text{ ms}}$$

2. Šikmá vzdálenost a zpoždění pro Prahu ($\phi = 50,0^\circ$): Střed Země označme O , pozemní stanici v Praze P a družici S . Trojúhelník OPS má strany:

- $OP = R_{\oplus} \approx 6\,378,14$ km (poloměr Země)
- $OS = a_{GEO} = 42\,164,17$ km (vzdálenost družice od středu Země)
- Úhel mezi vektory je přímo zeměpisná šířka $\angle POS = \phi = 50,0^\circ$.

Podle kosinové věty pro vzdálenost $d = PS$:

$$\begin{aligned} d^2 &= R_{\oplus}^2 + a_{GEO}^2 - 2 \cdot R_{\oplus} \cdot a_{GEO} \cdot \cos \phi \\ R_{\oplus}^2 &= (6\,378,14)^2 \approx 40\,680\,670 \text{ km}^2 \\ a_{GEO}^2 &= (42\,164,17)^2 \approx 1\,777\,817\,232 \text{ km}^2 \\ 2 \cdot R_{\oplus} \cdot a_{GEO} \cdot \cos(50^\circ) &= 2 \cdot 6\,378,14 \cdot 42\,164,17 \cdot 0,642788 \approx 345\,794\,402 \text{ km}^2 \\ d^2 &= 40\,680\,670 + 1\,777\,817\,232 - 345\,794\,402 = 1\,472\,703\,500 \text{ km}^2 \\ d &= \sqrt{1\,472\,703\,500} \approx \mathbf{38\,376,86 \text{ km}} \end{aligned}$$

Šikmá vzdálenost je o více než 2 500 km delší než kolmá výška. Obousměrné zpoždění šíření signálu (tam a zpět):

$$\tau_{Prah} = \frac{2 \cdot d}{c} = \frac{2 \cdot 38\,376,86}{299\,792,458} = \frac{76\,753,72}{299\,792,458} \approx 0,25602 \text{ s} \approx \mathbf{256 \text{ ms}}$$

Když připočteme zpoždění zpracování signálu v pozemních routerech a koncových kodérech (cca dalších 200 až 300 ms), celková latence geostacionárního internetu dosahuje přes **500 až 600 ms**. To vysvětluje, proč je GEO internet nepoužitelný pro online hry v reálném čase a interaktivní audiohovory, a proč došlo k rozmachu nízkých konstelací LEO (Starlink s latencí pod 30 ms).

Řešený příklad 7.2: Krok za krokem výpočet sklonu dráhy pro družici Sentinel-2

Zadání: Evropská družice dálkového průzkumu Země Sentinel-2 obíhá po kruhové heliosynchronní dráze (SSO) v nominální výšce $h = 786$ km. Vypočítejte přesný sklon oběžné dráhy i potřebný k zajištění heliosynchronicity. Uvažujte parametry: $\mu_{\oplus} = 398\,600,44 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $R_{\oplus} = 6\,378,137$ km, $J_2 = 1,08263 \times 10^{-3}$. **Postup výpočtu: 1. Poloměr dráhy a parametr p :** Protože je dráha kruhová ($e = 0$):

$$r = a = R_{\oplus} + h = 6\,378,137 + 786,000 = \mathbf{7\,164,137 \text{ km}}$$

$$p = a(1 - e^2) = 7\,164,137 \text{ km}$$

2. Střední úhlový pohyb n :

$$n = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a^3}} = \sqrt{\frac{398\,600,44}{(7\,164,137)^3}} = \sqrt{\frac{398\,600,44}{367,698 \times 10^9}} = \sqrt{1,08404 \times 10^{-6}} \approx \mathbf{1,041173 \times 10^{-3} \text{ rad/s}}$$

3. Požadovaná precesní rychlost uzlové přímky $\dot{\Omega}_{req}$:

$$\dot{\Omega}_{req} = \frac{2\pi \text{ rad}}{365,2422 \cdot 86\,400 \text{ s}} \approx \mathbf{1,99106 \times 10^{-7} \text{ rad/s}}$$

4. Vyjádření sklonu dráhy z rovnice precese: Rovnice sekulární precese uzlu:

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{p} \right)^2 n \cos i$$

Vyjádříme $\cos i$:

$$\cos i = -\frac{\dot{\Omega}_{req}}{\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{p} \right)^2 n}$$

Spočítáme jmenovatel:

$$\left(\frac{R_{\oplus}}{p}\right)^2 = \left(\frac{6\,378,137}{7\,164,137}\right)^2 = (0,890287)^2 \approx 0,792611$$

$$\frac{3}{2}J_2 = 1,5 \cdot (1,08263 \times 10^{-3}) = 1,623945 \times 10^{-3}$$

$$\text{Jmenovatel} = (1,623945 \times 10^{-3}) \cdot 0,792611 \cdot (1,041173 \times 10^{-3}) \approx 1,34015 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$$

5. Výpočet hodnoty sklonu i :

$$\cos i = -\frac{1,99106 \times 10^{-7}}{1,34015 \times 10^{-6}} \approx -0,148570$$

$$i = \arccos(-0,148570) \approx 98,54^\circ$$

(Poznámka: Při použití středního poloměru Země $R = 6\,371 \text{ km}$ vychází hodnota přesně $98,51^\circ$, což odpovídá oficiální nominální hodnotě letového plánu mise Sentinel-2).

Řešený příklad 7.3: Výpočet parametrů střední dráhy MEO pro družice Galileo

Zadání: Evropský navigační systém Galileo operuje na střední oběžné dráze MEO ve výšce $h = 23\,222 \text{ km}$ nad povrchem Země.

1. Vypočítejte přesnou oběžnou periodu družice T v sekundách i hodinách.
2. Vypočítejte oběžnou rychlost družice v .
3. Dokažte rezonanci pozemní stopy po 10 siderických dnech (tzv. opakovací cyklus přeletů).

Postup výpočtu: 1. Poloměr dráhy r :

$$r = R_{\oplus} + h = 6\,378,14 + 23\,222 = 29\,600,14 \text{ km}$$

2. Výpočet oběžné periody T : Podle 3. Keplerova zákona:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu_{\oplus}}}$$

$$r^3 = (29\,600,14)^3 \approx 2,59348 \times 10^{13} \text{ km}^3$$

$$\frac{r^3}{\mu_{\oplus}} = \frac{2,59348 \times 10^{13}}{398\,600,44} \approx 65\,064\,749 \text{ s}^2$$

$$\sqrt{\frac{r^3}{\mu_{\oplus}}} \approx 8\,066,272 \text{ s}$$

$$T = 2\pi \cdot 8\,066,272 \approx 50\,681,8 \text{ s}$$

Přepočet na hodiny, minuty a sekundy:

$$T = \frac{50\,681,8}{3\,600} \approx 14,07827 \text{ hodin} = 14 \text{ h } 04 \text{ min } 42 \text{ s} \approx 14 \text{ h } 05 \text{ min}$$

3. Oběžná rychlost družice v :

$$v = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r}} = \sqrt{\frac{398\,600,44}{29\,600,14}} = \sqrt{13,46617} \approx 3,6696 \text{ km/s} \approx 3,67 \text{ km/s}$$

Pro srovnání: rychlost na MEO (3,67 km/s) je zhruba poloviční oproti LEO (7,66 km/s), ale vyšší než na GEO (3,075 km/s).

Důkaz rezonance opakovacího cyklu: Požadavek návrhu konstelace Galileo zní: družice musí po 17 obězích zopakovat stejnou trajektorii nad zemským povrchem:

$$\text{Čas 17 oběhů} = 17 \cdot T = 17 \cdot 50\,681,8 \text{ s} = 861\,590,6 \text{ s}$$

Doba trvání deseti siderických dnů Země:

$$10 \cdot T_{sid} = 10 \cdot 86\,164,09 \text{ s} = \mathbf{861\,640,9 \text{ s}}$$

Rozdíl činí pouhých 50,3 s za 10 dní (což je rozdíl méně než 0,006 %), který je snadno kompenzován drobnou precesí způsobenou J_2 . Pozemní stopa družic Galileo se tedy po každých 10 dnech a 17 obězích s milimetrovou přesností překryje, což zaručuje dokonale předvídatelné geometrické rozložení družic (DOP – Dilution of Precision) pro uživatele na Zemi.

SHRNUTÍ: CO SI Z TÉTO KAPITOLY ODNÉST

- **Kosmická patra:** LEO (160–2000 km) nabízí minimální latenci a vysoké rozlišení, MEO (cca 20 000–24 000 km) je doménou navigačních systémů (Galileo, GPS), GEO (35 786 km) umožňuje zdánlivou nehybnost pro telekomunikace.
- **Odpor atmosféry v LEO:** Způsobuje zkracování velké poloosy tempem $\Delta a_{rev} = -2\pi B \rho a^2$. Balistický koeficient $B = C_D A / m$ určuje citlivost tělesa na aerodynamické brzdění.
- **Geostacionární dráha** ($a_{GEO} = 42\,164 \text{ km}$, $h_{GEO} = 35\,786 \text{ km}$): Odvozena z rovnosti doby oběhu se siderickým dnem (86 164,09 s). Oběžná rychlost činí 3,075 km/s a rádiové zpoždění tam a zpět dosahuje cca 240 až 260 ms.
- **Heliosynchronní dráha (SSO):** Využívá gravitační asymetrii zemského zploštění (J_2). Vyžaduje retrogradní sklon ($i \approx 97^\circ$ až 99°), při kterém uzlová přímka precesuje tempem $0,9856^\circ/\text{den}$, udržujíc stálý lokální sluneční čas přeletu.

Kapitola 8: Orbitální manévry a rozpočet Δv (Jak se řídí loď')

Když sledujeme sci-fi velkofilmy jako *Star Wars* nebo *Star Trek*, kosmické koráby se v nich chovají jako letadla v atmosféře: neustále jim z trysek šlehá jasné světlo motorů, ladně zatáčí v ostrých obloucích a při každé změně směru se dramaticky naklání.

Skutečnost kosmických letů je však zcela odlišná a mnohem fascinující. V kosmickém vakuu totiž kosmická loď stráví **99,9 % své cesty s naprosto vypnutými motory**. Loď se vznáší v tichém beztížném stavu a nechává se pasivně unášet gravitačním polem. Když je potřeba změnit směr nebo výšku letu, motory se zapnou jen na několik sekund či minut – v krátkém, nesmírně přesně propočítaném impulsu.

Jak se ale kosmická loď vlastně řídí, když ve vesmíru není žádný vzduch, o který by se opřela křídla, žádné kormidlo ani žádná silnice? A proč se v kosmonautice spotřeba paliva nepočítá v litrech benzínu ani v ujetých kilometrech?

Vítejte ve světě orbitálních manévru a nejcennější veličiny celého vesmíru: **Δv (Delta-v)**.

8.1 Jak se rakety pohybují ve vakuu: Tsiolkovského rovnice

První otázka, kterou si začátečník při pohledu na raketu ve vesmíru položí, zní: „*O co se vlastně raketový motor ve vakuu opírá, když tam není žádný vzduch?*“

Raketa žádný vzduch nepotřebuje. Využívá nejuniverzálnější fyzikální princip: **3. Newtonův pohybový zákon – zákon akce a reakce** spojený se **zákonem zachování hybnosti**.

Představte si člověka na lední ploše v dokonale nabroušených bruslích. Nemůže se odrazit nohama od ledu. V náručí však drží těžkou kouli. Co se stane, když kouli vši silou mrští před sebe?

- **Akce:** Člověk udělil kouli dopřednou hybnost ($m \cdot v_{koule}$).
- **Reakce (zpětný ráz):** Koule v okamžiku odhození zapůsobila na jeho ruce stejnou silou opačným směrem. Bruslař se začne po ledě nezadržitelně klouzat **dozadu**!

Raketový motor nedělá nic jiného: ve spalovací komoře hoří palivo a okysličovadlo za teplot přes 3 000 °C. Vzniklé spaliny proudí tryskou a opouštějí raketu obrovskou rychlostí **3 000 až 4 500 m/s** (více než 10 000 až 16 000 km/h!). Každou sekundu motor vychrlí stovky kilogramů těchto mikroskopických „projektilů“. A právě součet jejich zpětných rázů uděluje raketě dopředný tah.

Matematické odvození Tsiolkovského raketové rovnice

V roce 1903 ruský vědec Konstantin Eduardovič Tsiolkovskij odvodil základní rovnici raketového pohybu.

V okamžiku t má raketa hmotnost m a rychlost v . O malý okamžik dt později vyvrhne motor dávku plynu o hmotnosti dm relativní výtokovou rychlostí v_e . Ze zákona zachování hybnosti platí:

$$m \cdot dv = -v_e \cdot dm$$

Znaménko minus vyjadřuje, že vyvrhováním palin celková hmotnost rakety klesá ($dm < 0$). Separujeme proměnné:

$$dv = -v_e \frac{dm}{m}$$

Integrovaním od startovní hmotnosti m_0 do konečné vyhořelé hmotnosti m_f :

$$\Delta v = -v_e \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = -v_e (\ln m_f - \ln m_0) = v_e \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right)$$

Dostáváme základní **Tsiolkovského rovnici**:

$$\Delta v = v_e \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) = I_{sp} \cdot g_0 \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right)$$

Podrobný rozbor Tsiolkovského rovnice pro začátečníky: Co které písmeno znamená?

- Δv (**Delta-v na levé straně**): Představuje celkovou **změnu rychlosti v metrech za sekundu** [m/s], kterou je raketa schopna dosáhnout spálením veškerého svého paliva. Je to nejdůležitější číslo každé rakety – určuje její celkový dosah.
- v_e (**efektivní výtoková rychlost spalín**): Rychlost v metrech za sekundu [m/s], jakou horké plyny vylétávají z trysky motoru. Čím rychleji plyny z trysky stříkají, tím větší tah a rychlost raketa získá z každého kilogramu paliva.
- I_{sp} (**specifický impuls motoru**): V raketovém inženýrství se účinnost motoru nejčastěji udává jako specifický impuls v **sekundách** [s]. Souvisí s výtokovou rychlostí vztahem:

$$v_e = I_{sp} \cdot g_0 \implies I_{sp} = \frac{v_e}{g_0}$$

(kde $g_0 \approx 9,80665 \text{ m/s}^2$ je tíhové zrychlení na Zemi). Co specifický impuls v sekundách intuitivně znamená? * Představuje počet sekund, po které dokáže 1 kilogram paliva vyvíjet tah o síle jednoho kilogramu (9,81 N). Čím vyšší číslo, tím je motor úspornější! * Běžné tuhé palivo (např. boční boostery u Space Shuttle): $I_{sp} \approx 260 \text{ s}$. * Kerozin s kapalným kyslíkem (Falcon 9): $I_{sp} \approx 310 \text{ s}$ u země, 348 s ve vakuu. * Kapalný vodík s kyslíkem (raketa SLS, Space Shuttle): $I_{sp} \approx 450 \text{ s}$. * Iontové elektrické motory: $I_{sp} \approx 3\,000$ až $5\,000 \text{ s}$!

- $\ln$ (**přirozený logaritmus**): Toto je největší nepřítel raketových inženýrů, kterému se říká **tyranie raketové rovnice**. Logaritmus roste velmi pomalu. Abyste zdvojnásobili konečnou rychlost Δv , nestačí zdvojnásobit množství paliva – musíte poměr hmotností umocnit na druhou ($e^2 \approx 7,4$)!
- **Poměr hmotností $\frac{m_0}{m_f}$ (uvnitř logaritmu)**: * m_0 je **počáteční startovní hmotnost** (raketa + plné nádrže paliva + užitečný náklad). * m_f je **konečná suchá hmotnost** (raketa po vyhoření paliva + užitečný náklad). * Tento poměr musí být co největší. V praxi tvoří palivo typicky **90 až 95 % celkové hmotnosti celé rakety při startu**!

Proč musíme stavět vícestupňové rakety?

Představte si raketu s plnými nádržemi o hmotnosti 100 tun, z čehož 90 tun je palivo a 10 tun prázdná konstrukce a náklad (poměr $m_0/m_f = 100/10 = 10$). Když motor spálí polovinu paliva, veze s sebou stále obrovské ocelové nádrže, které jsou napůl prázdné a zbytečně váží tuny.

Proto geniální nápad vícestupňových raket spočívá v **odhazování prázdných nádrží**: Jakmile první stupeň vyhoří, celá těžká konstrukce se odhodí do oceánu. Druhý stupeň se zažehne s mnohem menší hmotností a získá další obrovskou porci Δv . Celková kapacita rakety je prostým součtem jednotlivých stupňů:

$$\Delta v_{celk} = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3$$

Řešený příklad 8.1: Výpočet kapacity Δv druhého stupně rakety Falcon 9

Vstupní data:

- Suchá hmotnost stupně: $m_{sucha} = 4\,000 \text{ kg}$
- Hmotnost nákladu (družice): $m_{naklad} = 5\,500 \text{ kg}$
- Hmotnost natankovaného paliva: $m_{palivo} = 92\,500 \text{ kg}$
- Specifický impuls motoru Merlin Vacuum: $I_{sp} = 348 \text{ s}$

Výpočet krok za krokem:

1. Výtoková rychlost spalín:

$$v_e = I_{sp} \cdot g_0 = 348 \cdot 9,80665 \approx \mathbf{3\,412,7 \text{ m/s}}$$

1. Určení počáteční hmotnosti m_0 a konečné hmotnosti m_f :

$$m_f = m_{sucha} + m_{naklad} = 4\,000 + 5\,500 = \mathbf{9\,500 \text{ kg}}$$

$$m_0 = m_f + m_{\text{palivo}} = 9\,500 + 92\,500 = 102\,000 \text{ kg}$$

1. Poměr hmotností:

$$\frac{m_0}{m_f} = \frac{102\,000}{9\,500} \approx 10,737$$

1. Přirozený logaritmus:

$$\ln(10,737) \approx 2,3737$$

1. Výsledná změna rychlosti Δv :

$$\Delta v = 3\,412,7 \cdot 2,3737 \approx 8\,101 \text{ m/s} \approx 8,10 \text{ km/s}$$

Druhý stupeň sám o sobě dokáže družici urychlit o více než 8 km/s!

8.2 Co je to Δv : Kosmická peněženka

Ve vesmíru vzdálenosti nehrají hlavní roli. Rozhodující je, kolik máte k dispozici Δv . Představte si Δv jako **peníze na bankovním účtu**:

- Každý zážeh motoru stojí určitou částku Δv .
- Dostat se ze zemského povrchu na nízkou dráhu LEO stojí přibližně 9 400 m/s (z toho 7 800 m/s je samotná oběžná rychlost a zbytek padne na překonání gravitace a odporu vzduchu).
- Jakmile jste na nízké dráze LEO, máte to nejtěžší za sebou – jste v „polovině cesty kamkoli ve Sluneční soustavě“!
- Pro cestu z LEO k Měsíci stačí dalších 3 150 m/s.
- Pro cestu z LEO k Marsu stačí dalších 3 600 m/s.

8.3 Jak se řídí lod': Zrychlení, brzdění a změna sklonu

V prostoru definujeme tři základní směry zážehů:

1. **Prográdní zážeh (ve směru letu)**: Zrychlí lod' dopředu. Bod zážehu zůstane na stejné výšce (stane se perigeem) a **protilehlá strana dráhy na opačné straně planety stoupne vzhůru**.
2. **Retrográdní zážeh (proti směru letu – brzdění)**: Zpomalí lod'. Bod zážehu zůstane na stejné výšce a **protilehlá strana dráhy klesne dolů** (používá se k návratu z oběžné dráhy do atmosféry).
3. **Normálový zážeh (kolmo k rovině dráhy)**: Mění sklon dráhy (inklinaci).

Matematika změny sklonu dráhy: Nejdražší manévr ve vesmíru

Změna sklonu oběžné dráhy o úhel Δi při zachování stejné rychlosti v se počítá podle vzorce:

$$\Delta v = 2 \cdot v \cdot \sin\left(\frac{\Delta i}{2}\right)$$

Řešený příklad 8.2: Proč se změna sklonu dráhy dělá zásadně v apogeu?

Zadání: Družice odstartovala z mysu Canaveral na Floridě a obíhá pod sklonem $i = 28,5^\circ$. Pro geostacionární dráhu však potřebujeme sklon 0° (změna o $\Delta i = 28,5^\circ$).

1. Vypočítejte Δv , pokud manévr provedeme na nízké dráze LEO, kde je rychlost $v = 7\,750 \text{ m/s}$.
2. Vypočítejte Δv , pokud družici pošleme na protáhlou přechodovou elipsu a manévr provedeme v jejím apogeu ve výšce 35 786 km, kde její rychlost klesne na pouhých $v = 1\,600 \text{ m/s}$.

Výpočet:1. Na nízké dráze LEO ($v = 7\,750\text{ m/s}$):

$$\frac{\Delta i}{2} = \frac{28,5^\circ}{2} = 14,25^\circ \implies \sin(14,25^\circ) \approx 0,24615$$

$$\Delta v_{LEO} = 2 \cdot 7\,750 \cdot 0,24615 \approx \mathbf{3\,815\text{ m/s}}$$

1. V apogeu přechodové dráhy ($v = 1\,600\text{ m/s}$):

$$\Delta v_{apo} = 2 \cdot 1\,600 \cdot 0,24615 \approx \mathbf{788\text{ m/s}}$$

1. Úspora:

$$\Delta v_{uspora} = 3\,815 - 788 = \mathbf{3\,027\text{ m/s!}}$$

Zlaté pravidlo kosmonautiky: Protože ve vzorci vystupuje rychlost v v první mocnině, změna sklonu dráhy je tím levnější, čím pomaleji se loď pohybuje. Proto se změna roviny provádí **vždy v nejvyšším a nejpomalejším bodě dráhy (v apogeu)**! Tímto jednoduchým trikem ušetříme přes 3 000 m/s paliva, což představuje desítky tun ušetřené hmotnosti rakety při startu.

☒ **SHRNUTÍ: CO SI Z TÉTO KAPITOLY ODNĚT**

- **Pohyb ve vakuu:** Raketový motor funguje na principu akce a reakce vyhazováním spalín vysokou rychlostí (3 až 4,5 km/s).
- **Tsiolkovského rovnice** ($\Delta v = I_{sp} g_0 \ln(m_0/m_f)$): Rychlost rakety závisí na specifickém impulsu a logaritmu poměru hmotností. Palivo musí tvořit přes 90 % váhy rakety, což si vynucuje vícestupňovou konstrukci.
- **Měna Δv :** Na oběžnou dráhu LEO potřebujeme cca 9 400 m/s, odtud k Měsíci dalších 3 150 m/s.
- **Změna sklonu dráhy:** Provádí se zásadně v apogeu při nejnížší oběžné rychlosti, což ušetří obrovské množství paliva.

Kapitola 9: Cestování mezi orbitami: Přechodové trajektorie a startovací okna

Když se podíváme na mapu vnitřní Sluneční soustavy, vzdálenost mezi oběžnými drahami Země a Marsu se v okamžiku nejtěsnějšího přiblížení (v opozici) zmenší na pouhých 55 milionů kilometrů. Přirozená lidská intuice zvyklá na pozemskou dopravu by velela: „Počkejme, až bude Mars Zemi nejbližší, otočme raketu přímo k němu, zapneme motory na plný tah a leťme nejkratší možnou přímoú čarou!“

V kosmonautice by však takový pokus skončil neodvratnou katastrofou. Kdybyste vystřelili kosmickou loď přímočaře k Marsu, spotřebovali byste gigantické množství paliva a v cíli své cesty byste našli pouze prázdný černý vesmír. Mars by se totiž mezitím posunul o stovky milionů kilometrů dále po své vlastní oběžné dráze.

Létání mezi oběžnými drahami i mezi planetami se nepodobá jízdě autem po rovné silnici, nýbrž střelbě na pohyblivý cíl z točícího se kolotoče. V této kapitole odvodíme nejúspornější energetickou dálnici vesmíru – **Hohmannovu přechodovou elipsu**, prozkoumáme alternativní **bi-eliptický přechod** a odhalíme matematiku **synodických period a startovacích oken**.

9.1 Hohmannova přechodová elipsa: Matematické odvození

V roce 1925 publikoval německý stavební inženýr a vizionář Walter Hohmann přelomové dílo *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper* (Dosažitelnost nebeských těles). V něm matematicky dokázal, že nejméně energeticky náročný způsob, jak přestoupit mezi dvěma soustřednými kruhovými drahami ležícími v téže rovině, je **poloelipsa, která se obou kružnic tečně dotýká**.

“Cílová dráha r_2 (např. GEO nebo Mars) ' Δv_2 ' . / \ / \ \ (Apocentrum) | | / \ | | / \ | | + | | Centrální těleso (Země / Slunce) | \ | | \ | | (Pericentrum) | \ ^ / \ | . ' Δv_1 ' Výchozí dráha r_1 (např. LEO nebo Země) ”

Uvažujme výchozí kruhovou dráhu o poloměru r_1 a cílovou kruhovou dráhu o poloměru r_2 kolem centrálního tělesa s gravitačním parametrem μ (předpokládejme $r_2 > r_1$).

Geometrie přechodové elipsy

Přechodová trajektorie má:

- Pericentrum na výchozí dráze: $r_p = r_1$
- Apocentrum na cílové dráze: $r_a = r_2$
- Velkou poloosu:

$$a_{trans} = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

- Numerickou excentricitu:

$$e_{trans} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

K uskutečnění celého přestupu postačují právě **dva krátké impulzivní tečné zážehy**:

1. První impuls v pericentru (Δv_1)

Původní kruhová rychlost na výchozí dráze o poloměru r_1 je:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$$

Rychlost potřebná v pericentru přechodové elipsy se určí z rovnice Vis-Viva:

$$v_{t1} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_{trans}} \right)} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_2} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1} \left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}}$$

První urychlovací zážeh motoru zvýší rychlost o hodnotu:

$$\Delta v_1 = v_{t1} - v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right)$$

Tento zážeh promění původní kružnici v elipsu, jejíž apocentrum dosahuje přesně do výšky cílové dráhy r_2 .

2. Druhý impuls v apocentru (Δv_2)

Kosmická loď po volném gravitačním letu dospěje do apocentra. Vlivem gravitačního zpomalování zde její rychlost klesne na hodnotu:

$$v_{t2} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_{trans}} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}$$

Cirkulární oběžná rychlost na cílové dráze r_2 je však vyšší:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}$$

K zakulacení elipsy na finální kružnici musí motor provést druhý prográdní zážeh:

$$\Delta v_2 = v_2 - v_{t2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right)$$

Celkový rychlostní rozpočet a doba přeletu

Celková potřebná kapacita rychlosti mise je součtem obou impulsů:

$$\Delta v_{celk} = \Delta v_1 + \Delta v_2$$

Doba letu t_{trans} odpovídá přesně **polovině orbitální periody** přechodové elipsy podle 3. Keplerova zákona:

$$t_{trans} = \frac{T_{trans}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{a_{trans}^3}{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{a_{trans}^3}{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{8\mu}}$$

9.2 Bi-eliptický přechod (Sternfeldův přechod)

V roce 1934 publikoval sovětský průkopník kosmonautiky Ary Sternfeld překvapivé zjištění: Hohmannova elipsa nemusí být vždy energeticky nejvýhodnější! Pro velké změny orbitálního poloměru existuje úspornější alternativa: **tříimpulzový bi-eliptický přechod**.

`` Pomocné apocentrum  $r_b$  (velmi daleko) . . . . '  $\Delta v_2$  ' . / | | V | | (První přechodová) | | (elipsa:  $r_1 \rightarrow r_b$ ) | | | + (Centrum) | | (Druhá přechodová) | | (elipsa:  $r_b \rightarrow r_2$ ) | \ ^ / . '  $\Delta v_1$  ' . . . . .  $r_1 r_2$  ``

Mechanismus bi-eliptického přestupu

Místo přímého přechodu z r_1 na r_2 vyšleme loď nejprve na velmi protáhlou elipsu s pomocným apocentrem r_b , které leží **mnohem dále než cílová dráha** ($r_b > r_2$):

1. **První impuls Δv_1 v r_1 :** Navede loď na první elipsu s pericentrem r_1 a apocentrem r_b ($a_1 = \frac{r_1 + r_b}{2}$).
2. **Druhý impuls Δv_2 v apocentru r_b :** Ve vzdáleném apocentru je rychlost lodi extrémně malá. I velmi malý impuls Δv_2 zde dramaticky zvedne pericentrum z r_1 na cílový poloměr r_2 ($a_2 = \frac{r_2 + r_b}{2}$).

3. **Třetí impuls Δv_3 v pericentru r_2 :** Po návratu do nového pericentra r_2 provede loď brzdící zážeh, kterým zakulatí dráhu na poloměr r_2 .

Jednotlivé impulsy jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned}\Delta v_1 &= \sqrt{\frac{2\mu r_b}{r_1(r_1 + r_b)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \\ \Delta v_2 &= \sqrt{\frac{2\mu r_2}{r_b(r_2 + r_b)}} - \sqrt{\frac{2\mu r_1}{r_b(r_1 + r_b)}} \\ \Delta v_3 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{\frac{2\mu r_b}{r_2(r_2 + r_b)}} \\ \Delta v_{bi} &= \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3\end{aligned}$$

Kdy je bi-eliptický přechod výhodnější?

Porovnání celkového Δv_{bi} s Hohmannovým $\Delta v_{Hohmann}$ závisí výhradně na poměru poloměrů $R = \frac{r_2}{r_1}$:

1. **Oblast $R < 11,94$:** Pro jakýkoli poměr poloměrů menší než 11,94 je **Hohmannův přechod vždy nepřekonatelně nejvýhodnější**. Pro přechod LEO $\rightarrow$ GEO ($R \approx 6,3$) je Hohmann jasnou volbou.
2. **Oblast $11,94 < R < 15,58$:** Bi-eliptický přechod může být výhodnější než Hohmann, ale pouze za podmínky, že pomocné apocentrum r_b zvolíme dostatečně velké ($r_b/r_1 > R^*$).
3. **Oblast $R > 15,58$:** Pokud je cílová dráha více než 15,58krát větší než výchozí, **bi-eliptický přechod je VŽDY energeticky úspornější než Hohmannův přechod** pro jakékoli $r_b > r_2$!

Daň za úsporu paliva: Zatímco teoretická úspora Δv může činit několik procent, celková doba letu vzroste **několikanásobně až řádově**, protože loď musí putovat do obrovských vzdáleností r_b a zpět.

9.3 Synodická perioda a geometrie startovacích oken

Při letech mezi planetami nestačí pouze dosáhnout dráhy cílové planety – planeta se v okamžiku přiletu lodi musí v daném bodě fyzicky nacházet!

Protože vnitřní planety obíhají kolem Slunce rychleji než vnější planety, vzájemná geometrická konfigurace dvou těles se neustále mění.

Synodická perioda (S)

Doba, za kterou se zopakuje identické vzájemné postavení dvou planet vůči Slunci (např. dvě po sobě jdoucí opozice), se nazývá **synodická perioda**.

Jestliže těleso 1 má orbitální periodu P_1 a těleso 2 periodu P_2 , jejich úhlové rychlosti jsou $\omega_1 = \frac{2\pi}{P_1}$ a $\omega_2 = \frac{2\pi}{P_2}$. Relativní úhlová rychlost činí:

$$\omega_{rel} = |\omega_1 - \omega_2| = 2\pi \left| \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right|$$

Synodická perioda S je doba, za kterou se relativní úhel změní o celých 360° (2π rad):

$$\frac{1}{S} = \left| \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right| \implies S = \frac{P_1 \cdot P_2}{|P_2 - P_1|}$$

Fázovací úhel při startu (α)

Aby se kosmická loď po Hohmannově poloelipse setkala s cílovou planetou, musí planeta během doby přeletu t_{trans} dorazit přesně do bodu apocentra.

Přechodová poloelipsa opisuje úhel přesně 180° (π radiánů). Během doby letu t_{trans} urazí cílová planeta úhel:

$$\beta = \omega_2 \cdot t_{trans} = \frac{2\pi}{P_2} \cdot t_{trans}$$

Aby se obě tělesa setkala, musí se cílová planeta v okamžiku startu nacházet pod **fázovacím úhlem** α před výchozí planetou:

$$\alpha = \pi - \beta = \pi - \omega_2 \cdot t_{trans} = 180^\circ - \left(\frac{360^\circ}{P_2} \cdot t_{trans} \right)$$

Pokud startovní okno zmeškáte, další možnost startu se otevře až po uplynutí celé synodické periody S !

HYPERBOLICKÝ PŘEBYTEK RYCHLOSTI A CHARAKTERISTICKÁ ENERGIE C_3

Při startu meziplanetární sondy ze zemského povrchu nestačí dosáhnout 2. kosmické rychlosti ($v_{esc} \approx 11,2 \text{ km/s}$). Sonda musí opustit gravitační sféru vlivu Země (SOI) s nenulovou zůstatkovou rychlostí vůči Zemi – tzv. *hyperbolickým přebytkem rychlosti* v_∞ . Výkonnost nosných raket se pro meziplanetární lety neudává v tunách na LEO, nýbrž v *charakteristické energii* C_3 :

$$C_3 = v_\infty^2 = (\Delta v_1)^2$$

Pro dosažení Marsu po Hohmannově trajektorii je zapotřebí $C_3 \approx 9$ až $15 \text{ km}^2/\text{s}^2$, pro let k Jupiteru $C_3 \approx 80$ až $100 \text{ km}^2/\text{s}^2$.

Veličina	Symbol	Jednotka	Fyzikální význam v přechodové trajektorii
Výchozí poloměr	r_1	km / AU	Poloměr výchozí kruhové dráhy (např. LEO nebo oběžná dráha Země)
Cílový poloměr	r_2	km / AU	Poloměr cílové kruhové dráhy (např. GEO nebo oběžná dráha Marsu)
Velká poloosa přechodu	a_{trans}	km / AU	Střední rozměr přechodové elipsy ($a_{trans} = (r_1 + r_2)/2$)
První impuls	Δv_1	m/s / km/s	Zážeh v pericentru k navedení na přechodovou elipsu
Druhý impuls	Δv_2	m/s / km/s	Zážeh v apocentru k cirkularizaci dráhy na poloměr r_2
Doba přeletu	t_{trans}	s / dny	Doba letu po polovině přechodové elipsy ($T_{trans}/2$)
Synodická perioda	S	dny / roky	Doba mezi dvěma identickými konstelacemi planet (interval startovacích oken)
Fázovací úhel	α	deg (°)	Vzájemný úhel planet při startu nutný k přesnému rendezvous

9.4 Řešené výpočetní příklady

Řešený příklad 9.1: Kompletní výpočet přechodu LEO na GEO

Zadání: Družice se nachází na nízké parkovací dráze LEO ve výšce $h_1 = 300 \text{ km}$ nad zemským povrchem ($r_1 = 6\,671 \text{ km}$ při poloměru Země $R_\oplus = 6\,371 \text{ km}$). Cílem je převést družici na geostacionární oběžnou dráhu GEO s poloměrem $r_2 = 42\,164 \text{ km}$. Gravitační parametr Země uvažujte $\mu_\oplus = 398\,600,44 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

1. Vypočítejte velkou poloosu a_{trans} a excentricitu e_{trans} přechodové dráhy (GTO).
2. Vypočítejte velikost prvního urychlovacího impulsu Δv_1 .
3. Vypočítejte velikost druhého cirkularizačního impulsu Δv_2 .
4. Vypočítejte celkový rozpočet Δv_{celk} a dobu trvání přeletu t_{trans} .

Postup výpočtu: 1. Parametry přechodové elipsy GTO:

$$a_{trans} = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{6\,671 + 42\,164}{2} = \frac{48\,835}{2} = 24\,417,5 \text{ km}$$

$$e_{trans} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \frac{42\,164 - 6\,671}{48\,835} = \frac{35\,493}{48\,835} \approx 0,7268$$

2. První impuls v perigeu (Δv_1): Rychlost na výchozí kruhové dráze LEO:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_1}} = \sqrt{\frac{398\,600,44}{6\,671}} = \sqrt{59,75123} \approx \mathbf{7,730\ km/s = 7\,730\ m/s}$$

(Při dosažení $v_1 = 7\,726\ \text{m/s}$ pro přesný model): Rychlost v perigeu přechodové elipsy:

$$v_{t1} = \sqrt{\mu_{\oplus} \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_{trans}} \right)} = \sqrt{398\,600,44 \cdot \left(\frac{2}{6\,671} - \frac{1}{24\,417,5} \right)} = \sqrt{398\,600,44 \cdot (0,000299805 - 0,000040954)}$$

$$v_{t1} = \sqrt{398\,600,44 \cdot 0,000258851} = \sqrt{103,178} \approx \mathbf{10,158\ km/s = 10\,158\ m/s}$$

První impuls:

$$\Delta v_1 = v_{t1} - v_1 = 10\,158 - 7\,730 = \mathbf{2\,428\ m/s}$$

3. Druhý impuls v apogeu (Δv_2): Rychlost v apogeu přechodové elipsy:

$$v_{t2} = \sqrt{\mu_{\oplus} \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_{trans}} \right)} = \sqrt{398\,600,44 \cdot \left(\frac{2}{42\,164} - \frac{1}{24\,417,5} \right)} = \sqrt{398\,600,44 \cdot (0,000047434 - 0,000040954)}$$

$$v_{t2} = \sqrt{398\,600,44 \cdot 0,000006480} = \sqrt{2,5829} \approx \mathbf{1,607\ km/s = 1\,607\ m/s}$$

Kruhová rychlost na geostacionární dráze GEO:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_2}} = \sqrt{\frac{398\,600,44}{42\,164}} = \sqrt{9,45357} \approx \mathbf{3,075\ km/s = 3\,075\ m/s}$$

Druhý impuls:

$$\Delta v_2 = v_2 - v_{t2} = 3\,075 - 1\,607 = \mathbf{1\,468\ m/s}$$

4. Celkový rozpočet Δv_{celk} a doba přeletu:

$$\Delta v_{celk} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 2\,428 + 1\,468 = \mathbf{3\,896\ m/s}$$

Doba přeletu:

$$t_{trans} = \pi \sqrt{\frac{a_{trans}^3}{\mu_{\oplus}}} = \pi \sqrt{\frac{(24\,417,5)^3}{398\,600,44}} = \pi \sqrt{\frac{1,45579 \times 10^{13}}{398\,600,44}} = \pi \sqrt{36\,522\,540} = \pi \cdot 6\,043,39 \approx \mathbf{18\,985,7\ s}$$

Přepočet na hodiny a minuty:

$$t_{trans} = \frac{18\,985,7}{3\,600} \approx 5,2738\ \text{h} = \mathbf{5\ hodín\ 16\ minut\ 25\ sekund \approx 5\ h\ 16\ min}$$

Řešený příklad 9.2: Kompletní výpočet letu k Marsu

Zadání: Plánujeme meziplanetární misi k Marsu po heliocentrické Hohmannově přechodové elipse. Předpokládejme kruhové koplanární dráhy:

- Vzdálenost Země od Slunce: $r_1 = 1,000\ \text{AU}$ ($P_1 = 365,25\ \text{dne} = 1,000\ \text{roku}$)
- Vzdálenost Marsu od Slunce: $r_2 = 1,524\ \text{AU}$ ($P_2 = 686,98\ \text{dne} = 1,881\ \text{roku}$)

- Vypočítejte velkou poloosu přechodové elipsy a_{trans} .
- Vypočítejte celkovou dobu trvání letu k Marsu t_{trans} ve dnech.
- Vypočítejte synodickou periodu S (interval mezi startovacími okny).
- Vypočítejte požadovaný fázovací úhel Marsu vůči Zemi při startu α .

Postup výpočtu: 1. Velká poloosa přechodové elipsy:

$$a_{trans} = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{1,000 + 1,524}{2} = \frac{2,524}{2} = 1,262 \text{ AU}$$

2. Doba přeletu podle 3. Keplerova zákona: V astronomických jednotkách (AU) a pozemských letech (rok) platí jednoduchý vztah $T = a^{3/2}$. Doba přeletu tvoří polovinu oběhu:

$$t_{trans} = \frac{1}{2} \cdot a_{trans}^{3/2} = \frac{1}{2} \cdot (1,262)^{1,5} = \frac{1}{2} \cdot 1,41738 \approx 0,70869 \text{ roku}$$

Přepočet na pozemské dny:

$$t_{trans} = 0,70869 \cdot 365,25 \approx 258,85 \text{ dne} \approx 259 \text{ dní}$$

Cesta k Marsu po nejúspornější Hohmannově trajektorii trvá přibližně **8 a půl měsíce** (259 dní). **3. Synodická perioda (frekvence startovacích oken):**

$$\frac{1}{S} = \left| \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right| = \frac{1}{365,25} - \frac{1}{686,98} \approx 0,00273785 - 0,00145565 = 0,00128220 \text{ dne}^{-1}$$

$$S = \frac{1}{0,00128220} \approx 779,9 \text{ dne} \approx 780 \text{ dní}$$

Přepočet na měsíce:

$$S \approx \frac{780}{30,44} \approx 25,6 \text{ měsíce} \approx 26 \text{ měsíců}$$

Startovací okno k Marsu se otevírá pouze jednou za **26 měsíců** (cca každé 2 roky a 2 měsíce). **4. Požadovaný fázovací úhel při startu (α):** Denní úhlová rychlost pohybu Marsu po jeho oběžné dráze:

$$\omega_2 = \frac{360^\circ}{P_2} = \frac{360^\circ}{686,98} \approx 0,524033^\circ/\text{den}$$

Během 258,85 dne letu naší sondy urazí Mars dráhu:

$$\beta = \omega_2 \cdot t_{trans} = 0,524033^\circ \cdot 258,85 \approx 135,65^\circ \approx 135,7^\circ$$

Protože loď dospěje do apocentra po úhlu 180° , musí být Mars v okamžiku startu v úhlové pozici:

$$\alpha = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 135,65^\circ = 44,35^\circ \approx 44,3^\circ$$

Fyzikální závěr mise: Raketa nesmí startovat v okamžiku, kdy je Mars Zemi nejbližší! Kosmická sonda musí odstartovat přesně ve chvíli, kdy se Mars na obloze nachází **44,3° napřed před Zemí**. Během 259 dní letu sonda opíše půlelipsu o 180° , Mars se posune o $135,7^\circ$ a obě tělesa se v apocentru elipsy setkají s centimetrovou přesností.

SHRNUTÍ: CO SI Z TĚTO KAPITOLY ODNĚST

- **Hohmannova přechodová elipsa:** Energeticky optimální dvouimpulzový přestup mezi soustřednými kružnicemi. Skládá se ze zážehu v pericentru (Δv_1) a cirkularizace v apocentru (Δv_2). Doba přeletu činí $t_{trans} = \pi \sqrt{a_{trans}^3 / \mu}$.
- **Bi-eliptický přechod:** Tříimpulzový manévř využívající velmi vzdálené apocentrum r_b . Je energeticky výhodnější než Hohmann pro poměry poloměrů $r_2/r_1 > 15,58$, avšak za cenu dramaticky delší doby letu.
- **Synodická perioda ($S = \frac{P_1 P_2}{|P_2 - P_1|}$):** Doba mezi opakujícími se geometrickými konfiguracemi dvou planet. Diktuje časový odstup mezi startovacími okny (k Marsu 780 dní).
- **Fázovací úhel ($\alpha = \pi - \omega_2 t_{trans}$):** Přesný relativní úhel, který musí cílová planeta svírat se startující planetou v okamžiku zážehu. Pro Mars činí přesně $44,3^\circ$.

Kapitola 10: Gravitační prak: Jak sondy kradou energii planetám

Když v 70. letech 20. století inženýři americké NASA a evropské ESA plánovali první výpravy k vnějším plynným obrům Sluneční soustavy – k Jupiteru, Saturnu, Uranu a Neptunu – i k žhavému Merkuru v nitru sluneční soustavy, narazili na zdánlivě nepřekonatelnou technickou bariéru.

Podle Tsiolkovského raketové rovnice by k vynesení velké vědecké sondy přímo k Neptunu nebo Saturnu byla zapotřebí gigantická raketa o rozměrech mrakodrapu, která by nesla desítky tisíc tun paliva. I v případě postavení takového monstra by samotná cesta trvala přes 30 let. Žádná taková raketa neexistovala a rozpočty vlád byly omezené.

Přesto se v srpnu 1977 vydala na cestu slavná sonda **Voyager 2** o hmotnosti 722 kg, vynesená tehdy běžnou raketou Titan III E / Centaur. A k nejvzdálenější planetě Neptun dorazila za pouhých **12 let!** Podobně v roce 2006 odstartovala k Plutu sonda **New Horizons**, která k trpasličí planetě doletěla za necelých 9 a půl roku.

Jak byl tento zázrak možný? Odpovědí je nejgeniálnější navigační technika v celé historii kosmonautiky: **gravitační asistence (gravitační prak – Gravity Assist)**. Kosmické sondy se naučily bez použití jediného gramu paliva „krást“ oběžnou kinetickou energii obřím planetám a využívat jejich gravitační pole jako obří kosmický prak.

10.1 Fyzikální podstata a vektorový rozbor gravitačního praku

Na první pohled působí gravitační asistence jako porušení zákona zachování energie: jak může kosmická loď zvýšit svou rychlost o několik kilometrů za sekundu pouhým průletem kolem planety s naprosto vypnutými motory?

Klíčem k rozřešení tohoto zdánlivého paradoxu je **přísné rozlišení dvou vztažných soustav**:

- 1. Planetocentrická soustava (spojená s letící planetou):** Vzhledem ke středu planety je její gravitační pole stacionární a konzervativní.
- 2. Heliocentrická soustava (spojená se Sluncem):** Planeta se v ní sama řítí vesmírem obrovskou oběžnou rychlostí $\vec{V}_p$ (Země rychlostí 29,8 km/s, Jupiter rychlostí 13,1 km/s).

''' Slunce (Heliocentrická soustava) | | V Planeta obíhá rychlostí V_p -----> Přílet sondy: O (Planeta) Odlet sondy: $v_1 = V_p + v_{\text{inf}, \text{in}}$ / $v_2 = V_p + v_{\text{inf}, \text{out}}$ / δ (Stočení o úhel ohybu δ) ----- Hyperbolický průlet (rp) '''

Analogie s pružným odrazem od rozjetého vlaku

Představme si těžkou lokomotivu jedoucí po kolejích rychlostí $V_{\text{vlak}} = 100 \text{ km/h}$. Proti ní stojí sportovec a hodí proti čelu vlaku tenisový míček rychlostí $v_{\text{míček}} = 30 \text{ km/h}$:

- 1. Z pohledu strojvedoucího v lokomotivě:** Míček přiletá relativní rychlostí $100 + 30 = 130 \text{ km/h}$. Při dokonale pružném odrazu od masivního ocelového nárazníku se míček odrazí zpět opět rychlostí 130 km/h . Z pohledu vlaku míček nezískal ani neztratil ani jediný km/h rychlosti!
- 2. Z pohledu diváka na nástupišti:** Míček letěl doprava rychlostí 30 km/h . Po odrazu se pohybuje doleva rychlostí odrazu (130 km/h) **plus rychlostí samotné jedoucí lokomotivy** (100 km/h)! Výsledná rychlost míčku vůči nástupišti činí neuvěřitelných:

$$v_{\text{výsledná}} = v_{\text{odraz}} + V_{\text{vlak}} = 130 + 100 = \mathbf{230 \text{ km/h}}$$

Míček získal obrovskou kinetickou energii. Kde se vzala? Ukradl ji rozjeté lokomotivě! Lokomotiva se při nárazu mikroskopicky zpomalila, avšak protože je její hmotnost mnohamiliardkrát větší než hmotnost míčku, toto zpomalení je v praxi naprosto neměřitelné.

Při gravitačním praku představuje lokomotivu planeta obíhající kolem Slunce a tenisový míček kosmická sonda. Místo mechanického nárazníku se o pružný odraz postará neviditelná síla – **gravitační pole planety**.

Vektorový aparát v planetocentrické a heliocentrické soustavě

Označme:

- $\vec{V}_p$ – vektor orbitální rychlosti planety kolem Slunce,
- $\vec{v}_1$ – vektor heliocentrické rychlosti sondy před vstupem do sféry gravitačního vlivu planety,
- $\vec{v}_2$ – vektor heliocentrické rychlosti sondy po opuštění sféry vlivu planety.

Asymptotická vstupní rychlost sondy vůči planetě (tzv. *hyperbolický přebytek rychlosti*) je dána vektorovým rozdílem:

$$\vec{v}_{\infty, in} = \vec{v}_1 - \vec{V}_p$$

Ze zákona zachování mechanické energie v gravitačním poli planety plyne naprosto zásadní rovnost: velikost výstupní relativní rychlosti $\vec{v}_{\infty, out}$ je **přesně rovna velikosti rychlosti vstupní**:

$$|\vec{v}_{\infty, in}| = |\vec{v}_{\infty, out}| = v_{\infty} = \text{konst.}$$

Gravitační pole planety nedokáže změnit velikost rychlosti v_{∞} , **dokáže však otočit její směr o úhel ohybu δ** !

Výsledná rychlost sondy vůči Slunci po opuštění planety je dána zpětnou transformací:

$$\vec{v}_2 = \vec{V}_p + \vec{v}_{\infty, out}$$

Celková změna heliocentrické rychlosti lodi je:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (\vec{V}_p + \vec{v}_{\infty, out}) - (\vec{V}_p + \vec{v}_{\infty, in}) = \vec{v}_{\infty, out} - \vec{v}_{\infty, in}$$

Velikost tohoto vektoru $\Delta \vec{v}$ představuje čistý rychlostní zisk, který sonda získala bez zapnutí motoru:

$$|\Delta \vec{v}| = 2 \cdot v_{\infty} \cdot \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

10.2 Geometrie hyperbolického průletu a úhel ohybu trajektorie

Průlet sondy sférou vlivu planety probíhá po otevřené rovině kuželosečce – **hyperbole**.

Polární rovnice hyperboly se středem v ohnisku (těžišti planety) má tvar:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e_{hyp} \cos \theta}$$

kde $e_{hyp} > 1$ je numerická excentricita hyperboly. Vzdálenost nejtěsnějšího přiblížení v pericentru r_p je:

$$r_p = \frac{p}{1 + e_{hyp}} = a_{hyp}(e_{hyp} - 1)$$

kde a_{hyp} je reálná poloosa hyperboly daná zákonem zachování energie:

$$\mathcal{E} = \frac{v_{\infty}^2}{2} = \frac{\mu_p}{2a_{hyp}} \implies a_{hyp} = \frac{\mu_p}{v_{\infty}^2}$$

Dosazením a_{hyp} vyjádříme excentricitu hyperboly přímo pomocí fyzikálních parametrů průletu:

$$e_{hyp} = 1 + \frac{r_p}{a_{hyp}} = 1 + \frac{r_p \cdot v_{\infty}^2}{\mu_p}$$

Asymptoty hyperboly udávají směr příletu a odletu sondy v nekonečnu. Úhel asymptoty θ_{∞} splňuje podmínku $r \rightarrow \infty$, tedy $1 + e_{hyp} \cos \theta_{\infty} = 0$:

$$\cos \theta_{\infty} = -\frac{1}{e_{hyp}}$$

Celkový úhel stočení vektoru rychlosti δ (úhel ohybu) je doplňkem do přímého úhlu:

$$\delta = 2\theta_\infty - 180^\circ$$

S využitím goniometrického vztahu $\cos \theta_\infty = -\sin(\delta/2)$ získáme klíčovou rovnici nebeské mechaniky pro **úhel ohybu gravitačního praku**:

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{e_{hyp}} = \frac{1}{1 + \frac{r_p \cdot v_\infty^2}{\mu_p}}$$

Geometrie průletu: Urychlení, brzdění a změna sklonu

Změna heliocentrické rychlosti závisí na tom, kudy přesně sonda kolem planety proletí:

1. **Urychlovací manévř (Gravity Boost):** Sonda je navedena tak, aby proletěla **za planetou** (kříží oběžnou dráhu za tělesem ve směru jeho pohybu). Planeta svou gravitací přitahuje sondu ve směru svého oběhu. Výsledný vektor $\vec{v}_{\infty, out}$ se natočí více do směru $\vec{V}_p$ a heliocentrická rychlost sondy výrazně vzroste ($|\vec{v}_2| > |\vec{v}_1|$). Sonda vystoupá do vnějších oblastí Sluneční soustavy.
2. **Brzdící manévř (Gravity Brake):** Sonda proletí **před planetou** (kříží dráhu před čelem planety). Gravitační tahne sondu proti směru jejího heliocentrického letu. Rychlost vůči Slunci poklesne ($|\vec{v}_2| < |\vec{v}_1|$), což umožní sondě propadnout hlouběji k vnitřním planetám (Venuše, Merkur, Slunce).
3. **Změna sklonu dráhy (Out-of-Plane Assist):** Pokud sonda proletí vysoko nad severním nebo pod jižním pólem planety, vektor $\Delta \vec{v}$ získá obrovskou vertikální složku kolmou k rovině ekliptiky. Příkladem je evropská sonda **Ulysses**, která po průletu nad pólem Jupitera v roce 1992 opustila rovinu planet a vstoupila na polární dráhu kolem Slunce se sklonem $i = 80,2^\circ$.

10.3 Powered Gravity Assist (Kombinovaný Oberthův průlet)

Co se stane, pokud kosmická sonda při gravitačním průletu nespočítá pouze na pasivní gravitační tah, ale v okamžiku nejtěsnějšího přiblížení v pericentru r_p zažehne své vlastní raketové motory?

V pericentru hyperboly dosahuje rychlost sondy vůči planetě absolutního maxima:

$$v_p = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_p}{r_p}}$$

Jestliže v tomto bodě motor udělí impuls Δv_{boost} ve směru letu, nová rychlost v pericentru bude $v'_p = v_p + \Delta v_{boost}$. Z rovnice zachování energie získáme novou asymptotickou odletovou rychlost $v'_{\infty, out}$:

$$\frac{(v'_{\infty, out})^2}{2} = \frac{(v'_p)^2}{2} - \frac{\mu_p}{r_p} = \frac{(v_p + \Delta v_{boost})^2}{2} - \frac{\mu_p}{r_p}$$

Díky **Oberthovu efektu** se malý zážeh motoru v hluboké gravitační jámě planety transformuje do obrovského nárůstu kinetické energie v nekonečno. Tento kombinovaný manévř (tzv. *Powered Flyby*) představuje nejúčinnější známou metodu urychlení meziplanetárních těles.

LAPLACEOVA SFÉRA GRAVITAČNÍHO VLIVU (SPHERE OF INFLUENCE – SOI)

Při výpočtu meziplanetárních trajektorií dělíme prostor metodou *záplatovaných kuželoseček* (Patched Conics). Přechod z heliocentrické trajektorie na hyperbolický průlet kolem planety nastává na hranici sféry vlivu (SOI), jejíž poloměr odvodil Pierre-Simon Laplace:

$$r_{SOI} = d_p \cdot \left(\frac{M_p}{M_\odot}\right)^{2/5}$$

kde d_p je vzdálenost planety od Slunce. Pro Zemi činí $r_{SOI} \approx 925\,000$ km (0,0062 AU), pro obří Jupiter s obrovskou hmotností dosahuje $r_{SOI} \approx 48\,200\,000$ km (0,322 AU).

Veličina	Symbol	Základní jednotka	Fyzikální význam při gravitační asistenci
Orbitální rychlost planety	$\vec{V}_p$	km/s	Rychlost oběhu planety kolem Slunce
Vstupní heliocentrická rychlost	$\vec{v}_1$	km/s	Rychlost sondy vůči Slunci před přiblížením k planetě
Výstupní heliocentrická rychlost	$\vec{v}_2$	km/s	Rychlost sondy vůči Slunci po opuštění gravitačního pole planety
Hyperbolický přebytek rychlosti	v_∞	km/s	Asymptotická relativní rychlost sondy vůči planetě ($\vec{v}_1 - \vec{V}_p$)
Pericentrum průletu	r_p	km	Vzdálenost nejtěsnějšího přiblížení od středu planety
Excentricita hyperboly	e_{hyp}	bezrozměrné	Tvar průletové hyperboly ($e_{hyp} = 1 + r_p v_\infty^2 / \mu_p > 1$)
Úhel ohybu trajektorie	δ	deg (°)	Úhel stočení vektoru relativní rychlosti v poli planety
Získaný rychlostní impuls	$\Delta \vec{v}$	km/s	Vektorový rozdíl rychlostí sondy vůči Slunci ($\vec{v}_2 - \vec{v}_1$)

10.4 Řešené výpočetní příklady

Řešený příklad 10.1: Kompletní výpočet gravitačního praku New Horizons u Jupiteru

Zadání: Sonda New Horizons proletěla 28. února 2007 kolem obří planety Jupiter, aby získala dodatečnou rychlost nezbytnou pro dosažení Pluta v rozumném čase. Parametry průletu:

- Hyperbolická příletová rychlost sondy vůči Jupiteru: $v_\infty = 18,40$ km/s
- Vzdálenost nejtěsnějšího přiblížení k těžišti Jupitera: $r_p = 2,305 \times 10^6$ km (cca 32,2 poloměrů Jupitera, bezpečně vně smrtících radiačních pásů)
- Gravitační parametr Jupitera: $\mu_J = 126\,686\,534$ km³/s²
- Oběžná rychlost Jupitera kolem Slunce: $V_J \approx 13,07$ km/s

- Vypočítejte excentricitu hyperbolické trajektorie e_{hyp} .
- Vypočítejte úhel stočení trajektorie (úhel ohybu δ).
- Vypočítejte velikost změny relativního rychlostního vektoru $|\Delta \vec{v}_{rel}|$.
- Analyzujte výsledný nárůst heliocentrické rychlosti a úsporu času letu k Plutu.

Postup výpočtu: 1. Výpočet excentricity hyperboly e_{hyp} :

$$e_{hyp} = 1 + \frac{r_p \cdot v_\infty^2}{\mu_J}$$

$$v_\infty^2 = (18,40)^2 = 338,56 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$r_p \cdot v_\infty^2 = 2\,305\,000 \cdot 338,56 = 780\,380\,800 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$\frac{r_p \cdot v_\infty^2}{\mu_J} = \frac{780\,380\,800}{126\,686\,534} \approx 6,15994$$

$$e_{hyp} = 1 + 6,15994 \approx \mathbf{7,1599}$$

2. Výpočet úhlu ohybu δ :

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{e_{hyp}} = \frac{1}{7,15994} \approx \mathbf{0,139666}$$

$$\frac{\delta}{2} = \arcsin(0,139666) \approx 8,0293^\circ$$

$$\delta = 2 \cdot 8,0293^\circ \approx 16,06^\circ \approx 16,1^\circ$$

Gravitační pole Jupitera zakřivilo dráhu sondy o $16,1^\circ$. **3. Velikost změny relativního vektoru rychlosti:**

$$|\Delta \vec{v}_{rel}| = 2 \cdot v_\infty \cdot \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = 2 \cdot 18,40 \cdot 0,139666 \approx 5,14 \text{ km/s}$$

4. Heliocentrický nárůst rychlosti a úspora času: Vektorový součet v heliocentrické soustavě: Sonda proletěla za Jupiterem pod pečlivě zvoleným úhlem k vektoru oběhu planety $\vec{V}_J$. Díky tomu vzrostla velikost heliocentrické rychlosti sondy vůči Slunci o:

$$\Delta v_{helio} \approx +3,9 \text{ km/s} \approx 14\,000 \text{ km/h}$$

Její odletová rychlost ze soustavy Jupiteru dosáhla rekordních $22,9 \text{ km/s}$ ($82\,400 \text{ km/h}$). **Dopad na misi:** Tento jediný gravitační manévř zkrátil dobu letu New Horizons k Plutu o **celých 3,5 až 4 roky!** Bez asistence Jupitera by sonda k Plutu dorazila až kolem roku 2019 nebo 2020. Místo toho kolem něj úspěšně proletěla již 14. července 2015.

Řešený příklad 10.2: Sonda Cassini u Venuše a Jupiteru (trajektorie VVEJGA)

Zadání: Kosmická sonda Cassini–Huygens (společný projekt NASA, ESA a ASI) měla startovní hmotnost $5\,712 \text{ kg}$. Byla to nejtěžší meziplanetární sonda 20. století. Pro přímý let k Saturnu by bylo zapotřebí udělit sondě rychlostní impuls přesahující možnosti tehdy nejsilnější nosné rakety Titan IVB / Centaur. Konstrukteři proto navrhli komplexní rezonanční trajektorii **VVEJGA** (Venus–Earth–Jupiter Gravity Assist).

Analyzujte jednotlivé fáze trajektorie a celkový ekvivalent Δv získaný gravitačními manévry.

Rozbor trajektorie krok za krokem:

- 1. Start ze Země (15. října 1997):** Raketa neposlala sondu směrem ven k Saturnu, nýbrž paradoxně **dovnitř Sluneční soustavy směrem k Venuši!**
- 2. První gravitační asistence u Venuše (26. dubna 1998):** Sonda minula Venuši ve výšce pouhých 284 km . Gravitační pole planety zvýšilo heliocentrickou rychlost o $\Delta v \approx 7,0 \text{ km/s}$ a navedlo sondu na rezonanční dráhu s periodou rovnou přesně třem oběhům Venuše.
- 3. Druhá gravitační asistence u Venuše (24. června 1999):** O 14 měsíců později se Cassini s Venuši setkala podruhé. Průlet ve výšce 603 km přidal dalších $\Delta v \approx 5,5 \text{ km/s}$ a poslal sondu zpět k Zemi.
- 4. Gravitační asistence u Země (18. srpna 1999):** Pouhé dva měsíce po Venuši prolétla Cassini kolem domovské Země ve výšce $1\,171 \text{ km}$. Země sondu katapultovala směrem k pásu planetek přírůstkem $\Delta v \approx 5,5 \text{ km/s}$.
- 5. Gravitační asistence u Jupiteru (30. prosince 2000):** Ve vzdálenosti $9,7 \text{ milionu km}$ od Jupitera proběhl finální gravitační manévř, který zvýšil rychlost o $\Delta v \approx 2,2 \text{ km/s}$ a nasměroval sondu přímo k prstencům Saturnu, kam dorazila 1. července 2004.

Fyzikální a ekonomické zhodnocení: Celkový rychlostní přírůstek získaný ze čtyř gravitačních manévřů činil:

$$\Delta v_{grav,celk} \approx 7,0 + 5,5 + 5,5 + 2,2 = 20,2 \text{ km/s}$$

Kdyby měla sonda Cassini tento gigantický impuls $\Delta v \approx 20 \text{ km/s}$ vygenerovat svými vlastními chemickými motory ($I_{sp} \approx 315 \text{ s}$), musela by podle Tsiolkovského rovnice natankovat přes $3\,800 \text{ tun}$ paliva! Díky nebeské mechanice a gravitačnímu praku stačilo na startu běžné množství paliva v nádržích sondy.

Řešený příklad 10.3: Zpomalovací gravitační manévry sondy BepiColombo k Merkuru

Zadání: Většina lidí se domnívá, že nejnáročnější lety směřují k vnějším okrajům Sluneční soustavy. Z hlediska nebeské mechaniky je však **dosazení Merkuru mnohem energeticky náročnější než let k Plutu!** Merkur obíhá velmi blízko Slunce (ve vzdálenosti pouze $0,387 \text{ AU}$) obrovskou rychlostí téměř 48 km/s . Přímý sestup po Hohmannově elipse ze Země vyžaduje na začátku zabrzdění o $v \approx 8 \text{ km/s}$ a po přiletu k Merkuru znovu brutálně zabrzdění o dalších $v \approx 9,6 \text{ km/s}$, aby sonda nespadla do Slunce a nechala se zachytit slabou gravitací Merkuru ($\Delta v_{celk} > 13 \text{ km/s}$).

Vysvětlete, jak evropsko-japonská mise **BepiColombo** (odstartovaná v říjnu 2018) řeší tento problém sérií **9 zpomalovacích gravitačních asistencí**.

Rozbor brzdící strategie mise BepiColombo:

Aby sonda nemusela nést desítky tun paliva, využívá kombinaci solárně-elektrického iontového pohonu (SEEP s extrémním $I_{sp} > 4\,000$ s) a série devíti brzdících průletů:

- **1x průlet kolem Země (duben 2020):** Sonda proletěla před Zemí, čímž poprvé snížila perihelium své heliocentrické dráhy směrem k Venuši.
- **2x průlet kolem Venuše (říjen 2020 a srpen 2021):** Dva přesně synchronizované průlety před Venuší masivně odčerpaly oběžnou energii a srazily afélium dráhy hluboko pod dráhu Země.
- **6x průlet kolem samotného Merkuru (2021 až 2026):** Sonda se opakovaně setkává s Merkurem. Při každém průletu před planetou odevzdává část své kinetické energie Merkuru: – Zmenšuje se relativní přibližovací rychlost v_∞ . – Heliocentrická dráha sondy se postupně přibližuje tvaru dráhy Merkuru (klesá excentricita i poloosa).

Fyzikální pointa: Při posledním šestém průletu klesne relativní rychlost v_∞ vůči Merkuru na méně než $1,8\text{ km/s}$. V tomto okamžiku postačí nepatrný zážeh malých chemických motorků a sonda bude bezpečně zachycena na stabilní vědecké oběžné dráze kolem Merkuru. Gravitační prak zde nefungoval jako katapult, ale jako dokonalá **kosmická disková brzda**.

SHRNUTÍ: CO SI Z TÉTO KAPITOLY ODNÉST

- **Princip gravitačního praku:** V planetocentrické soustavě je velikost relativní rychlosti konstantní ($|\vec{v}_{\infty,in}| = |\vec{v}_{\infty,out}| = v_\infty$). Planeta však svou gravitací stočí směr letu o úhel ohybu δ .
- **Heliocentrický zisk:** Vůči Slunci se rychlost sondy změní o $\Delta\vec{v} = \vec{v}_{\infty,out} - \vec{v}_{\infty,in}$ s velikostí $|\Delta v| = 2v_\infty \sin(\delta/2)$. Sonda krade kinetickou energii obíhající planetě.
- **Úhel ohybu** ($\sin(\delta/2) = \frac{1}{1+r_p v_\infty^2/\mu_p}$): Čím těsnější je průlet (r_p) a čím těžší je planeta (μ_p), tím větší je stočení dráhy.
- **Univerzálnost manévru:** Průlet za planetou sondu urychluje (New Horizons, Cassini), průlet před planetou ji brzdí (BepiColombo) a polární průlet mění sklon dráhy k ekliptice (Ulysses).

Kapitola 11: Problém tří těles a Lagrangeovy gravitační ostrovy

V předchozích kapitolách jsme zkoumali Keplerův a Newtonův ideální svět dvou izolovaných těles: Slunce a osamocenou planetu nebo Zemi a družici. V tomto uzavřeném gravitačním systému jsou trajektorie dokonale analyticky popsatelné kuželošféckami a zákony zachování energie a momentu hybnosti nám umožňují přesně předpovědět polohu tělesa v libovolném okamžiku minulosti i budoucnosti.

Jakmile však do gravitačního pole vstoupí **třetí těleso** – ať už jde o kosmickou sondu pohybující se mezi Zemí a Měsícem, dalekohled obíhající v soustavě Slunce–Země, nebo planetku podléhající přitažlivosti Slunce i obřího Jupiteru –, situace se dramaticky promění. Klasické analytické postupy selhávají a nastupuje jedna z nehlubších disciplín astrodynamiky: studium **Lagrangeových libračních bodů** a dynamiky v rotujících vztažných soustavách.

11.1 Problém tří těles a Poincarého deterministický chaos

Když v roce 1887 vyhlásil švédský král Oskar II. u příležitosti svých šedesátých narozenin mezinárodní matematickou soutěž o nalezení obecného analytického řešení pohybu soustavy N těles vzájemně se přitahujících gravitační silou, panovalo přesvědčení, že jde o pouhou technickou otázku rozvoje nekonečných řad.

Cenu získal francouzský matematik a fyzik **Henri Poincaré**. Jeho převratná práce však vědecký svět neuklidnila, nýbrž šokovala. Poincaré rigorózně dokázal, že **pro soustavu tří a více těles neexistuje obecné analytické řešení v uzavřeném tvaru pomocí algebraických a integrálních funkcí**.

Důvodem je nelinearita gravitačního zákona a nedostatek integrálů pohybu. Zatímco pro dvě tělesa máme k dispozici 10 klasických integrálů pohybu (zachování těžiště, hybnosti, momentu hybnosti a energie), které postačují k úplné redukci a integraci pohybových rovnic, u tří těles má systém 18 stupňů volnosti ve fázovém prostoru. Těchto 10 integrálů již nedostačuje k separaci proměnných. Poincaré odhalil, že pohybové trajektorie v blízkosti určitých konfigurací vykazují extrémní citlivost na počáteční podmínky: libovolně malá odchylka v počáteční poloze či rychlosti vede v čase k exponenciálnímu rozchodu trajektorií. Poincaré tím položil základy moderní teorie nelineární dynamiky a **deterministického chaosu**.

11.2 Kruhový omezený problém tří těles (CR3BP)

Aby bylo možné dynamiku kosmických lodí v přítomnosti dvou masivních těles prakticky zkoumat, zavedla nebeská mechanika zjednodušený, avšak vysoce přesný model: **kruhový omezený problém tří těles** (*Circular Restricted Three-Body Problem*, zkratka **CR3BP**).

Model stojí na následujících fundamentálních předpokladech:

1. Dvě masivní primární tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 (kde konvenčně platí $m_1 \geq m_2$, např. Slunce a Země nebo Země a Měsíc) obíhají kolem svého společného těžiště (barycentra) po přesně kruhových drahách konstantní úhlovou rychlostí ω .
2. Třetí těleso (kosmická sonda o hmotnosti m) má zanedbatelnou hmotnost vůči primárním tělesům ($m \ll m_2$). Působení sondy na pohyb hlavních těles je nulové, sonda se chová jako pasivní testovací částice.
3. Vzdálenost mezi primárními tělesy je konstantní a označujeme ji R .

Kanonický bezrozměrný systém jednotek

Pro usnadnění analytických i numerických výpočtů se v CR3BP zavádí normalizovaná bezrozměrná soustava: *Jednotka hmotnosti*: $M^* = m_1 + m_2 = 1$ *Jednotka délky*: $L^* = R = 1$ (vzdálenost mezi primárními tělesy) *Jednotka času*: $T^* = \frac{1}{\omega}$ *Jednotka gravitační konstanty*: $G^* = 1$ (z čehož plyne $\omega = 1$).

Zavedeme klíčový bezrozměrný hmotnostní parametr μ :

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Z této definice plyne, že normalizovaná hmotnost většího tělesa je $1 - \mu$ a menšího tělesa μ .

Parametr	Fyzikální rozměr	V soustavě Slunce–Země	V soustavě Země–Měsíc
m_1	Hmotnost primárního tělesa	$1,9885 \times 10^{30}$ kg (Slunce)	$5,9722 \times 10^{24}$ kg (Země)
m_2	Hmotnost sekundárního tělesa	$5,9722 \times 10^{24}$ kg (Země)	$7,342 \times 10^{22}$ kg (Měsíc)
μ	Bezrozměrný parametr	$3,0034 \times 10^{-6}$	0,012150
R	Vzdálenost těles	149 597 871 km (1 AU)	384 400 km

11.3 Rotující soustava souřadnic a efektivní potenciál

Zavedeme synchronně rotující kartézskou soustavu souřadnic (x, y, z) s počátkem ve společném barycentru soustavy. Osa x leží na spojnici obou masivních těles a míří od tělesa m_1 k tělesu m_2 . Osa z je kolmá k rovině oběhu primárních těles ve směru vektoru úhlové rychlosti $\vec{\omega} = (0, 0, \omega) = (0, 0, 1)$. Osa y doplňuje soustavu na pravotočivou.

V této rotující soustavě mají primární tělesa neměnné polohové souřadnice:

- Těleso m_1 (hmotnost $1 - \mu$): poloha na ose x je $x_1 = -\mu, y_1 = 0, z_1 = 0$.
- Těleso m_2 (hmotnost μ): poloha na ose x je $x_2 = 1 - \mu, y_2 = 0, z_2 = 0$.

Vzdálenosti testovací částice o souřadnicích (x, y, z) od jednotlivých těles činí:

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2}$$

Efektivní potenciál $\Omega(x, y, z)$

V neinerciální rotující soustavě působí na sondu kromě gravitační síly obou těles také setrvačné síly: odstředivá síla a Coriolisova síla. Odstředivou sílu lze vyjádřit gradientem skalárního odstředivého potenciálu $V_{\text{cent}} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Spojením gravitačního potenciálu a odstředivého potenciálu definujeme **efektivní pseudopotenciál** $\Omega(x, y, z)$:

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

Pohybové rovnice v rotující soustavě

Pohybové rovnice sondy v této soustavě mají tvar:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

Členy $2\dot{y}$ a $-2\dot{x}$ představují **Coriolisovo zrychlení**, které je kolmé k okamžitému vektoru relativní rychlosti v rovině (x, y) . Parciální derivace efektivního potenciálu mají analytický tvar:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = y \left(1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -z \left(\frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right)$$

11.4 Jacobiho integrál a plochy nulové rychlosti

Přestože CR3BP nemá obecné řešení, Carl Gustav Jacobi našel v roce 1836 první integrál tohoto systému. Vynásobíme-li jednotlivé pohybové rovnice derivacemi $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ a sečteme je:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} - 2\dot{x}\dot{y} + 2\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\dot{z}$$

Coriolisovy členy se vzájemně přesně odečtou! Levá strana představuje časovou derivaci $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$, zatímco pravá strana je úplná časová derivace efektivního potenciálu $\frac{d\Omega}{dt}$. Integrací podle času získáváme **Jacobiho integrál** C :

$$C = 2\Omega(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2\Omega(x, y, z) - v^2 = \text{konstanta}$$

Kde $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ je velikost rychlosti sondy měřená v rotující soustavě.

Plochy nulové rychlosti (Hillovy křivky)

Z Jacobiho integrálu plyne, že pro čtverec rychlosti platí:

$$v^2 = 2\Omega(x, y, z) - C$$

Protože rychlost v je reálná fyzikální veličina, její čtverec musí být nezáporný ($v^2 \geq 0$). Fyzikální pohyb sondy je tedy možný pouze v oblastech prostoru, kde platí:

$$2\Omega(x, y, z) \geq C$$

Rovnice $2\Omega(x, y, z) = C$ definuje v prostoru trojrozměrné **plochy nulové rychlosti (Zero-Velocity Surfaces)**. Tyto plochy tvoří nepřekročitelné dynamické bariéry oddělující zakázané zóny od povolených oblastí pohybu pro danou hodnotu energie C :

- **Vysoká hodnota C (nízká celková energie):** Sonda je uzavřena v hluboké gravitační studně kolem m_1 nebo m_2 , případně v nekonečnu za vnější odstředivou bariérou. Přejít mezi tělesy je fyzikálně nemožný.
- **Pokles C na úroveň C_{L1} :** V bodě L1 se otevře úzký krček („Lagrangeova brána“) spojující obě gravitační studny. Sonda může přecházet od m_1 k m_2 .
- **Pokles C na úroveň C_{L2} :** Otevírá se brána za menším tělesem v bodě L2, umožňující únik do meziplanetárního prostoru.
- **Pokles C na úroveň C_{L3} :** Otevírá se brána na protilehlé straně za větším tělesem v bodě L3.
- **Pokles C na úroveň $C_{L4,L5}$:** Poslední zakázané ostrovy v okolí triangulárních bodů mizí a sonda se může pohybovat po celé rovině.

11.5 Analytické odvození polohy kolineárních bodů (L1, L2, L3)

Rovnovážné body rotující soustavy odpovídají stacionárním bodům efektivního potenciálu, kde je gradient $\nabla\Omega = 0$:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0$$

Z rovnic pro $\partial\Omega/\partial y$ a $\partial\Omega/\partial z$ okamžitě plyne, že pro body ležící na ose rotace platí $y = 0$ a $z = 0$. Všechny body na spojnici primárních těles nazýváme **kolineární body (L1, L2, L3)**. Jejich polohu na ose x určuje jednorozměrná nelineární rovnovážná rovnice:

$$f(x) = x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-1+\mu|^3} = 0$$

Odvození vzdálenosti bodů L1 a L2 od menšího tělesa

Zavedeme vzdálenost kolineárního bodu od menšího tělesa m_2 jako bezrozměrnou veličinu $\gamma = r_2/R$.

- Pro **bod L1** ležící mezi tělesy platí $x = 1 - \mu - \gamma$. Vzdálenost od tělesa m_1 je $r_1 = 1 - \gamma$.

- Pro bod **L2** ležící za tělesem m_2 platí $x = 1 - \mu + \gamma$. Vzdálenost od tělesa m_1 je $r_1 = 1 + \gamma$.

Dosadíme do rovnovážné podmínky pro bod L2 (odstředivá síla vyvažuje součet gravitačních sil obou těles):

$$(1 - \mu + \gamma) - \frac{1 - \mu}{(1 + \gamma)^2} - \frac{\mu}{\gamma^2} = 0$$

Protože pro většinu astrodynamických soustav je $\mu \ll 1$, bude i vzdálenost $\gamma \ll 1$. Provedeme Taylorův rozvoj prvního členu gravitační síly: $(1 + \gamma)^{-2} \approx 1 - 2\gamma + 3\gamma^2 - \dots$

$$(1 - \mu + \gamma) - (1 - \mu)(1 - 2\gamma + \dots) - \frac{\mu}{\gamma^2} = 0$$

$$(1 - \mu) + \gamma - (1 - \mu) + 2(1 - \mu)\gamma - \frac{\mu}{\gamma^2} = 0$$

$$\gamma + 2\gamma - 2\mu\gamma - \frac{\mu}{\gamma^2} \approx 3\gamma - \frac{\mu}{\gamma^2} = 0$$

Vynásobením γ^2 dostáváme fundamentální kubický vztah:

$$3\gamma^3 \approx \mu \implies \gamma \approx \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}$$

V rozměrových jednotkách je vzdálenost r_{L1} i r_{L2} od menšího tělesa rovna:

$$r_{L1,L2} \approx R \cdot \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} = R \cdot \sqrt[3]{\frac{m_2}{3(m_1 + m_2)}}$$

Tento elegantní vzorec ukazuje, že vzdálenost kolineárních bodů od menšího tělesa je přímo úměrná poloměru jeho Hillovy sféry!

11.6 Triangulární body (L4 a L5) a analýza stability

Pro body ležící mimo osu x ($y \neq 0$) musí z rovnice $\partial\Omega/\partial y = 0$ platit:

$$1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0$$

Dosadíme-li tuto podmínku do rovnice pro $\partial\Omega/\partial x = 0$, po algebraické úpravě získáme jedinečné geometrické řešení:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 1$$

To znamená, že vzdálenost bodů L4 a L5 od obou primárních těles je přesně rovna vzdálenosti mezi samotnými primárními tělesy (R). Spolu s tělesy m_1 a m_2 tedy tvoří **dokonalé rovnostranné trojúhelníky** v rovině oběhu ($z = 0$):

- **Bod L4:** Předbíhá menší těleso o úhel $+60^\circ$ na jeho dráze. Souřadnice: $\left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.
- **Bod L5:** Zaostává za menším tělesem o úhel -60° na jeho dráze. Souřadnice: $\left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Lineární analýza stability

Linearizací pohybových rovnic v okolí rovnovážných bodů vyšetřujeme stabilitu vůči malým poruchám (ξ, η) :

1. **Kolineární body (L1, L2, L3):** Matice linearizovaného systému má dvě reálná vlastní čísla opačného znaménka ($\lambda_{1,2} = \pm\lambda_R$) a dvě ryze imaginární vlastní čísla ($\lambda_{3,4} = \pm i\omega_I$). Přítomnost kladného reálného vlastního čísla znamená, že **body L1, L2 i L3 jsou dynamicky nestabilní sedlové body**. Vychýlené těleso exponenciálně opouští okolí bodu.
2. **Triangulární body (L4, L5):** Vlastní čísla jsou ryze imaginární (stabilní oscilace) právě tehdy, když diskriminant charakteristické rovnice splňuje podmínku $1 - 27\mu(1 - \mu) > 0$. Toto kritérium odvodil francouzský astronom Émile Gascheau v roce 1843:

$$\mu < \mu_{\text{crit}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{23}{27}}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{69}}{9}}{2} \approx 0,0385208$$

Pokud je menší těleso lehčí než přibližně 3,85 % celkové hmotnosti systému (poměr hmotností $m_1/m_2 > 24,96$), **body L4 a L5 jsou lineárně stabilní**. Tuto podmínku bohatě splňuje soustava Slunce–Země ($\mu \approx 3 \times 10^{-6}$), Slunce–Jupiter ($\mu \approx 9,5 \times 10^{-4}$) i Země–Měsíc ($\mu \approx 0,01215$). Stabilizace je způsobena gyrokopickým účinkem **Coriolisovy síly**, která stlačuje odchyloující se těleso do uzavřených eliptických librací.

11.7 Dráhy v okolí libračních bodů: Halo, Lissajous a NRHO

Protože body L1 a L2 jsou nestabilní sedla, těleso na nich nemůže pasivně spočívat. Přesto v jejich okolí existují celé rodiny periodických a kvazi-periodických prostorových drah:

- **Lissajousovy dráhy:** Kvazi-periodické trajektorie, kde se nezávisle mísí oscilace v rovině oběhu a kolmo k rovině s navzájem nekomenzurabilními frekvencemi.
- **Halové dráhy (Halo orbits):** Trojrozměrné periodické dráhy s navázanou rezonancí mezi rovinou oběhu a kolmým směrem. Z pohledu Země se družice jeví jako světelná gloriola (halo) opisující kružnici kolem libračního bodu.
- **NRHO (Near-Rectilinear Halo Orbits):** Vysoce protáhlé prostorové halové dráhy v soustavě Země–Měsíc. Vyznačují se vynikající dynamickou stabilitou, minimální spotřebou paliva pro korekce a stálým rádiovým kontaktem se Zemí bez dlouhých lunárních zatmění.

Řešený příklad 11.1: Výpočet polohy bodu L2 pro Teleskop Jamese Webba (JWST)

Vesmírný dalekohled Jamese Webba (JWST) provádí pozorování vesmíru v infračerveném spektru, což vyžaduje chlazení detektorů na teplotu pod -233 °C (méně než 40 K). Pro misi byl zvolen bod **L2 soustavy Slunce–Země**, kde obří sluneční štít trvale cloní tepelné záření Slunce, Země i Měsíce současně.

Zadání: Vypočítejte přesnou vzdálenost libračního bodu L2 od středu Země r_{L2} a určete roční rozpočet Δv potřebný pro udržení stanice na halové dráze. **Vstupní parametry:**

- Vzdálenost Země od Slunce: $R = 149\,597\,870,7\text{ km}$
- Hmotnost Slunce: $M_{\odot} = 1,98847 \times 10^{30}\text{ kg}$
- Hmotnost Země: $M_{\oplus} = 5,97217 \times 10^{24}\text{ kg}$

Krok 1: Výpočet bezrozměrného hmotnostního parametru μ

$$\mu = \frac{M_{\oplus}}{M_{\odot} + M_{\oplus}} = \frac{5,97217 \times 10^{24}}{1,98847 \times 10^{30} + 5,97217 \times 10^{24}} = \frac{5,97217 \times 10^{24}}{1,98847597 \times 10^{30}} \approx 3,00339 \times 10^{-6}$$

Krok 2: Výpočet poměru $\mu/3$ a jeho třetí odmocniny

$$\frac{\mu}{3} = \frac{3,00339 \times 10^{-6}}{3} = 1,00113 \times 10^{-6}$$

$$\gamma = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} = \sqrt[3]{1,00113 \times 10^{-6}} \approx 0,010003766$$

Krok 3: Vzdálenost bodu L2 od Země v kilometrech

$$r_{L2} = R \cdot \gamma = 149\,597\,870,7 \cdot 0,010003766 \approx 1\,496\,541\text{ km} \approx 1,4965 \times 10^6\text{ km}$$

Krok 4: Dynamika halové dráhy a korekce (station-keeping) Teleskop JWST nesedí přímo v bodě L2 (tam by byl v trvalém zemském stínu bez energie ze solárních panelů), nýbrž obíhá kolem L2 po rozměrné halové dráze o poloměru přibližně 800 000 km s periodou 6 měsíců. Vzhledem k nestabilitě bodu vyžaduje korekce dráhy roční impuls:

$$\Delta v_{\text{sk}} \approx 2,5 \text{ až } 4,0\text{ m/s ročně}$$

Díky této miniaturní spotřebě paliva má JWST dostatek pohonných látek na více než 20 let vědeckého provozu.

Řešený příklad 11.2: Výpočet polohy bodu L1 pro sluneční observatoř SOHO a včasné varování před CME

Sluneční observatoř SOHO (a její nástupci ACE, DSCOVR a Aditya-L1) sídlí v bodě L1 mezi Zemí a Sluncem. Monitoruje sluneční vítr a koronální výrony hmoty (CME) dříve, než zasáhnou zemskou magnetosféru.

Zadání:

1. Určete vzdálenost bodu L1 od Země.
2. Vypočítejte časový předstih varování před nebezpečným výronem CME letícím rychlostí $v_{\text{CME}} = 1\,500\text{ km/s}$, jestliže radiový signál ze sondy letí k Zemi rychlostí světla $c = 299\,792\text{ km/s}$.

Výpočet:

1. Vzdálenost bodu L1 od Země je dána stejným asymptotickým vztahem jako pro L2:

$$r_{L1} \approx R \cdot \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} \approx 1\,496\,541\text{ km}$$

1. Doba letu plazmatického mračka CME z bodu L1 k zemské magnetosféře:

$$t_{\text{let}} = \frac{r_{L1}}{v_{\text{CME}}} = \frac{1\,496\,541\text{ km}}{1\,500\text{ km/s}} \approx 997,7\text{ sekund} \approx \mathbf{16\text{ minut a }38\text{ sekund}}$$

1. Doba šíření radiového signálu ze sondy do pozemního střediska:

$$t_{\text{radio}} = \frac{r_{L1}}{c} = \frac{1\,496\,541\text{ km}}{299\,792,458\text{ km/s}} \approx \mathbf{4,99\text{ sekund} \approx 5\text{ sekund}}$$

1. Čistý časový předstih pro operátory energetických rozvodů a družic:

$$\Delta t_{\text{varovani}} = t_{\text{let}} - t_{\text{radio}} = 997,7\text{ s} - 5,0\text{ s} \approx \mathbf{992,7\text{ sekund} \approx 16,5\text{ minuty}}$$

Těchto 16 minut umožňuje astronautům na ISS vyhledat kryt a energetickým společenstvem přepojit kritické transformátory před příchodem geomagnetické bouře.

Řešený příklad 11.3: Librační body soustavy Země–Měsíc a lunární stanice Gateway

Pro mezinárodní lunární stanici Gateway v programu Artemis byla zvolena dráha NRHO navázaná na jižní větev libračního bodu L2 soustavy Země–Měsíc.

Zadání: Vypočítejte vzdálenost libračních bodů L1 a L2 od středu Měsíce v kilometrech. **Vstupní data:**

- Vzdálenost Země–Měsíc: $R_{EM} = 384\,400\text{ km}$
- Hmotnost Země: $M_{\oplus} = 5,9722 \times 10^{24}\text{ kg}$
- Hmotnost Měsíce: $M_M = 7,342 \times 10^{22}\text{ kg}$

Krok 1: Výpočet parametru μ_{EM}

$$\mu_{EM} = \frac{M_M}{M_{\oplus} + M_M} = \frac{7,342 \times 10^{22}}{5,9722 \times 10^{24} + 7,342 \times 10^{22}} = \frac{7,342}{6\,045,62} \approx 0,0121443$$

Krok 2: Přibližná vzdálenost pomocí kubického vzorce

$$\gamma_{EM} \approx \sqrt[3]{\frac{\mu_{EM}}{3}} = \sqrt[3]{\frac{0,0121443}{3}} = \sqrt[3]{0,0040481} \approx 0,15937$$

$$r_{L1,L2}^{(0)} \approx R_{EM} \cdot \gamma_{EM} = 384\,400 \cdot 0,15937 \approx \mathbf{61\,262\text{ km}}$$

Krok 3: Zpřesnění polohy L1 a L2 (Eulerova kvintická rovnice) V soustavě Země–Měsíc je poměr μ relativně velký (1,2 %), proto se uplatňují vyšší členy rozvoje:

- Pro **L1** (mezi Zemí a Měsícem): $r_{L1} \approx R_{EM} \cdot \gamma \left(1 - \frac{1}{3}\gamma\right) \approx 384\,400 \cdot 0,15093 \approx \mathbf{58\,020\,km}$ od středu Měsíce.
- Pro **L2** (za Měsícem na odvrácené straně): $r_{L2} \approx R_{EM} \cdot \gamma \left(1 + \frac{1}{3}\gamma\right) \approx 384\,400 \cdot 0,16783 \approx \mathbf{64\,510\,km}$ od středu Měsíce.

Stanice Gateway na dráze NRHO prolétá nad severním pólem Měsíce ve výšce pouhých 3 000 km (snadný sestup lunárních modulů) a nad jižním pólem dosahuje apolunia ve výšce 70 000 km poblíž bodu L2, odkud má trvalý nerušený rádiový výhled na Zemi.

☑ SHRNUTÍ 11. KAPITOLY: KLÍČOVÉ POZNATKY O PROBLÉMU TŘÍ TĚLES

- **Nemožnost analytického řešení:** Pohyb tří těles vykazuje deterministický chaos (Poincaré) a nemá obecné řešení v uzavřeném tvaru.
- **CR3BP a Jacobiho integrál:** V rotující soustavě existuje jediný integrál pohybu $C = 2\Omega - v^2$, který vymezuje nepřekročitelné plochy nulové rychlosti.
- **Pět libračních bodů:** Tři kolineární body (L1, L2, L3) leží na ose spojnice těles a jsou nestabilní sedla. Dva trojúhelníkové body (L4, L5) tvoří rovnostranné trojúhelníky a jsou stabilizovány Coriolisovou silou pro $\mu < 0,0385$.
- **Vzdálenost bodů L1 a L2:** vzdálenost od menšího tělesa je dána vztahem $r \approx R\sqrt[3]{\mu/3}$ (v soustavě Slunce–Země cca 1,5 mil. km, u Měsíce cca 60 000 km).
- **Kosmické využití:** L1 slouží k monitorování Slunce (SOHO), L2 k hlubokému kosmickému výzkumu (JWST) a lunární L2 k udržování orbitální základny Gateway (NRHO).

Kapitola 12: Reálný vesmír: Vlivy, které narušují dokonalé dráhy

V elementárních učebnicích fyziky se obvykle předpokládá ideální svět: nebeská tělesa jsou homogenní dokonalé koule, vesmírný prostor je vyplněn absolutním vakuem, sluneční záření nepřenáší žádnou hybnost a v systému existují pouze dvě izolovaná tělesa. V tomto matematickém ráji jsou oběžné dráhy neměnné, perigeum míří navždy do stejného bodu a sklon dráhy zůstává věčný.

Jakmile však vypustíme skutečnou družici na oběžnou dráhu kolem Země, narazíme na realitu:

1. **Gravitační pole Země není sférické:** Vlivem vlastní rotace je Země na rovníku vyboulená a na pólech zploštělá.
2. **Atmosféra nemá ostrou hranici:** I ve výškách 400 až 800 km se nachází zbytková atmosféra, která neustále brzdí letící tělesa.
3. **Sluneční světlo má mechanický účinek:** Fotony dopadající na solární panely vyvíjejí stálý radiační tlak.
4. **Gravitační přiliv cizích těles:** Gravitační vlivy Měsíce a Slunce narušují dráhy družic, zejména ve vyšších nadmořských výškách (MEO a GEO).

Tyto odchylky od čistého keplerovského pohybu nazýváme **orbitální perturbace (poruchy)**. Pochopení a přesné matematické modelování perturbací je základní podmínkou pro udržení družic na pracovní pozici, plánování korekčních manévru i výpočet životnosti aparátů.

12.1 Zploštění Země a multipólový rozvoj gravitačního potenciálu

Planeta Země rotuje kolem své osy s periodou přibližně 23 hodin 56 minut. Vznikající odstředivá síla deformuje zemské těleso do tvaru rotačního zploštělého elipsoidu: rovníkový poloměr $R_{eq} = 6\,378,137$ km je o plných 21,385 km větší než polární poloměr $R_p = 6\,356,752$ km. Geometrické zploštění činí:

$$f = \frac{R_{eq} - R_p}{R_{eq}} \approx \frac{1}{298,257} \approx 0,0033528$$

Tato hmota nahromaděná podél rovníku způsobuje, že gravitační pole Země není centrálně symetrické. Obecný gravitační potenciál nesférického tělesa vyjadřujeme pomocí **rozvoje do sférických harmonických funkcí** v kulových souřadnicích (r, ϕ, λ) , kde r je vzdálenost od těžiště, ϕ je geocentrická zeměpisná šířka (deklinace) a λ zeměpisná délka:

$$U(r, \phi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_{eq}}{r} \right)^n P_n(\sin \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_{eq}}{r} \right)^n P_n^m(\sin \phi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right]$$

Problém dělíme na:

- **Zonální harmonické členy (J_n):** Závisí pouze na zeměpisné šířce ϕ a jsou rotačně symetrické kolem osy z . Vyjadřují je Legendreovy polynomy $P_n(\sin \phi)$.
- **Tesserální a sektorové harmonické členy (C_{nm}, S_{nm}):** Závisí na zeměpisné šířce i délce λ . Zachycují lokální anomálie, jako jsou kontinenty, oceánské příkopy a eliptický tvar rovníku (člen C_{22}, S_{22}).

Dominantní zonální koeficient J_2

Nejvýznamnějším poruchovým členem gravitačního pole Země je **druhý zonální koeficient J_2** :

$$J_2 \approx 1,08262668 \times 10^{-3}$$

Koeficient J_2 je přibližně **tisíckrát větší** než všechny ostatní harmonické členy ($J_3 \approx -2,54 \times 10^{-6}$, $J_4 \approx -1,62 \times 10^{-6}$). Z praktického hlediska je tedy J_2 zodpovědný za více než 99,9 % gravitačních perturbací nízkých a středních drah!

Druhý Legendreův polynom má tvar:

$$P_2(\sin \phi) = \frac{1}{2}(3 \sin^2 \phi - 1)$$

Gravitační potenciál započítávající pouze sférické těleso a vliv J_2 je definován jako:

$$U(r, \phi) = \frac{\mu}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_{eq}}{r} \right)^2 \frac{3 \sin^2 \phi - 1}{2} \right]$$

Parametr	Fyzikální veličina	Hodnota	Jednotka
μ	Gravitační parametr Země	398 600,4418	km^3/s^2
R_{eq}	Rovňkový poloměr Země	6 378,137	km
J_2	Druhý zonální perturbační koeficient	$1,08263 \times 10^{-3}$	bezrozměrné
p	Parametr kuželosečky ($a(1 - e^2)$)	variabilní	km
n	Střední pohyb ($\sqrt{\mu/a^3}$)	variabilní	rad/s
i	Sklon oběžné dráhy (inklinace)	$0^\circ \leq i \leq 180^\circ$	stupně / rad

12.2 Dlouhodobé sekulární efekty způsobené J_2

Protože rovníková hmota působí na obíhající družici gravitačním momentem síly, dochází ke dvěma zásadním dlouhodobým (sekulárním) změnám Keplerových elementů:

1. Precese uzlové přímky ($\dot{\Omega}$)

Rovina oběžné dráhy se jako celek pomalu otáčí v prostoru kolem rotační osy Země. Rychlost stáčení délky vzestupného uzlu Ω je dána Lagrangeovou perturbační rovnicí:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_{eq}}{p} \right)^2 n \cos(i)$$

- **Prográdní dráhy** ($i < 90^\circ$): $\cos(i) > 0 \implies \dot{\Omega} < 0$. Uzlová přímka se stáčí směrem **k západu** (regresní precese).
- **Retrográdní dráhy** ($i > 90^\circ$): $\cos(i) < 0 \implies \dot{\Omega} > 0$. Uzlová přímka se stáčí směrem **k východu** (prográdní precese).
- **Polární dráha** ($i = 90^\circ$): $\cos(i) = 0 \implies \dot{\Omega} = 0$. Rovina dráhy stojí v prostoru nehybně.

Heliosynchronní dráhy (SSO) Tento zdánlivě rušivý jev využíváme k vytvoření **heliosynchronních drah (Sun-Synchronous Orbits)**. Pokud zvolíme sklon mírně retrográdní ($i \approx 97^\circ - 98^\circ$ pro LEO), můžeme rychlost precese $\dot{\Omega}$ nastavit přesně tak, aby odpovídala průměrné úhlové rychlosti oběhu Země kolem Slunce:

$$\dot{\Omega}_{SSO} = \frac{360^\circ}{365,2422 \text{ dní}} \approx 0,9856^\circ/\text{den} \approx 1,991 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$$

Družice na dráze SSO přelétá nad rovníkem i nad libovolným místem povrchu vždy v identickém místním slunečním čase, což zajišťuje stálé světelné podmínky pro optické a špionážní družice.

2. Sekulární stáčení perigea ($\dot{\omega}$)

Elipsa oběžné dráhy se v rámci své oběžné roviny pomalu protáčí. Její nejnižší bod (perigeum) putuje po obvodu rychlostí:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_{eq}}{p} \right)^2 n (5 \cos^2 i - 1)$$

Rychlost a směr stáčení perigea závisí výhradně na výrazu v závorce: $(5 \cos^2 i - 1)$.

12.3 Matematické odvození kritické inklinace

U vysoce výstředných drah je často žádoucí, aby perigeum zůstávalo trvale fixováno na jednom místě (například nad jižním pólem, aby se družice dlouhé hodiny pohybovala vysoko nad severní polokoulí). Hledáme proto takový sklon dráhy i , při němž je časová derivace argumentu perigea **přesně nulová**:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

Dosadíme do perturbační rovnice:

$$\frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_{eq}}{p} \right)^2 n (5 \cos^2 i - 1) = 0$$

Protože koeficienty před závorkou jsou pro reálnou oběžnou dráhu vždy kladné ($J_2 > 0$, $R_{eq} > 0$, $p > 0$, $n > 0$), rovnice je splněna právě tehdy, když:

$$5 \cos^2 i - 1 = 0$$

$$\cos^2 i = \frac{1}{5} = 0,20$$

$$\cos i = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \approx \pm 0,4472136$$

Odtud získáváme dvě fundamentální hodnoty **kritické inklinace**:

1. **Prográdní kritická inklinace:**

$$i_{\text{krit},1} = \arccos \left(+\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \approx 63,4349^\circ \approx 63,4^\circ$$

2. **Retrográdní kritická inklinace:**

$$i_{\text{krit},2} = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 180^\circ - 63,4349^\circ \approx 116,5651^\circ \approx 116,6^\circ$$

Při tomto sklonu je gravitační moment zploštělé Země v dokonalé rovnováze: přitažlivost rovníkového vydutí v jedné části dráhy přesně kompenzuje gravitační vliv v druhé části, takže orientace elipsy v prostoru „zamrzne“.

12.4 Aerodynamický odpor atmosféry a orbitální paradox

Na nízkých oběžných drahách (LEO, typicky $h < 800$ km) prolétá družice molekulami svrchní termosféry a exosféry. Přestože je hustota atmosféry miliardkrát nižší než na hladině moře, při orbitální rychlosti dosahující téměř 8 km/s vytváří náraz molekul nezanedbatelnou brzdou sílu.

Zrychlení způsobené aerodynamickým odporem má vektorový tvar:

$$\vec{a}_D = -\frac{1}{2} \rho v_{\text{rel}}^2 \frac{C_D A}{m} \frac{\vec{v}_{\text{rel}}}{|\vec{v}_{\text{rel}}|}$$

Velikost brzdného zrychlení:

$$a_D = \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{C_D A}{m} = \frac{1}{2} \rho v^2 B$$

Veličina	Symbol	Popis a typická hodnota	Jednotka
Hustota atmosféry	ρ	Exponenciálně klesá s výškou (10^{-11} až 10^{-13})	kg/m ³
Relativní rychlost	v	Rychlost družice vůči rotující atmosféře ($\approx 7,7$)	km/s
Koeficient odporu	C_D	Pro volně molekulární proudění kolem satelitů 2,1 až 2,3 bezrozměrné	

Veličina	Symbol	Popis a typická hodnota	Jednotka
Čelní plocha	A	Průřez družice kolmý ke směru letu	m^2
Hmotnost tělesa	m	Celková hmotnost kosmického aparátu	kg
Balistický koeficient	B	Poměr $C_D A/m$ (vliv tvaru a hmotnosti)	m^2/kg

Úbytek velké poloosy za jeden oběh

Vzhledem k odporu atmosféry ztrácí družice za každý oběh část své specifické mechanické energie ($\Delta\mathcal{E} = \oint a_D ds$). Protože celková energie kruhové dráhy je svázána s velkou poloosou vztahem $\mathcal{E} = -\mu/(2a)$, pokles energie se přímo projeví zmenšením velké poloosy. Integrací přes jeden oběh dostáváme:

$$\Delta a_{\text{rev}} = -2\pi \frac{C_D A}{m} \rho a^2 = -2\pi B \rho a^2$$

Orbitální paradox odporu prostředí

Všimněte si fascinujícího dynamického jevu zvaného **orbitální paradox**:

- Aerodynamický odpor atmosféry družici neustále brzdí a odebírá jí kinetickou i potenciální energii.
- Pokles energie způsobí spirálovitý sestup do nižší výšky ($r_2 < r_1$).
- V nižší výšce je však silnější gravitační pole a pro kruhovou rychlost platí $v = \sqrt{\mu/r}$.
- **Výsledek:** Brzděná družice se po spirálovitém poklesu pohybuje **vyšší rychlostí než před začátkem brzdění!** Ztráta potenciální energie je totiž dvojnásobná oproti nárůstu kinetické energie: $\Delta E_p = 2\Delta\mathcal{E}$, z čehož polovina odejde třením v podobě tepla a druhá polovina zrychlí družici dopředu.

12.5 Tlak slunečního záření (SRP) a slapové síly

Fotony slunečního světla přenášejí hybnost $p = E/c$. Při dopadu na osvětlenou plochu družice působí fotonový tok mechanickým tlakem.

Tlak slunečního záření ve vzdálenosti 1 AU

Zemská solární konstanta dosahuje hodnoty $S_\odot \approx 1\,361\text{ W/m}^2$. Tlak záření na dokonale pohlcující těleso činí:

$$P_\odot = \frac{S_\odot}{c} = \frac{1\,361\text{ W/m}^2}{299\,792\,458\text{ m/s}} \approx 4,54 \times 10^{-6}\text{ N/m}^2 = 4,54\text{ }\mu\text{Pa}$$

Zrychlení způsobené tlakem slunečního záření je dáno vztahem:

$$a_{\text{SRP}} = P_\odot (1 + \rho_R) \frac{A}{m} \cos(\theta_{\text{inc}})$$

- ρ_R – koeficient odrazivosti povrchu ($\rho_R = 0$ pro matně černý povrch, $\rho_R = 1$ pro ideální zrcadlo).
- θ_{inc} – úhel dopadu slunečních paprsků na rovinu panelu.

Tento efekt je klíčový pro **sluneční plachetnice**, které využívají obrovské zrcadlové fólie k plachtění vesmírem bez jakéhokoliv paliva. U běžných družic způsobuje SRP pomalou sekulární oscilaci excentricity.

Slapové perturbace na geostacionární dráze (GEO)

Ve velkých vzdálenostech od Země (na dráze GEO ve výšce 35 786 km) gravitační vliv zploštění J_2 prudce slábne ($J_2 \propto r^{-4}$). Dominantními perturbacemi se zde stávají **gravitační slapové síly Měsíce a Slunce** a **triaxialita zemského rovníku** (J_{22}):

1. **Lunisolární precese sklonu:** Gravitační síly Měsíce a Slunce přetahuje rovinu dráhy z rovníku směrem k rovině ekliptiky. Sklon geostacionárních družic se vlivem toho zvyšuje rychlostí **0,75° až 0,95° za rok**. K udržení stálé nulové inklinace musí družice provádět pravidelné manévry sever-jih (*North-South station-keeping*), které spotřebují přibližně 45 až 50 m/s Δv ročně.
2. **Podélný drift (triaxialita):** Zemský rovník není dokonalá kružnice, nýbrž má mírně eliptický průřez (poloměr v ose 75°E je o 70 metrů větší než v ose kolmé). Tento člen J_{22} způsobuje, že družice pomalu driftují podél rovníku směrem ke dvěma

gravitačně stabilním bodům: $75,3^\circ$ východní délky (nad Indickým oceánem) a $104,7^\circ$ západní délky (nad Tichým oceánem).

Řešený příklad 12.1: Analýza dráhy Molnija a ověření kritické inklinace

Sovětský svaz potřeboval v 60. letech zajistit spolehlivé telekomunikační spojení pro arktické oblasti a Sibiř. Geostacionární družice byly nepoužitelné, protože z polárních oblastí leží GEO pod obzorem. Inženýři proto vyvinuli vysoce eliptickou dráhu s periodou 12 hodin, známou jako **Molnija**.

Zadání:

1. Vypočítejte velkou poloosu dráhy Molnija s periodou $T = 12,0$ hodin.
2. Pro excentricitu $e = 0,74$ a výšku perigea $h_p = 600$ km vypočítejte výšku apogea h_a .
3. Dokažte, jak by se dráha chovala, kdyby odstartovala se sklonem $i = 45^\circ$ místo kritického sklonu $i = 63,435^\circ$.

Krok 1: Velká poloosa dráhy z 3. Keplerova zákona

$$T = 12 \text{ h} = 12 \times 3600 \text{ s} = 43200 \text{ s}$$

$$a = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{398600,44 \cdot \left(\frac{43200}{6,283185}\right)^2} = \sqrt[3]{398600,44 \cdot (6875,49)^2} \approx 26610 \text{ km}$$

Krok 2: Výpočet apogea

$$r_p = R_\oplus + h_p = 6371 + 600 = 6971 \text{ km}$$

$$r_a = 2a - r_p = 2 \cdot 26610 - 6971 = 53220 - 6971 = 46249 \text{ km}$$

$$h_a = r_a - R_\oplus = 46249 - 6371 \approx 39878 \text{ km}$$

Krok 3: Rychlost stáčení perigea při sklonu 45° Parametr elipsy:

$$p = a(1 - e^2) = 26610 \cdot (1 - 0,74^2) = 26610 \cdot (1 - 0,5476) = 26610 \cdot 0,4524 \approx 12038 \text{ km}$$

Střední pohyb v radiánech za den:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,5 \text{ dne}} = 4\pi \text{ rad/den} \approx 12,566 \text{ rad/den}$$

Dosadíme do vzorce pro stáčení perigea při $i = 45^\circ$ ($\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$, $\cos^2 45^\circ = 0,5$):

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_{eq}}{p}\right)^2 n (5 \cos^2(45^\circ) - 1)$$

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} \cdot 1,08263 \times 10^{-3} \cdot \left(\frac{6378,1}{12038}\right)^2 \cdot 12,566 \cdot (5 \cdot 0,5 - 1)$$

$$\dot{\omega} = 0,81197 \times 10^{-3} \cdot (0,52983)^2 \cdot 12,566 \cdot (2,5 - 1)$$

$$\dot{\omega} = 0,81197 \times 10^{-3} \cdot 0,28072 \cdot 12,566 \cdot 1,5 \approx 0,00430 \text{ rad/den} \approx +0,246^\circ/\text{den}$$

Za jeden rok by se perigeum stočilo o:

$$\Delta\omega_{\text{rok}} = 0,246^\circ \cdot 365,25 \approx +90^\circ \text{ ročně!}$$

Za pouhý jeden rok by se apogeu přesunulo ze severního pólu nad rovník a za dva roky nad jižní pól, čímž by družice pro sovětské území zcela ztratila význam. Naopak při **kritické inklinaci** $63,435^\circ$ je člen $(5 \cos^2 i - 1) = 0$, takže $\dot{\omega} = 0$ a apogeu zůstává viset nad severním pólem po celou dobu její existence!

Řešený příklad 12.2: Kvantitativní výpočet brzdění stanice ISS v atmosféře

Mezinárodní vesmírná stanice (ISS) obíhá ve výšce přibližně 420 km. Přestože se zde nachází extrémně zředěná atmosféra, její gigantické solární panely vytvářejí stálý odpor.

Zadání: Vypočítejte brzdné zrychlení stanice ISS, velikost odporové síly v newtonech a denní pokles její oběžné výšky Δh .

Vstupní parametry:

- Hmotnost stanice: $m = 450\,000\text{ kg}$
- Efektivní průřezová plocha: $A = 2\,500\text{ m}^2$
- Aerodynamický koeficient odporu: $C_D = 2,20$
- Hustota atmosféry ve výšce 420 km: $\rho = 2,0 \times 10^{-12}\text{ kg/m}^3$
- Poloměr dráhy: $r = R_{\oplus} + h = 6\,371 + 420 = 6\,791\text{ km} = 6,791 \times 10^6\text{ m}$

Krok 1: Výpočet oběžné rychlosti a balistického koeficientu

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{3,9860044 \times 10^{14}}{6,791 \times 10^6}} = \sqrt{5,8695 \times 10^7} \approx 7\,661,3\text{ m/s}$$

$$B = \frac{C_D \cdot A}{m} = \frac{2,20 \cdot 2\,500\text{ m}^2}{450\,000\text{ kg}} = \frac{5\,500}{450\,000} \approx 0,012222\text{ m}^2/\text{kg}$$

Krok 2: Výpočet aerodynamického brzdného zrychlení a odporové síly

$$a_D = \frac{1}{2} \rho v^2 B = \frac{1}{2} \cdot (2,0 \times 10^{-12}) \cdot (7\,661,3)^2 \cdot 0,012222$$

$$a_D = 1,0 \times 10^{-12} \cdot 58\,695\,517 \cdot 0,012222 \approx 7,174 \times 10^{-7}\text{ m/s}^2$$

$$F_D = m \cdot a_D = 450\,000\text{ kg} \cdot 7,174 \times 10^{-7}\text{ m/s}^2 \approx 0,323\text{ N}$$

Odpor celé obří stanice o hmotnosti 450 tun se rovná tíze jedné tabulky čokolády na Zemi! Přesto má tato nepatrná síla dramatický kumulativní účinek.

Krok 3: Pokles výšky za jeden oběh

$$\Delta a_{\text{rev}} = -2\pi B \rho a^2 = -2\pi \cdot 0,012222 \cdot (2,0 \times 10^{-12}) \cdot (6,791 \times 10^6)^2$$

$$\Delta a_{\text{rev}} = -6,283185 \cdot 0,012222 \cdot 2,0 \times 10^{-12} \cdot 4,61177 \cdot 10^{13} \approx -5,18\text{ metrů za oběh}$$

Krok 4: Denní pokles dráhy ISS Doba jednoho oběhu ISS:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 6\,791\,000}{7\,661,3} \approx 5\,569\text{ sekund} \approx 92,82\text{ minut}$$

Počet oběhů za 24 hodin:

$$N_{\text{den}} = \frac{86\,400\text{ s}}{5\,569\text{ s}} \approx 15,515\text{ oběhů/den}$$

Celkový denní pokles oběžné dráhy:

$$\Delta h_{\text{den}} = N_{\text{den}} \cdot \Delta a_{\text{rev}} = 15,515 \cdot (-5,18\text{ m}) \approx -80,4\text{ metrů denně}$$

V průměru stanice ISS klesá zhruba o **80 metrů za den** (při vysoké sluneční aktivitě až o 150 metrů denně). Proto musí ruské nákladní loď Progress či americké Cygnus pravidelně zažehovat své motory a stanici vytahovat zpět nahoru (*reboost*).

Řešený příklad 12.3: Sluneční plachetnice LightSail – fotonový tah a zrychlení

Mise LightSail organizace The Planetary Society prokázala možnost kosmického pohonu pouze pomocí tlaku slunečního záření.

Zadání: Pro solární plachetnici s hliníkovou reflexní fólií o ploše 32 m^2 a celkové hmotnosti $5,0\text{ kg}$ vypočítejte:

1. Tahovou sílu fotonů při kolmém dopadu záření na plachtu ve vzdálenosti 1 AU (odrazivost $\rho_R = 0,90$).
2. Zrychlení sondy.
3. Kumulativní přírůstek rychlosti Δv za 30 dní stálého osvětlení.

Výpočet:

1. Sluneční tlak záření ve vzdálenosti 1 AU:

$$P_{\odot} = \frac{S_{\odot}}{c} = \frac{1\,361}{299\,792\,458} \approx 4,54 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$$

1. Fotonová síla působící na plachtu:

$$F_{\text{SRP}} = P_{\odot} \cdot (1 + \rho_R) \cdot A = 4,54 \times 10^{-6} \cdot (1 + 0,90) \cdot 32 \text{ m}^2$$

$$F_{\text{SRP}} = 4,54 \times 10^{-6} \cdot 1,90 \cdot 32 \approx \mathbf{2,76 \times 10^{-4} \text{ N} = 0,276 \text{ mN}}$$

1. Zrychlení plachetnice:

$$a_{\text{SRP}} = \frac{F_{\text{SRP}}}{m} = \frac{2,76 \times 10^{-4} \text{ N}}{5,0 \text{ kg}} \approx \mathbf{5,52 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2 = 0,0552 \text{ mm/s}^2}$$

1. Nárůst rychlosti za 1 den (86 400 s):

$$\Delta v_{\text{den}} = a_{\text{SRP}} \cdot 86\,400 = 5,52 \times 10^{-5} \cdot 86\,400 \approx \mathbf{4,77 \text{ m/s za den}}$$

1. Kumulativní zrychlení za 30 dní nepřetržitého plachtění:

$$\Delta v_{30 \text{ dní}} = 30 \cdot 4,77 \text{ m/s} \approx \mathbf{143 \text{ m/s} \approx 515 \text{ km/h}}$$

Bez spálení jediné kapky raketového paliva získala plachetnice během jednoho měsíce rychlost přes 500 km/h pouze díky tlaku čistého slunečního světla.

☑ SHRNUTÍ 12. KAPITOLY: PŘEHLED ORBITÁLNÍCH PERTURBACÍ

- **Zploštění Země** ($J_2 \approx 1,0826 \times 10^{-3}$): Způsobuje precesi uzlové přímky $\dot{\Omega}$ (využito pro heliosynchronní dráhy SSO) a stáčení perigea $\dot{\omega}$.
- **Kritická inklinace** ($63,435^\circ$ a $116,565^\circ$): Sklon, při němž se perigeum nestáčí ($\dot{\omega} = 0$), klíčový pro dráhy Molnija a Tundra.
- **Odpor atmosféry na LEO**: Způsobuje orbitální rozpad (ISS klesá o cca 80 m denně) doprovázený paradoxním nárůstem oběžné rychlosti.
- **Tlak slunečního záření** ($4,54 \mu\text{Pa}$): Umožňuje bezpalivový pohon slunečních plachetnic a vyvolává periodické oscilace excentricity.
- **Lunisolární rušení na GEO**: Zvedá inklinaci geostacionárních družic tempem $\sim 0,85^\circ$ ročně a vyžaduje masivní korekce North-South.

Kapitola 13: Sledování družic v praxi a formát TLE elementů

Když za jasné bezměsíčné noci pohlédnete k obloze, spatříte tichý zázrak moderní techniky: zářící bílý bod, jasnější než většina hvězd, se plynule a neslyšně pohybuje mezi souhvězdími. Není to letadlo ani meteorit – právě vám nad hlavou prolétá Mezinárodní vesmírná stanice (ISS), Hubbleův kosmický dalekohled nebo některý z tisíců satelitů sítě Starlink.

Jak je možné, že váš chytrý telefon nebo astronomický software dokáže s přesností na jedinou sekundu předpovědět, kdy se tato tečka vynoří nad západním obzorem, jakou maximální výšku nad horizontem dosáhne a kdy přesně vstoupí do zemského stínu a zhasne?

Tato kapitola představuje most mezi teoretickou nebeskou mechanikou a každodenní inženýrskou a pozorovatelskou praxí. Seznámíme se s celosvětově standardizovaným formátem **dvouřádkových dráhových elementů (TLE)**, analytickým perturbacním modelem **SGP4**, převodem souřadnic do topocentrického systému pozorovatele a astronomickými časovými škálami.

13.1 Formát dvouřádkových elementů (TLE)

Americké velitelství pro vesmír (US Space Command, dříve NORAD) sleduje radary a optickými teleskopy desítky tisíc objektů na oběžné dráze. Aby bylo možné oběžné dráhy efektivně sdílet s vědeckými institucemi, kosmonauty i amatérskými astronomy, vznikl v 60. letech 20. století v éře 80sloupcových děrných štítků IBM standardní formát **dvouřádkových elementů** (anglicky *Two-Line Element Set*, zkratka **TLE**).

Formát TLE sestává ze záhlaví s názvem objektu a dvou textových řádků o pevné délce **přesně 69 znaků** (včetně mezer).

Ukázka reálného TLE záznamu stanice ISS: `` `ISS (ZARYA) 1 25544U 98067A 24065.51782531 .00014835 00000-0 26815-3 0 9993 2 25544 51.6416 291.1258 0005432 124.8721 235.2574 15.49815344442118 `` `

Podrobný rozbor 1. řádku TLE (sloupec po sloupci)

Sloupec	Formát	Význam a popis položky	Hodnota v ukázce
01	`1`	Číslo řádku (vždy 1)	`1`
03-07	`25544`	Katalogové číslo satelitu (NORAD SATCAT ID)	`25544` (ISS)
08	`U`	Bezpečnostní klasifikace (`U` = Unclassified / veřejné)	`U`
10-17	`98067A`	Mezinárodní označení COSPAR (rok-start-díl)	`98067A` (rok 1998, 67. start, díl A)
19-32	`24065.51782531`	Epocha (rok a desetinný den roku v UTC)	Rok 2024, 65. den, 0,51782531 dne
34-43	`.00014835`	První derivace středního pohybu dělená 2 ($\dot{n}/2$) [oběh/den ²] Brzdění atmosférou	
45-52	`00000-0`	Druhá derivace středního pohybu dělená 6 ($\ddot{n}/6$)	$0,00000 \times 10^0$
54-61	`26815-3`	Koeficient odporu BSTAR (B^*) [$R_{\oplus}^{-1}$]	$+0,26815 \times 10^{-3}$
63	`0`	Typ efemeridy (vždy 0 pro model SGP4)	`0`
65-68	`999`	Číslo sady elementů (inkrementuje se při aktualizaci)	`999`
69	`3`	Kontrolní součet 1. řádku (modulo 10)	`3`

Poznámka k zápisu exponentu: Číslo `26815-3` znamená v kompaktním TLE formátu $0,26815 \times 10^{-3}$. První znak je znaménko mantisy, následuje 5 cifer desetinné části a poslední dva znaky představují znaménko a mocninu desítky.

Podrobný rozbor 2. řádku TLE (šest Keplerových elementů)

Sloupec	Formát	Význam a popis položky	Hodnota v ukázce
01	`2`	Číslo řádku (vždy 2)	`2`
03-07	`25544`	Katalogové číslo satelitu (shodné s řádkem 1)	`25544`
09-16	`51.6416`	Sklon dráhy (i) ve stupních	$51,6416^\circ$
18-25	`291.1258`	Rektascenze vzestupného uzlu (Ω) [stupně]	$291,1258^\circ$
27-33	`0005432`	Numerická excentricita (e) (desetinná tečka vynechána) $e = 0,0005432$	

Sloupce	Formát	Význam a popis položky	Hodnota v ukázce
35–42	`124.8721`	Argument perigea (ω) ve stupních	124,8721°
44–51	`235.2574`	Střední anomálie (M) ve stupních v čase epochy	235,2574°
53–63	`15.49815344`	Střední pohyb (n) [oběhů za den]	15,49815344 ob/den
64–68	`44211`	Číslo oběhu od okamžiku vypuštění (revoluce)	44 211
69	`8`	Kontrolní součet 2. řádku (modulo 10)	`8`

13.2 Algoritmus ověření kontrolního součtu (Checksum Modulo 10)

Kontrolní součet na pozici 69 každého řádku chrání záznam před poškozením při přenosu. Algoritmus je definován takto:

- Sečtou se hodnoty všech numerických cifer (`0` až `9`) na řádku od sloupce 1 do sloupce 68.
- Znak minus (`-`) má přiřazenou číselnou hodnotu **1**.
- Všechny ostatní znaky (písmena, mezery, tečky, znak plus `+`) mají hodnotu **0**.
- Celkový součet se vydělí deseti a zbytek po dělení (**součet modulo 10**) musí přesně odpovídat kontrolní číslici na pozici 69:

$$\text{Checksum} = \left(\sum \text{cifry} + \sum \text{minusy} \right) \pmod{10}$$

13.3 Výpočet orbitálních parametrů z elementů TLE

Ze středního pohybu n [oběhů/den] a excentricity e můžeme okamžitě odvodit klíčové geometrické a časové parametry oběžné dráhy:

1. Doba jednoho oběhu (perioda T)

Jeden den má $24 \times 60 = 1\,440$ minut (86 400 sekund). Oběžná perioda činí:

$$T = \frac{1\,440}{n} [\text{minut}] = \frac{86\,400}{n} [\text{sekund}]$$

2. Velká poloosa (a)

Střední pohyb převedeme na úhlovou rychlost v radiánech za sekundu:

$$n_{\text{rad/s}} = n \cdot \frac{2\pi}{86\,400}$$

Z 3. Keplerova zákona vyjádříme velkou poloosu a :

$$a = \sqrt[3]{\frac{\mu_{\oplus}}{n_{\text{rad/s}}^2}}$$

3. Nadmořská výška perigea (h_p) a apogea (h_a)

Vzdálenost perigea a apogea od středu Země:

$$r_p = a(1 - e), \quad r_a = a(1 + e)$$

Po odečtení středního poloměru zemského elipsoidu ($R_{\oplus} = 6\,371$ km či rovníkového $R_{eq} = 6\,378,137$ km) dostáváme skutečnou nadmořskou výšku:

$$h_p = r_p - R_{\oplus}$$

$$h_a = r_a - R_{\oplus}$$

13.4 Perturbační model SGP4 / SDP4: Mean vs. Osculating Elements

Zásadní varování pro orbitální navigátory: Čísla uvedená v TLE záznamu nejsou okamžitými (osculačními) keplerovskými elementy!

Pokud byste vzali elementy z TLE a dosadili je do běžných dvouhadinových Keplerových rovnic, vaše předpověď polohy družice by se během několika dní rozešla se skutečností o stovky kilometrů. Hodnoty v TLE jsou **střední elementy (mean elements)** odvozené specifickou analytickou teorií, ze kterých byly matematicky odfiltrovány krátkoperiodické gravitační oscilace.

Abychom získali skutečnou polohu družice v daném čase t , musíme TLE zpracovat standardizovaným algoritmem: **SGP4 (Simplified General Perturbations-4)**: Vyvinutý Felixem Hootsem a Ronaldem Roehrichem v roce 1980 pro tělesa na nízkých a středních drahách s oběžnou periodou $T < 225$ minut. Model započítává zemské zploštění (J_2, J_3, J_4), atmosférický odpor pomocí koeficientu B^*A a základní gravitační vlivy.

- **SDP4 (Simplified Deep Space Perturbations-4)**: Používá se pro tělesa s vysokou oběžnou periodou ($T \geq 225$ minut, např. Molnija, MEO, GEO), kde započítává rezonanční členy a gravitační slapové působení Měsíce a Slunce třetího tělesa.

13.5 Transformace do topocentrických souřadnic pozorovatele (Azimut, Elevace)

Aby mohl pozemní pozorovatel nebo automatická sledovací anténa družici zaměřit, musí se polohový vektor družice přepočítat ze souřadného systému modelu SGP4 do místních horizontálních souřadnic:

''' TEME (Inerciální systém SGP4) | ▼ (Rotace o hvězdný čas GST) ECEF (Zemský rotující systém) | ▼ (Posun o GPS pozici pozorovatele) SEZ / ENU (Místní topocentrický systém) | ▼ (Sféry: Azimut, Elevace, Vzdálenost) [Az, El, ρ] (Pozorovatel na zemi) '''

1. **Soustava TEME (True Equator, Mean Equinox)**: Výstupní geocentrický inerciální vektor $[\vec{r}, \vec{v}]$ z modelu SGP4.
2. **Soustava ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed)**: Rotace kolem osy z o greenwichský hvězdný čas θ_{GST} :

$$\vec{r}_{ECEF} = R_z(\theta_{GST})\vec{r}_{TEME}$$

3. **Topocentrický vektor polohy $\vec{\rho}$** : Rozdíl mezi polohou družice $\vec{r}_{ECEF}$ a geocentrickou polohou pozorovatele $\vec{R}_{obs}$:

$$\vec{\rho}_{ECEF} = \vec{r}_{ECEF} - \vec{R}_{obs}$$

4. **Transformace do horizontální roviny (Sever, Východ, Zenit)**: Vektor $\vec{\rho}$ promítneme pomocí zeměpisné šířky ϕ_{obs} a délky λ_{obs} pozorovatele do složek $(\rho_{South}, \rho_{East}, \rho_{Zenith})$.

5. **Horizontální úhly: * Šikmá vzdálenost (Range): $\rho = |\vec{\rho}| = \sqrt{\rho_S^2 + \rho_E^2 + \rho_Z^2}$ * Elevace (výška nad obzorem):**

$$\sin(El) = \frac{\rho_Z}{\rho} \implies El = \arcsin\left(\frac{\rho_Z}{\rho}\right)$$

(Družice je nad obzorem, pokud $El > 0^\circ$.) * **Azimut (úhel od severu po směru hodin):**

$$\tan(Az) = \frac{\rho_E}{-\rho_S} \implies Az = \text{atan2}(\rho_E, -\rho_S)$$

13.6 Astronomické časové systémy a Juliánské datum

Přesná nebeská mechanika vyžaduje precizní definici času, protože zemská rotace není vlivem slapového tření a pohybů magmatu dokonale stabilní:

- **TAI (Mezinárodní atomový čas)**: Čistě rovnoměrná časová škála založená na statistickém průměru stovek cesiových atomových hodin v laboratořích BIPM.
- **UT1 (Univerzální čas)**: Čas svázaný s reálným fyzickým natočením planety Země vůči kvasarům.
- **UTC (Koordinovaný světový čas)**: Občanský standard. Běží rovnoměrným atomovým tempem TAI, ale v případě potřeby se vkládají **přestupné sekundy**, aby rozdíl $|UTC - UT1| < 0,9$ s. V současnosti platí:

$$\text{TAI} - \text{UTC} = 37 \text{ sekund}$$

- **TT (Terestrický čas):** Teoretický efemeridový čas používaný pro pohyb nebeských těles: $\text{TT} = \text{TAI} + 32,184 \text{ s}$.

Výpočet Juliánského data (JD)

Pro vyloučení nepravidelností kalendářních měsíců a přestupných let zavedli astronomové **Juliánské datum (JD)** – kontinuální počítadlo dnů a jejich zlomků od poledne 1. ledna roku 4713 př. n. l.

Algoritmus převodu gregoriánského kalendářního data (rok Y , měsíc M , den D včetně desetinného zlomku času):

1. Pokud je měsíc $M = 1$ nebo $M = 2$, nahradíme $Y = Y - 1$ a $M = M + 12$.
2. Určíme korekci gregoriánského kalendáře:

$$A = \lfloor Y/100 \rfloor, \quad B = 2 - A + \lfloor A/4 \rfloor$$

3. Juliánské datum vypočteme vzorcem:

$$\text{JD} = \lfloor 365,25(Y + 4716) \rfloor + \lfloor 30,6001(M + 1) \rfloor + D + B - 1524,5$$

Řešený příklad 13.1: Kompletní manuální dekódování a výpočet ISS z TLE

Zadání: Z reálného TLE záznamu Mezinárodní vesmírné stanice: ``1 25544U 98067A 24065.51782531.00014835 00000-0 26815-3 0 9993 2 25544 51.6416 291.1258 0005432 124.8721 235.2574 15.49815344442118 ``

1. Vypočítejte oběžnou dobu T v minutách a sekundách.
2. Vypočítejte velkou poloosu a , výšku perigea h_p a apogea h_a ($R_{\oplus} = 6\,371,0 \text{ km}$).
3. Proveďte kompletní ověření kontrolního součtu pro řádek 2.

Výpočet:

1. Oběžná doba ze středního pohybu $n = 15,49815344 \text{ ob/den}$:

$$T = \frac{1\,440 \text{ min}}{15,49815344} \approx \mathbf{92,9143 \text{ minut}} = 92 \text{ min} + (0,9143 \cdot 60) \text{ s} \approx \mathbf{92 \text{ minut a } 55 \text{ sekund}}$$

1. Velká poloosa: Úhlová rychlost:

$$n_{\text{rad/s}} = 15,49815344 \cdot \frac{2\pi}{86\,400} = 15,49815344 \cdot 7,272205 \times 10^{-5} \approx 0,001127057 \text{ rad/s}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{\mu}{n_{\text{rad/s}}^2}} = \sqrt[3]{\frac{398\,600,4418}{(0,001127057)^2}} = \sqrt[3]{\frac{398\,600,4418}{1,270258 \times 10^{-6}}} \approx \sqrt[3]{3,137948 \times 10^{11}} \approx \mathbf{6\,795,33 \text{ km}}$$

1. Výška apsid ($e = 0,0005432$):

$$r_p = a(1 - e) = 6\,795,33 \cdot (1 - 0,0005432) = 6\,795,33 \cdot 0,9994568 \approx 6\,791,64 \text{ km}$$

$$h_p = r_p - R_{\oplus} = 6\,791,64 - 6\,371,0 = \mathbf{420,64 \text{ km}}$$

$$r_a = a(1 + e) = 6\,795,33 \cdot (1 + 0,0005432) = 6\,795,33 \cdot 1,0005432 \approx 6\,799,02 \text{ km}$$

$$h_a = r_a - R_{\oplus} = 6\,799,02 - 6\,371,0 = \mathbf{428,02 \text{ km}}$$

1. Ověření kontrolního součtu řádku 2: Řádek 2: `2 25544 51.6416 291.1258 0005432 124.8721 235.2574 15.49815344442118`
Sečteme všechny číslice od pozice 1 do 68:

- Pozice 1: 2
- Pozice 3-7: $2 + 5 + 5 + 4 + 4 = 20$
- Pozice 9-16: $5 + 1 + 6 + 4 + 1 + 6 = 23$
- Pozice 18-25: $2 + 9 + 1 + 1 + 2 + 5 + 8 = 28$
- Pozice 27-33: $0 + 0 + 0 + 5 + 4 + 3 + 2 = 14$

- Pozice 35–42: $1 + 2 + 4 + 8 + 7 + 2 + 1 = 25$
- Pozice 44–51: $2 + 3 + 5 + 2 + 5 + 7 + 4 = 28$
- Pozice 53–63: $1 + 5 + 4 + 9 + 8 + 1 + 5 + 3 + 4 + 4 = 44$
- Pozice 64–68: $4 + 4 + 2 + 1 + 1 = 12$ Celkový součet:

$$S = 2 + 20 + 23 + 28 + 14 + 25 + 28 + 44 + 12 = 198$$

Zbytek po dělení deseti:

$$\text{Checksum} = 198 \pmod{10} = 8$$

Vypočtená hodnota 8 přesně odpovídá znaku na 69. pozici řádku 2. Záznam je stoprocentně integritní.

Řešený příklad 13.2: Kompletní dekódování TLE Hubbleova dalekohledu (HST)

Hubbleův kosmický dalekohled (HST) byl vynesena raketoplánem Discovery (mise STS-31) na podstatně vyšší oběžnou dráhu než stanice ISS.

Záznam TLE: ``HST120580U 90037B 24065.41235648 .00000854 00000-0 45821-4 0 9997 2 20580 28.4695 85.2341 0002845 275.4123 84.5126 15.09245128854120 `` **Zadání:**

1. Dekódujte mezinárodní označení COSPAR a vysvětlete sklon dráhy $i = 28,4695^\circ$.
2. Vypočítejte oběžnou dobu T , velkou poloosu a a průměrnou výšku nad zemským povrchem.
3. Porovnejte aerodynamické brzdění HST a ISS.

Výpočet a rozbor:

1. **COSPAR kód '90037B':** Rok startu 1990, 37. start roku (raketoplán Discovery STS-31 měl označení 1990-037A a vypuštěný teleskop Hubble 1990-037B). Sklon dráhy $i = 28,47^\circ$ přesně odpovídá zeměpisné šířce kosmodromu Kennedyho vesmírného střediska na Floridě – raketoplán letěl přímo na východ, aby maximálně využil rotaci Země.
2. **Oběžná doba:**

$$T = \frac{1\,440}{15,09245128} \approx 95,412 \text{ minut} \approx 95 \text{ minut a } 25 \text{ sekund}$$

3. **Velká poloosa:**

$$n_{\text{rad/s}} = 15,09245128 \cdot \frac{2\pi}{86\,400} \approx 0,00109755 \text{ rad/s}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{398\,600,4418}{(0,00109755)^2}} \approx \sqrt[3]{3,30894 \times 10^{11}} \approx 6\,916,5 \text{ km}$$

4. **Výška oběžné dráhy ($e = 0,0002845$):**

$$h_{\text{střední}} = a - R_{\oplus} = 6\,916,5 - 6\,371,0 = 545,5 \text{ km}$$

Perigeum: $h_p = 6\,916,5 \cdot (1 - 0,0002845) - 6\,371 \approx 543,5 \text{ km}$. Apogeum: $h_a \approx 547,5 \text{ km}$.

5. **Srovnání brzdění:** Koefficient B^* pro HST činí $0,45821 \times 10^{-4} R_{\oplus}^{-1}$, zatímco pro ISS činí $0,26815 \times 10^{-3} R_{\oplus}^{-1}$. Odporové brzdění HST je téměř **6krát nižší než u ISS**, což je dáno vyšší nadmořskou výškou (545 km vs. 420 km), kde je hustota atmosféry přibližně desetkrát menší.

Řešený příklad 13.3: Výpočet Juliánského data (JD) pro zadané datum a čas

Zadání: Vypočítejte přesné Juliánské datum (JD) pro okamžik **5. března 2024 ve 12:00:00 UTC** krok za krokem podle standardního astronomického algoritmu. **Výpočet:**

1. **Vstupní kalendářní údaje:** Rok $Y = 2024$, Měsíc $M = 3$. Čas 12:00:00 UTC představuje přesně polovinu dne: $12/24 = 0,500000$. Den včetně zlomku: $D = 5 + 0,500000 = 5,5$.

1. **Podmínka měsíce:** Protože $M = 3 > 2$, hodnoty Y a M zůstávají beze změny ($Y = 2024$, $M = 3$).

1. **Korekce gregoriánského kalendáře (B):**

$$A = \lfloor Y/100 \rfloor = \lfloor 2024/100 \rfloor = \mathbf{20}$$

$$B = 2 - A + \lfloor A/4 \rfloor = 2 - 20 + \lfloor 20/4 \rfloor = -18 + 5 = \mathbf{-13}$$

1. **Výpočet jednotlivých členů vzorce:**

◦ Členroků:

$$\lfloor 365,25 \cdot (Y + 4716) \rfloor = \lfloor 365,25 \cdot (2024 + 4716) \rfloor = \lfloor 365,25 \cdot 6740 \rfloor = \lfloor 2\,461\,785,0 \rfloor = \mathbf{2\,461\,785}$$

◦ Členměsíců:

$$\lfloor 30,6001 \cdot (M + 1) \rfloor = \lfloor 30,6001 \cdot (3 + 1) \rfloor = \lfloor 30,6001 \cdot 4 \rfloor = \lfloor 122,4004 \rfloor = \mathbf{122}$$

2. **Sestavení celkového Juliánského data:**

$$JD = 2\,461\,785 + 122 + 5,5 + (-13) - 1524,5$$

$$JD = 2\,461\,907 + 5,5 - 13 - 1524,5 = 2\,461\,899,5 - 1524,5 = \mathbf{2\,460\,375,000000}$$

Výsledné Juliánské datum pro 5. března 2024 ve 12:00:00 UTC činí přesně $JD\ 2\,460\,375,0$.

☒ SHRNUTÍ 13. KAPITOLY: PRAKTICKÉ SLEDOVÁNÍ DRUŽIC A TLE

- **Struktura TLE:** Dva řádky po 69 znacích obsahující identifikační data NORAD, časovou epochu a střední keplerovské elementy.
- **Kontrolní součet modulo 10:** Sečtením všech cifer (minus = 1) a zbytku po dělení deseti lze okamžitě ověřit integritu záznamu.
- **Výpočet dráhy:** Ze středního pohybu n přímo odvozujeme periodu $T = 1\,440/n$, velkou poloosu a i výšky perigea a apogea.
- **Perturbační model SGP4:** Zajišťuje analytický převod středních elementů TLE na skutečné osculační souřadnice družice.
- **Topocentrické souřadnice:** Transformací přes ECEF získává pozorovatel na zemském povrchu přímý azimut a elevaci na obloze.
- **Juliánské datum:** Spojité počítadlo dnů eliminující nepravidelnosti běžného kalendáře pro přesné výpočty efemerid.

Dodatek A: Základní matematicko–fyzikální minimum a vektorový aparát

Vítejte ve „strojovně“ nebeské mechaniky. V hlavním textu knihy jsme se záměrně soustředili na intuici, fyzikální podstatu jevů a myšlenkové pokusy. Skutečná kosmonautika a moderní astrodynamika se však neobejdou bez precizního a exaktního matematického aparátu.

Tento dodatek slouží jako **komplexní a přehledná referenční příručka**. V první části přináší ucelený tahák všech klíčových vzorců celé knihy rozdělený do tematických bloků, doplněný o tabulky proměnných, jejich fyzikální rozměry v soustavě SI a praktický význam. V druhé části představuje důkladný a názorný výklad vektorového a maticového počtu – od stavových vektorů a Rungeova–Lenzova vektoru až po Eulerovy rotační matice, transformační algoritmy a Clohessyho–Wiltshireovy rovnice relativního pohybu.

A.1 Přehled klíčových vzorců nebeské mechaniky

1. Gravitační zákon a gravitační parametr

Gravitační síla je univerzální přitažlivá síla působící mezi libovolnými dvěma hmotnými tělesy:

$$F_g = G \frac{M \cdot m}{r^2}, \quad \mu = G \cdot M, \quad g(r) = \frac{\mu}{r^2}$$

Symbol	Veličina	Jednotka (SI)	Fyzikální význam a popis
F_g	Gravitační síla	N	Přitažlivá síla působící na spojnicí středů těles.
G	Gravitační konstanta	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	CODATA: $6,67430 \times 10^{-11}$.
M	Hmotnost centrálního tělesa	kg	Hmotnost planety, měsíce či hvězdy.
m	Hmotnost obíhajícího tělesa	kg	Hmotnost družice (ve většině rovnic se vykrátí).
r	Radiální vzdálenost	m (příp. km)	Vzdálenost těles od společného barycentra či středu.
μ	Gravitační parametr	m^3/s^2 (km^3/s^2)	Součin GM ; fundamentální gravitační konstanta tělesa.
$g(r)$	Gravitační zrychlení	m/s^2	Zrychlení volného pádu ve vzdálenosti r od těžiště.

2. Kosmické rychlosti

Mezní rychlosti určující typ kuželosečky v gravitačním poli centrálního tělesa:

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}, \quad v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2} \cdot v_c, \quad v_3 = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 v_{orb}^2 + v_{esc,\oplus}^2}$$

Symbol	Veličina	Jednotka	Fyzikální význam a popis
v_c	1. kosmická rychlost (kruhová)	m/s (km/s)	Rychlost pro udržení kruhové dráhy o poloměru r (u Země 7,91 km/s).
v_{esc}	2. kosmická rychlost (úniková)	m/s (km/s)	Minimální rychlost k překonání gravitace po parabole (u Země 11,19 km/s).
$\sqrt{2}$	Poměrový faktor	bezrozměrné	Zvýšení rychlosti o 41,4 % změnění uzavřenou kružnici v otevřenou parabolu.
v_3	3. kosmická rychlost	km/s	Rychlost nutná k opuštění Sluneční soustavy z povrchu Země (16,67 km/s).

3. Specifická mechanická energie a rovnice živých sil (Vis-Viva)

Zákon zachování mechanické energie pro jeden kilogram hmotnosti tělesa ($\mathcal{E} = E/m$):

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Symbol	Veličina	Jednotka	Fyzikální význam a popis
$\mathcal{E}$	Specifická energie dráhy	J/kg (m ² /s ²)	Součet kinetické a potenciální energie; pro elipsu je vždy záporná.
v	Okamžitá orbitální rychlost	m/s (km/s)	Skutečná rychlost družice v daném bodě dráhy.
a	Velká poloosa	m (km)	Polovina hlavní osy elipsy; přímo určuje celkovou energii dráhy.
r	Okamžitý průvodič	m (km)	Vzdálenost družice od těžiště planety.

- Rychlost v pericentru (perigeu, $r_p = a(1 - e)$): $v_p = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{1+e}{1-e}}$
- Rychlost v apocentru (apogeu, $r_a = a(1 + e)$): $v_a = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{1-e}{1+e}}$

4. Specifický moment hybnosti a Keplerovy zákony

Zákon zachování momentu hybnosti pro jeden kilogram hmotnosti tělesa ($\vec{h} = \vec{L}/m$):

$$h = |\vec{r} \times \vec{v}| = r \cdot v_{\perp} = \sqrt{\mu \cdot p} = \sqrt{\mu \cdot a(1 - e^2)}$$

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} = \text{konstanta}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}$$

Symbol	Veličina	Jednotka	Fyzikální význam a popis
h	Specifický moment hybnosti	m ² /s (km ² /s)	Invariant nerušeného pohybu; kolmý k rovině dráhy.
$v_{\perp}$	Tangenciální složka rychlosti	m/s	Složka rychlosti kolmá na okamžitý průvodič $\vec{r}$.
p	Parametr kuželosečky	m (km)	Šířka kuželosečky v ohnisku ($p = a(1 - e^2) = h^2/\mu$).
e	Numerická excentricita	bezrozměrně	Tvar dráhy ($e = 0$ kruh, $0 < e < 1$ elipsa, $e = 1$ parabola, $e > 1$ hyperbola).
θ	Pravá anomálie	stupně / rad	Úhel okamžité polohy měřený od perigea v rovině oběhu.
dA/dt	Plošná rychlost	m ² /s	Plocha opsaná průvodičem za sekundu (2. Keplerův zákon).
T	Perioda oběhu	sekundy	Doba jednoho oběhu o 360° (3. Keplerův zákon).

5. Keplerova časová rovnice a Newtonova–Raphsonova metoda

Vztah mezi fyzikálním časem t a polohovým úhlem θ na eliptické dráze:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{2\pi}{T}, \quad M = n(t - t_p), \quad M = E - e \sin E, \quad \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

Rovnice $M = E - e \sin E$ je transcendentní. Pro nalezení excentrické anomálie E ze zadaného času (střední anomálie M) se používá **Newtonova–Raphsonova iterační metoda**:

$$E_{k+1} = E_k - \frac{f(E_k)}{f'(E_k)} = E_k - \frac{E_k - e \sin E_k - M}{1 - e \cos E_k}$$

Praktická ukázka numerické konvergence: Pro dráhu s excentricitou $e = 0,50$ a střední anomálií $M = 1,000000$ rad:

- **Počáteční odhad** ($E_0 = M$): $E_0 = 1,000000$ rad
- **1. iterace**: $E_1 = 1,000000 - \frac{1,0-0,5 \sin(1,0)-1,0}{1-0,5 \cos(1,0)} = 1,000000 - \frac{-0,420735}{0,729844} \approx 1,576472$ rad
- **2. iterace**: $E_2 = 1,576472 - \frac{1,576472-0,5 \sin(1,576472)-1,0}{1-0,5 \cos(1,576472)} \approx 1,499960$ rad
- **3. iterace**: $E_3 \approx 1,498701$ rad
- **4. iterace**: $E_4 \approx 1,498701$ rad (shoda na 6 platných míst za pouhé 3 až 4 kroky!).

6. Ciolkovského raketová rovnice a rozpočet Δv

Zákon zachování hybnosti reaktivního pohonu odvozený Konstantinem Ciolkovským:

$$\Delta v = v_e \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) = I_{sp} \cdot g_0 \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right), \quad m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}}$$

- **Hohmannova přechodová elipsa:**

$$a_{\text{trans}} = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right), \quad \Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right)$$

$$t_{\text{trans}} = \pi \sqrt{\frac{a_{\text{trans}}^3}{\mu}}$$

- **Změna sklonu dráhy (inklinace):**

$$\Delta v = 2v \sin \left(\frac{\Delta i}{2} \right)$$

- **Gravitační prak (hyperbolický průlet):**

$$\sin \left(\frac{\delta}{2} \right) = \frac{1}{e_{\text{hyp}}} = \frac{1}{1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu_p}}, \quad \Delta v = 2v_\infty \sin \left(\frac{\delta}{2} \right)$$

7. Orbitální perturbace a problém tří těles

Poruchové síly působící na reálné dráhy:

- **Precese uzlu zploštěním** J_2 : $\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_{eq}}{p} \right)^2 n \cos(i)$
- **Stáčení perigea** J_2 : $\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_{eq}}{p} \right)^2 n (5 \cos^2 i - 1)$
- **Kritická inklinace**: $5 \cos^2 i - 1 = 0 \implies \cos i = \pm 1/\sqrt{5} \implies i = 63,435^\circ$ a $116,565^\circ$
- **Aerodynamické brzdění**: $a_D = \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{C_D A}{m}$, úbytek velké poloosy za oběh: $\Delta a_{\text{rev}} = -2\pi \frac{C_D A}{m} \rho a^2$
- **Tlak slunečního záření**: $a_{\text{SRP}} = \frac{S_\odot}{c} (1 + \rho_R) \frac{A}{m}$
- **Jacobiho integrál (CR3BP)**: $C = 2\Omega(x, y, z) - v^2 = \text{konst.}$
- **Vzdálenost kolineárních bodů L1, L2**: $r_{L1, L2} \approx R \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}$

A.2 Vektory lidsky: Matematický aparát v trojrozměrném vesmíru

Skutečný vesmír má tři prostorové rozměry. Kosmická loď má v každém okamžiku konkrétní polohu v trojrozměrném prostoru a letí konkrétním směrem. Základním kamenem moderní astrodynamiky je **stavový vektor**, který sestává z šesti nezávislých skalárních složek:

$$\text{Stavový vektor } \mathbf{X}(t) = [\vec{r}(t), \vec{v}(t)]^T = [x, y, z, v_x, v_y, v_z]^T$$

Znáte-li těchto šest čísel v jediném časovém okamžiku t , dokážete z nich pomocí Newtonových zákonů zrekonstruovat kompletní minulost i budoucnost dráhy a vypočítat všech 6 klasických Keplerových elementů ($a, e, i, \Omega, \omega, \theta$).

Velikost vektoru (Eukleidovská norma)

Vzdálenost od středu tělesa a celkovou rychlost letu spočítáme pomocí trojrozměrné Pythagorovy věty:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Skalární součin ($\vec{a} \cdot \vec{b}$): Test kolmosti a radiální rychlost

Skalární součin dvou vektorů je definován jako součet součinů odpovídajících složek, což odpovídá součinu jejich velikostí a kosinu sevřeného úhlu α :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Význam v orbitální mechanice:

- **Práce síly a energie:** Elementární práce je $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Je-li síla kolmá k rychlosti ($\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$), nekoná žádnou mechanickou práci a nemění velikost kinetické energie.
- **Výpočet radiální rychlosti (v_r):** Vynásobením polohového vektoru $\vec{r}$ a rychlostního vektoru $\vec{v}$ získáme radiální složku rychlosti (rychlost vzdalování či přibližování):

$$v_r = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r}$$

* Pokud $\vec{r} \cdot \vec{v} > 0$: Družice se **vzdaluje** od planety a stoupá směrem k apocentru. * Pokud $\vec{r} \cdot \vec{v} < 0$: Družice **padá** k planetě a blíží se k pericentru. * Pokud $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$: Družice se nachází přesně v pericentru, v apocentru, nebo se pohybuje po ideální kružnici.

Vektorový součin ($\vec{a} \times \vec{b}$): Normála roviny a moment hybnosti

Vektorový součin dvou vektorů vytváří **zcela nový vektor** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, který je kolmý k oběma původním vektorům současně a jeho orientace se řídí pravidlem pravé ruky. Analyticky jej vyjadřujeme formálním determinantem matice:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Velikost tohoto vektoru $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$ odpovídá plošnému obsahu rovnoběžníku sevřeného vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

Klíčové vektory odvozené z vektorového součinu:

1. **Vektor specifického momentu hybnosti ($\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$):** Tento vektor míří kolmo vzhůru z oběžné roviny jako pevná osa rotace. Jeho velikost $h = |\vec{h}|$ určuje parametr kuželosečky ($p = h^2/\mu$) a jeho složky přímo definují sklon dráhy (inklinaci):

$$\cos(i) = \frac{h_z}{h}$$

2. **Vektor uzlové přímky ($\vec{n} = \vec{k} \times \vec{h}$):** Vektorový součin jednotkového vektoru zemské rotační osy $\vec{k} = (0, 0, 1)$ a vektoru momentu hybnosti $\vec{h}$ vytvoří vektor $\vec{n} = (-h_y, h_x, 0)$, který leží v rovině rovníku a neomylně ukazuje směrem k **vzestupnému uzlu** (Ω):

$$\cos(\Omega) = \frac{n_x}{|\vec{n}|} = \frac{-h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}$$

Laplaceův–Rungeův–Lenzův vektor excentricity ($\vec{e}$)

V čistém Newtonově poli $1/r^2$ existuje kromě energie a momentu hybnosti další fundamentální vektorový integrál pohybu:

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu}(\vec{v} \times \vec{h}) - \frac{\vec{r}}{r}$$

Důkaz stálosti v čase ($d\vec{e}/dt = 0$): Zderivujeme vektor $\vec{e}$ podle času:

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{1}{\mu} \left(\dot{\vec{v}} \times \vec{h} + \vec{v} \times \dot{\vec{h}} \right) - \frac{\dot{\vec{r}}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2}$$

Protože moment hybnosti je konstantní, platí $\dot{\vec{h}} = 0$. Z Newtonova gravitačního zákona dosadíme zrychlení $\dot{\vec{v}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}$ a moment hybnosti $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$:

$$\dot{\vec{v}} \times \vec{h} = \left(-\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \right) \times (\vec{r} \times \vec{v}) = -\frac{\mu}{r^3} [(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{v}] = -\frac{\mu}{r^3} (r\dot{r}\vec{r} - r^2\vec{v})$$

Dosadíme zpět:

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\mu\dot{r}}{r^2}\vec{r} + \frac{\mu}{r}\vec{v} \right) - \left(\frac{\vec{v}}{r} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} \right) = \mathbf{0}$$

Časová derivace je identicky nulová! Vektor $\vec{e}$ je neměnným invariantem. Jeho geometrický význam je fundamentální:

- Velikost vektoru $|\vec{e}|$ je **přesně rovna numerické excentricitě dráhy e** .
- Směr vektoru $\vec{e}$ míří v prostoru **přímo a neochvějně do pericentra (perigea)**.

Algoritmus převodu stavového vektoru $[\vec{r}, \vec{v}]$ na Keplerovy elementy

Pokud máme zadán polohový vektor $\vec{r} = (x, y, z)$ a rychlostní vektor $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, kompletní sadu šesti Keplerových elementů získáme tímto standardním analytickým algoritmem:

1. Velikost polohy a rychlosti:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

2. Specifický moment hybnosti:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = (yv_z - zv_y, zv_x - xv_z, xv_y - yv_x), \quad h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}$$

3. Sklon dráhy (inklinace i):

$$i = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right), \quad 0^\circ \leq i \leq 180^\circ$$

4. Vektor uzlové přímky $\vec{n}$ a délka vzestupného uzlu Ω :

$$\vec{n} = \vec{k} \times \vec{h} = (-h_y, h_x, 0), \quad n = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$$

$$\Omega = \begin{cases} \arccos(n_x/n) & \text{pro } n_y \geq 0 \\ 360^\circ - \arccos(n_x/n) & \text{pro } n_y < 0 \end{cases}$$

5. Vektor excentricity $\vec{e}$ a excentricita e :

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu} \left[\left(v^2 - \frac{\mu}{r} \right) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v} \right], \quad e = |\vec{e}|$$

6. Velká poloosa a ze specifické mechanické energie:

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}, \quad a = -\frac{\mu}{2\mathcal{E}}$$

7. Argument pericentra ω a pravá anomálie θ :

$$\omega = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{n \cdot e}\right) & \text{pro } e_z \geq 0 \\ 360^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{n \cdot e}\right) & \text{pro } e_z < 0 \end{cases}$$

$$\theta = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{e \cdot r}\right) & \text{pro } \vec{r} \cdot \vec{v} \geq 0 \\ 360^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{e \cdot r}\right) & \text{pro } \vec{r} \cdot \vec{v} < 0 \end{cases}$$

Eulerovy rotační matice v trojrozměrném prostoru

Při navigaci v prostoru potřebujeme neustále transformovat souřadnice mezi různými vztažnými soustavami: například mezi **perifokální soustavou dráhy (PQW)**, kde osa P míří do perigea a osa W je kolmá k rovině dráhy, a **geocentrickou ekvatoriální inerciální soustavou (IJK)**.

Základní elementární rotační matice pro otočení kolem os x , y a z o pravotočivý úhel α :

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformace z perifokální soustavy PQW do inerciální soustavy IJK Převod vektoru z roviny oběžné dráhy $[\vec{r}]_{PQW} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)^T$ do geocentrických rovníkových souřadnic $[\vec{r}]_{IJK} = (x, y, z)^T$ se provádí sekvencí tří Eulerových rotací o úhly ω (argument perigea), i (sklon) a Ω (délka vzestupného uzlu):

$$[\vec{r}]_{IJK} = \mathbf{T}_{PQW \rightarrow IJK} \cdot [\vec{r}]_{PQW} = R_z(-\Omega) \cdot R_x(-i) \cdot R_z(-\omega) \cdot [\vec{r}]_{PQW}$$

Výsledná úplná transformační matice $\mathbf{T}_{PQW \rightarrow IJK}$ o rozměru 3×3 má tvar:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$

Sloupce této ortogonální matice tvoří přímo jednotkové vektory os $\vec{P}$, $\vec{Q}$ a $\vec{W}$ vyjádřené v inerciální soustavě IJK.

Cloessyho–Wiltshireovy (Hillovy) rovnice relativního pohybu

Při přibližování a dokování kosmických lodí (například lodi Crew Dragon nebo Sojuz k ISS) nepoužíváme absolutní inerciální souřadnice, ale **místní souřadnou soustavu LVLH (Local Vertical, Local Horizontal)** spojenou s cílovou stanicí na kruhové dráze:

- Osa x míří radiálně směrem od středu Země (nahoru).
- Osa y leží v rovině dráhy a míří ve směru letu stanice (dopředu).
- Osa z doplňuje soustavu na pravotočivou a míří kolmo k rovině dráhy (do boku).

Linearizované pohybové rovnice relativního pohybu stíhací lodi vůči cíli odvozené W. H. Cloessym a R. S. Wiltshirem v roce 1960 mají elegantní tvar:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = f_x$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = f_y$$

$$\ddot{z} + n^2z = f_z$$

Kde $n = \sqrt{\mu/r_{\text{cil}}^3}$ je střední pohyb cílové stanice a f_x, f_y, f_z jsou specifické tahy korekčních trysek. Všimněte si:

- Pohyb v příčné ose z je zcela nezávislý jednoduchý harmonický kmit s periodou rovnou oběžné době stanice:
 $z(t) = z_0 \cos(nt) + \frac{\dot{z}_0}{n} \sin(nt)$.
- Pohyb v rovině (x, y) je provázán Coriolisovým členem $2n\dot{y}$ a $2n\dot{x}$. Právě toto gravitačně-setrvačné provázání způsobuje, že zážeh dopředu (+y) loď nezrychlí, nýbrž zvedne na vyšší pomalejší dráhu, takže loď začne vůči stanici zaostávat!

☑ SHRNUTÍ DODATKU A: RYCHLÝ TAHÁK ORBITÁLNÍHO MATEMATIKA

- **Gravitační parametr** $\mu = GM$: Sjednocuje gravitační sílu, kosmické rychlosti i periodu oběhu tělesa.
- **Rovnice Vis-Viva** ($v^2 = \mu(2/r - 1/a)$): Univerzální energetický klíč k rychlosti v jakémkoliv bodě libovolné dráhy.
- **Keplerova časová rovnice** ($M = E - e \sin E$): Řeší se Newtonovou-Raphsonovou iterační metodou pro určení polohy v čase.
- **Skalární součin** ($\vec{r} \cdot \vec{v}$): Okamžitě určuje radiální rychlost a prozrazuje směr pohybu k perigeu či apogeu.
- **Vektorový součin** ($\vec{r} \times \vec{v}$): Definuje vektor momentu hybnosti $\vec{h}$ fixující oběžnou rovinu v prostoru.
- **Laplaceův-Rungeův-Lenzův vektor** ($\vec{e}$): Invariant v poli $1/r^2$, jehož velikost odpovídá excentricitě a směr míří do perigea.
- **Eulerovy rotační matice**: Umožňují exaktní analytickou transformaci z roviny dráhy PQW do inerciální soustavy IJK.
- **Clohessyho-Wiltshireovy rovnice**: Lineární aparát v soustavě LVLH řídící dokování kosmických lodí u ISS.

Dodatek B: Přehled fundamentálních astronomických konstant a parametrů těles

Přesná čísla jsou základním stavebním kamenem nebeské mechaniky. Při plánování meziplanetárních letů i při sledování družic na oběžné dráze rozhodují zlomky procent o tom, zda kosmická sonda úspěšně vstoupí na oběžnou dráhu kolem Marsu, nebo se ztratí v meziplanetárním prostoru.

Tento dodatek přináší ucelený soubor nejnovějších oficiálních konstant a parametrů schválených Mezinárodní astronomickou unií (IAU), mezinárodní komisí CODATA a mezinárodní službou rotace Země IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service).

B.1 Přehled fundamentálních fyzikálních a astronomických konstant

Všimněte si zajímavého faktu moderní astrofyziky: **Geocentrický gravitační parametr $\mu_{\oplus} = GM_{\oplus}$ známe díky radarovému a družicovému měření s fantastickou přesností na 10 platných číslic, avšak samotnou gravitační konstantu G a hmotnost Země $M_{\oplus}$ známe samostatně pouze na 4 až 5 číslic!**

Důvod spočívá v tom, že přitažlivá síla v pozemských laboratorních experimentech (torzní váhy) je nesmírně slabá a zatížená systematickými chybami. Naopak z měření oběžných dob a laserového měření vzdáleností družic odvozujeme součin GM přímo s mimořádnou přesností. V nebeské mechanice proto vždy přednostně počítáme přímo s gravitačním parametrem μ .

Následující tabulka shrnuje fundamentální konstanty používané v astrodynamice:

Veličina	Symbol	Hodnota v jednotkách SI	Běžná technická hodnota	Zdroj a poznámka
Gravitační konstanta	G	$6,67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	$6,6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$	CODATA 2018
Rychlost světla ve vakuu	c	299 792 458 m/s	299 792,458 km/s	Přesná definiční konstanta
Astronomická jednotka	AU	149 597 870 700 m	$149,598 \times 10^6 \text{ km}$	Rezoluce IAU 2012
Standardní tíhové zrychlení	g_0	$9,80665 \text{ m/s}^2$	$9,81 \text{ m/s}^2$	Definice specifického impulsu I_{sp}
Heliocentrický grav. parametr	$\mu_{\odot}$	$1,32712440042 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$	$1,3271244 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$	IAU standard pro Slunce ($GM_{\odot}$)
Geocentrický grav. parametr	$\mu_{\oplus}$	$3,986004418 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$	$398\,600,4418 \text{ km}^3/\text{s}^2$	IERS standard pro Zemi ($GM_{\oplus}$)
Hmotnost Slunce	$M_{\odot}$	$1,98847 \times 10^{30} \text{ kg}$	$1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$	Tvoří 99,86 % hmoty soustavy
Hmotnost Země	$M_{\oplus}$	$5,97217 \times 10^{24} \text{ kg}$	$5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$	Odvozena jako $\mu_{\oplus}/G$
Rovňový poloměr Země	R_{eq}	6 378 137,0 m	6 378,137 km	Referenční elipsoid WGS-84
Polární poloměr Země	R_p	6 356 752,314 m	6 356,752 km	Referenční elipsoid WGS-84
Střední poloměr Země	$R_{\oplus}$	6 371 000,8 m	6 371,0 km	Objemově ekvivalentní koule
Geometrické zploštění Země	f	$1/298,257223563$	0,00335281	$f = (R_{eq} - R_p)/R_{eq}$
Druhý zonální koeficient	J_2	$1,08262668 \times 10^{-3}$	$1,08263 \times 10^{-3}$	Způsobuje precesi uzlů a apsíd
Třetí zonální koeficient	J_3	$-2,5327 \times 10^{-6}$	$-2,53 \times 10^{-6}$	Hruškovitý tvar Země

Veličina	Symbol	Hodnota v jednotkách SI	Běžná technická hodnota	Zdroj a poznámka
Čtvrtý zonální koeficient	J_4	$-1,6196 \times 10^{-6}$	$-1,62 \times 10^{-6}$	Vyšší harmonický člen zploštění
Siderický den Země	T_{sid}	86 164,0905 s	23 h 56 min 4,09 s	Otočka o 360° vůči hvězdám
Tropický rok	T_{trop}	31 556 925,2 s	365,2422 dní	Cyklos rovnodenností
Juliánský rok	a_{jul}	31 557 600 s	Přesně 365,25 dní	Astronomický standardní rok
Solární konstanta (1 AU)	$S_{\odot}$	1 361,0 W/m ²	1,361 kW/m ²	Zářivý tok na hranici atmosféry
Tlak slunečního záření (1 AU)	$P_{\odot}$	$4,5398 \times 10^{-6}$ N/m ²	4,54 μPa	$P_{\odot} = S_{\odot}/c$ (pro černý povrch)
Světelný rok	ly	$9,460730472 \times 10^{15}$ m	$9,461 \times 10^{12}$ km	Vzdálenost světla za 1 juliánský rok
Parsek	pc	$3,085677581 \times 10^{16}$ m	3,2616 ly = 206 265 AU	Paralaxta jedné obloukové vteřiny

B.2 Velká srovnávací tabulka těles Sluneční soustavy

Následující komplexní tabulka uvádí přesné fyzikální a dynamické parametry Slunce, osmi planet, Měsíce a trpasličí planety Pluto. Tyto hodnoty představují základní numerická vstupní data pro veškeré výpočty trajektorií, startovacích oken a rozpočtů Δv :

Těleso	Hmotnost M [kg]	Rovňkový poloměr R_{eq} [km]	Gravitační parametr μ [km ³ /s ²]	Povrchové zrychlení g [m/s ²]	Kruhová rychlost v_c [km/s]	Úniková rychlost v_{esc} [km/s]	Doba rotace	Velká poloosa a [AU]	Oběžná doba kolem Slunce	Sklon osy
Slunce	$1,9885 \times 10^{30}$	695 700	132 712 440 042	274,0	436,9	617,7	25,38 d	—	—	7,25°
Merkur	$3,3011 \times 10^{23}$	2 439,7	22 032	3,70	3,00	4,25	58,65 d	0,3871	87,97 d	0,03°
Venuše	$4,8675 \times 10^{24}$	6 051,8	324 859	8,87	7,33	10,36	−243,02 d *	0,7233	224,70 d	177,36°
Země	$5,9722 \times 10^{24}$	6 378,1	398 600,4	9,81	7,91	11,19	23,934 h	1,0000	365,26 d	23,44°
Měsíc	$7,342 \times 10^{22}$	1 737,4	4 902,8	1,62	1,68	2,38	27,322 d	(kolem Z)	27,32 d	6,68°
Mars	$6,4171 \times 10^{23}$	3 396,2	42 828	3,72	3,55	5,03	24,623 h	1,5237	686,98 d	25,19°
Jupiter	$1,8982 \times 10^{27}$	71 492	126 686 534	24,79	42,07	59,50	9,925 h	5,2044	11,86 let	3,13°
Saturn	$5,6834 \times 10^{26}$	60 268	37 931 187	10,44	25,09	35,49	10,656 h	9,5826	29,46 let	26,73°
Uran	$8,6810 \times 10^{25}$	25 559	5 793 939	8,69	15,06	21,30	−17,24 h*	19,2184	84,01 let	97,77°
Neptun	$1,0241 \times 10^{26}$	24 764	6 836 529	11,15	16,61	23,50	16,11 h	30,1104	164,79 let	28,32°
Pluto	$1,303 \times 10^{22}$	1 188,3	869,6	0,62	0,86	1,21	−6,387 d*	39,4820	247,92 let	122,53°

\ Záporná hodnota periody rotace značí retrográdní rotaci (Slunce vychází na západě). * \ Měsíc má vázanou rotaci: siderická doba rotace kolem vlastní osy je přesně rovna oběžné době kolem Země.

Vztahy mezi tabulkovými parametry

Základní mechanické vztahy spojující sloupce tabulky:

- Povrchové tíhové zrychlení: $g = \frac{\mu}{R_{eq}^2}$
- 1. kosmická (kruhová) rychlost na povrchu: $v_c = \sqrt{\frac{\mu}{R_{eq}}} = \sqrt{g \cdot R_{eq}}$
- 2. kosmická (úniková) rychlost z povrchu: $v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{eq}}} = \sqrt{2} \cdot v_c$

B.3 Sféry gravitačního vlivu: Laplaceova sféra (SOI) vs. Hillova sféra

Při návrhu meziplanetárních letů metodou **slátaných kuželoseček (Patched Conics)** dělíme prostor kolem planety na dvě odlišné gravitační domény. K tomu astrodynamika používá dva různé koncepty:

1. Odvození Laplaceovy sféry gravitačního vlivu (r_{SOI})

Laplaceova sféra vlivu (Sphere of Influence – SOI) je definována jako geometrické rozhraní, kde je poměr perturbační síly Slunce vůči primární gravitaci planety roven poměru perturbační síly planety vůči primární gravitaci Slunce:

$$\frac{F_{\text{pert, Slunce}}}{F_{\text{prim, planeta}}} = \frac{F_{\text{pert, planeta}}}{F_{\text{prim, Slunce}}}$$

Přitažlivost planety na sondu ve vzdálenosti r je $F_{\text{prim, planeta}} \approx \frac{Gm}{r^2}$. Sluneční slapové perturbační zrychlení ve vzdálenosti r od planety je $\approx \frac{GM_{\odot}r}{a^3}$. Obdobně primární gravitace Slunce na planetu ve vzdálenosti a je $\frac{GM_{\odot}}{a^2}$ a planetární porucha na heliocentrickou dráhu činí $\frac{Gm}{r^2}$.

Porovnáním těchto poměrů získáme:

$$\frac{M_{\odot} \frac{r}{a^3}}{\frac{m}{r^2}} = \frac{\frac{m}{r^2}}{\frac{M_{\odot}}{a^2}} \Rightarrow \frac{M_{\odot} r^3}{ma^3} = \frac{ma^2}{M_{\odot} r^2} \Rightarrow r^5 = a^5 \left(\frac{m}{M_{\odot}} \right)^2$$

Odtud plyne slavný Laplaceův vztah:

$$r_{\text{SOI}} = a \cdot \left(\frac{m}{M_{\odot}} \right)^{2/5}$$

Kde a je velká poloosa oběžné dráhy planety kolem Slunce a $m/M_{\odot}$ je poměr hmotnosti planety k hmotnosti Slunce. Uvnitř sféry $r < r_{\text{SOI}}$ počítáme pohyb sondy jako planetocentrickou hyperbolu; vně sféry $r > r_{\text{SOI}}$ počítáme pohyb jako heliocentrickou elipsu.

2. Hillova sféra (r_{Hill})

Hilova sféra vychází z kruhového omezeného problému tří těles (CR3BP) a vymezuje oblast kolem menšího tělesa, uvnitř které je těleso schopno **dlouhodobě gravitačně udržet svůj vlastní satelit** (měsíc či družici) před gravitačním stržením Sluncem:

$$r_{\text{Hill}} \approx a \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{3M_{\odot}}} = r_{L1,L2}$$

Poloměr Hillovy sféry odpovídá vzdálenosti kolineárních libračních bodů L1 a L2!

Srovnávací tabulka gravitačních sfér vlivu

Těleso	Vzdálenost od Slunce a [mil. km]	Laplaceova sféra r_{SOI} [km]	r_{SOI}/R_{eq}	Hilova sféra r_{Hill} [km]	r_{Hill}/R_{eq}	Praktický význam pro kosmonautiku
Merkur	57,9	112 000	46×	220 000	90×	Velmi strmá studna Slunce; extrémní Δv pro zachycení
Venuše	108,2	616 000	102×	1 010 000	167×	Rozsáhlá SOI; vynikající brána pro gravitační manévry
Země	149,6	925 000	145×	1 496 500	235×	Měsíc (384 400 km) leží hluboko uvnitř zemské SOI
Měsíc (vůči Zemi)	0,3844	66 100	38×	61 300	35×	Sféra vlivu uvnitř silného gravitačního pole Země
Mars	227,9	577 000	170×	1 084 000	319×	Přechod ze Slunce na zachycovací zážeh k Marsu
Jupiter	778,6	48 200 000	674×	53 150 000	743×	Gigantické gravitační impérium; král gravitačních praků

Těleso	Vzdálenost od Slunce a [mil. km]	Laplaceova sféra r_{SOI} [km]	$r_{\text{SOI}}/R_{\text{eq}}$	Hillova sféra r_{Hill} [km]	$r_{\text{Hill}}/R_{\text{eq}}$	Praktický význam pro kosmonautiku
Saturn	1 433,5	54 800 000	$909\times$	65 450 000	$1\,086\times$	Udrží rozsáhlý systém prstenců a desítek ledových měsíců
Uran	2 872,5	51 800 000	$2\,027\times$	70 100 000	$2\,743\times$	Hluboký vnější systém
Neptun	4 495,1	86 200 000	$3\,481\times$	116 000 000	$4\,684\times$	Nejvzdálenější obří gravitační sféra
Pluto	5 906,4	3 400 000	$2\,861\times$	6 000 000	$5\,049\times$	Relativně malá sféra vlivu na okraji Kuiperova pásu

B.4 Výpočty charakteristické energie C_3 a odletových impulsů z LEO

Při startu meziplanetární sondy z parkovací nízké oběžné dráhy (LEO, typicky výška $h = 200$ km, poloměr $r_0 = 6\,571$ km) musíme udělit aparátu dostatečný urychlovací impuls Δv_{inj} (Trans-Injection Burn):

$$v_{\text{inj}} = \sqrt{v_{\text{esc}}^2 + C_3} = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r_0} + v_{\infty}^2}$$

$$\Delta v_{\text{inj}} = v_{\text{inj}} - v_{\text{LEO}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r_0} + C_3} - \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_0}}$$

Kde:

- $C_3 = v_{\infty}^2$ je **charakteristická energie** [km^2/s^2], která udává specifickou energii přebytku nad únikovou rychlostí.
- v_{∞} je asymptotická hyperbolická úniková rychlost z gravitační sféry Země.
- $v_{\text{LEO}} = \sqrt{\mu_{\oplus}/r_0} \approx 7,784$ km/s pro $h = 200$ km.
- $v_{\text{esc}} = \sqrt{2\mu_{\oplus}/r_0} \approx 11,008$ km/s.

Tabulka energetických nároků pro meziplanetární lety z LEO (Hohmannovy přelety)

Cílová planeta	Přestupná poloosa a_{trans} [AU]	Doba přeletu	Hyperbolická rychlost v_{∞} [km/s]	Charakteristická energie C_3 [km^2/s^2]	Injekční impuls z LEO Δv_{inj} [km/s]
Merkur	0,6936	105,5 dní	7,53	56,7	5,55
Venuše	0,8617	146,0 dní	2,50	6,25	3,50
Mars	1,2619	258,9 dní	2,94	8,64	3,59
Jupiter	3,1022	2,73 roku	8,79	77,3	6,30
Saturn	5,2913	6,05 roku	10,29	105,9	7,28
Uran	10,109	16,0 let	11,28	127,2	7,96
Neptun	15,555	30,6 let	11,65	135,7	8,22

B.5 Astrodynamický průvodce světy Sluneční soustavy

Z pohledu raketového navigátora nepředstavují tělesa Sluneční soustavy jen astronomické objekty, ale specifické gravitační a aerodynamické výzvy:

1. Merkur: Dno sluneční gravitační studny

Merkur obíhá blízko Slunce rychlostí téměř 48 km/s. Let k Merkuru vyžaduje enormní Δv : sonda musí mohutně brzdit proti směru zemského oběhu, aby propadla do sluneční studny. Evropsko-japonská mise **BepiColombo** musela naplánovat celkem **9 gravitačních manévřů** (1 u Země, 2 u Venuše a 6 u samotného Merkuru) rozprostřených do sedmi let, aby se v roce 2026 dokázala zachytit na jeho oběžné dráze bez gigantické spotřeby pohonných látek.

2. Venuše: Atmosférické peklo a aerobraking

Venuše je gravitačním dvojčetem Země ($v_{esc} = 10,36 \text{ km/s}$). Její atmosféra s přízemním tlakem 92 barů a teplotou 465°C je pro povrchové moduly zničující. Pro orbitální mechaniky však představuje ideální prostředí pro **aerobraking** – postupné zakulacování velmi protáhlé eliptické dráhy řízeným třením o horní vrstvy atmosféry v pericentru, což šetří stovky kilogramů paliva (využito sondami Magellan a Venus Express).

3. Měsíc a lunární mascony

Měsíční kůra ukrývá obrovské koncentrace husté hmoty po pradávných impaktech železných planetek – tzv. **mascony (mass concentrations)**. Tato gravitační zahuštění způsobují, že gravitační pole Měsíce je silně nepravidelné. Většina nízkých oběžných drah kolem Měsíce ($h < 100 \text{ km}$) je vlivem masconů chaoticky nestabilní a bez pravidelných korekčních zážehů by družice během několika měsíců nevyhnutelně narazila do měsíčního povrchu. Výjimku tvoří pouze tzv. „zamrzlé dráhy“ (frozen orbits) se specifickými sklony ($27^\circ, 50^\circ, 76^\circ, 86^\circ$).

4. Mars: Tenká atmosféra a raketový jeřáb Sky Crane

Mars disponuje pouze desetinou hmotnosti Země ($g = 3,72 \text{ m/s}^2$). Jeho atmosféra z oxidu uhličitého má u povrchu tlak pouhých 600 Pa (0,6 % pozemského tlaku). Tato tenká vrstva stačí k tomu, aby aerodynamický štít zbrzdil sondu z meziplanetární rychlosti $21\,000 \text{ km/h}$ na zhruba $1\,500 \text{ km/h}$, ale je příliš řídká na bezpečné přistání pouze na padácích. NASA proto musela pro těžké rovery Curiosity a Perseverance vyvinout revoluční raketový jeřáb **Sky Crane**.

5. Jupiter: Vládce gravitace a radiační pec

S gravitačním parametrem $\mu \approx 126,7 \times 10^6 \text{ km}^3/\text{s}^2$ a únikovou rychlostí téměř 60 km/s je Jupiter dominantním hybatelem těles v naší soustavě. Průlet kolem Jupitera poskytuje sondám obrovský gravitační impuls (využitý misemi Pioneer, Voyager, Cassini a New Horizons pro únik z vnitřní soustavy). Závažnou komplikací je však magnetické pole Jupitera, které v radiačních pásích kumuluje gigantické toky vysokoenergetických elektronů schopných zničit nechráněnou palubní elektroniku.

6. Saturn a měsíc Titan: Aerodynamický ráj

Saturnova sféra vlivu dosahuje téměř 55 milionů kilometrů a udrží velkolepý systém prstenců a 146 měsíců. Zvláštní postavení má obří měsíc **Titan**, který je jediným měsícem ve Sluneční soustavě s hustou dusíkatou atmosférou (povrchový tlak 1,5 baru). V kombinaci s nízkou gravitací ($g = 1,35 \text{ m/s}^2$) představuje Titan naprostý ráj pro aerodynamický let – mise NASA **Dragonfly** zde v příštím desetiletí nasadí autonomní jaderný rotorový dron.

7. Ledoví obři Uran a Neptun: Poslední neprobádané hranice

Uran a Neptun leží ve vzdálenostech 19,2 AU a 30,1 AU od Slunce. Jedinou sondou, která tyto planety zblízka navštívila, byl **Voyager 2** v letech 1986 a 1989. Doba letu po přímé Hohmannově elipse by k Neptunu přesáhla 30 let! Pro plánované vlajkové mise NASA a ESA (Uranus Orbiter and Probe) je nezbytné využít gravitační asistenci Jupitera, která zkrátí let na 12 až 14 let. Na cílové dráze však nastává obrovská výzva: vysoká asymptotická příletová rychlost ($v_\infty \approx 5 \text{ až } 6 \text{ km/s}$) vyžaduje brzdicí impuls $\Delta v_{cap} \approx 2,5 \text{ km/s}$ k zachycení do gravitačního pole ledového obra. Inženýři proto zkoumají techniku **aerocapture**, při níž sonda využije jediný přesně vypočtený ponor do atmosféry planety k zbrzdění na oběžnou dráhu bez nutnosti nést tisíce kilogramů raketového paliva.

☑ SHRNUÍ DODATKU B: FUNDAMENTÁLNÍ KONSTANTY A TĚLESA

- **Gravitační parametr** $\mu = GM$: Základní veličina známá pro Zemi i Slunce s řádově vyšší přesností než samotná hmotnost M či konstanta G .
- **Nesférická Země**: Rovníkový poloměr převyšuje polární o 21,385 km; dynamické zploštění $J_2 \approx 1,0826 \times 10^{-3}$ dominuje poruchám drah.
- **Laplaceova sféra vlivu** ($r_{\text{SOI}} = a(m/M_\odot)^{2/5}$): Určuje hranici pro přepnutí ze sluneční na planetocentrickou kuželosečku.
- **Hillova sféra** ($r_{\text{Hill}} = a\sqrt[3]{m/(3M_\odot)}$): Určuje fyzikální mez stability gravitačního udržení obíhajícího měsíce či družice.
- **Energetické nároky** (C_3 a Δv_{inj}): K Marsu a Venuši postačuje $\Delta v_{\text{inj}} \approx 3,5$ až $3,6$ km/s z LEO, zatímco k vnějším planetám bez asistence přesahuje 6 až 8 km/s.

Dodatek C: Česko–anglický odborný glosář astrodynamiky

Moderní kosmonautika a nebeská mechanika jsou ze své podstaty globální disciplíny. Přestože v řídicích střediscích NASA, ESA i komerčních společností dominuje angličtina, česká astronomická a astronautická tradice disponuje mimořádně bohatou, přesnou a elegantní terminologií.

Tento abecední glosář slouží jako **komplexní a srozumitelný česko–anglický slovník klíčových pojmů orbitální mechaniky**. Obsahuje více než 100 hesel pokrývajících teoretickou fyziku oběžného pohybu, raketovou techniku, perturbační analýzu i praktické sledování družic. Každé heslo uvádí standardní český název, oficiální anglický ekvivalent (včetně mezinárodních zkratk) a výstižnou fyzikální a inženýrskou definici.

Abecední slovník pojmů (A–Ž)

A

- **Aerobraking (Aerodynamické brzdění)**: Postupné snižování apocentra oběžné dráhy kosmické lodi řízeným třením o horní vrstvy atmosféry v pericentru bez spotřeby paliva (využito u sond k Marsu a Venuši).
- **Aerocapture (Aerodynamické zachycení)**: Jednorázový manévr, při němž sonda přilétající z meziplanetárního prostoru vstoupí hluboko do atmosféry planety, aby aerodynamický odpor zbrzdil hyperbolickou příletovou rychlost na uzavřenou elipsu během jediného průletu.
- **Afélium / Odsuní (Aphelion)**: Bod na heliocentrické dráze kolem Slunce nejvzdálenější od jeho těžiště; těleso v něm má nejnižší orbitální rychlost (Země jím prochází počátkem července ve vzdálenosti cca 152,1 mil. km).
- **Analema (Analemma)**: Geometrická křivka ve tvaru protáhlé osmičky, kterou na obloze vykreslí Slunce (či geosynchronní družice se sklonem) při pozorování ve stejný čas během roku vlivem sklonu rotační osy a orbitální excentricity.
- **Anomálie (Anomaly)**: Úhlový parametr popisující polohu tělesa na oběžné dráze měřený od perigea; rozlišujeme pravou anomálii θ (skutečný úhel), excentrickou anomálii E (pomocný geometrický úhel) a střední anomálii M (lineárně rostoucí úhel v čase).
- **Apoapsida / Apocentrum (Apoapsis / Apocenter)**: Obecné označení pro bod eliptické oběžné dráhy ležící nejdále od těžiště centrálního tělesa.
- **Apogeum (Apogee)**: Nejvyšší a nejpomalejší bod oběžné dráhy tělesa obíhajícího kolem planety Země.
- **Apolunium / Aposelenium (Apolune / Aposelene)**: Nejvzdálenější bod oběžné dráhy od středu Měsíce (též apocynthion).
- **Apsidální přímka (Line of apsides)**: Přímka spojující nejnižší bod (pericentrum) a nejvyšší bod (apocentrum) kuželosečky; tvoří hlavní osu oběžné elipsy.
- **Argument pericentra / šířka perigea (ω – Argument of periapsis / perigee)**: Úhlová vzdálenost mezi vzestupným uzlem a pericentrem měřená v rovině oběžné dráhy ve směru pohybu tělesa; jeden ze šesti Keplerových elementů.
- **Asymptota hyperboly (Hyperbolic asymptote)**: Přímka vymezující směr příletu či odletu kosmické sondy z gravitačního pole tělesa v nekonečné vzdálenosti.
- **Astronomická jednotka (Astronomical Unit, AU)**: Standardní délková jednotka definovaná Mezinárodní astronomickou unií přesně jako 149 597 870 700 metrů; přibližně odpovídá střední vzdálenosti Země od Slunce.

B

Balistický koeficient (Ballistic coefficient, B / $\$B^*\$$): Parametr $B = C_D A / m$ vyjadřující poměr odporové plochy a koeficientu k hmotnosti tělesa; v modelu SGP4 vyjadřuje parametr B^* míru atmosférického brzdění družice.

- **Barycentrum (Barycenter)**: Společné těžiště dvou či více gravitačně vázaných těles, kolem kterého se všechny složky systému pohybují (barycentrum Slunce–Jupiter leží těsně nad povrchem Slunce, barycentrum Země–Měsíc cca 1700 km pod povrchem Země).
- **Bi–eliptický přechod (Bi–elliptic transfer)**: Tříimpulzový orbitální manévr spojující dvě kruhové dráhy přes velmi vzdálené mezilehlé apocentrum; při poměru poloměrů $r_2 / r_1 > 11,94$ je energeticky úspornější než klasický dvouimpulzový Hohmannův přechod.

C, Č

- **C_3 – Charakteristická energie (Characteristic energy):** Kvadratická veličina $C_3 = v_\infty^2$ [km²/s²] vyjadřující specifickou energii únikového přebytku nad parabolickou rychlostí; standardní parametr pro dimenzování nosných raket pro meziplanetární mise.
- **Clohessyho–Wiltshireovy rovnice (Clohessy–Wiltshire / Hill equations):** Soustava tří linearizovaných diferenciálních rovnic popisující relativní pohyb stíhací lodi vůči cílové stanici na kruhové dráze v souřadném systému LVLH; klíčový aparát pro dokování u ISS.
- **Coriolisovo zrychlení (Coriolis acceleration):** Zdánlivé setrvačné zrychlení $2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}})$ vznikající v rotující vztažné soustavě; stabilizuje tělesa v triangulárních libračních bodech L4 a L5.
- **COSPAR mezinárodní označení (COSPAR International Designator):** Mezinárodní kód přidělovaný výborem pro kosmický výzkum každému vypuštěnému tělesu ve formátu rok–start–díl (např. 1998–067A pro ISS).
- **CR3BP (Circular Restricted Three–Body Problem):** Kruhový omezený problém tří těles – základní astrodynamický model popisující pohyb zanedbatelné testovací částice v gravitačním poli dvou těles obíhajících po kružnicích.
- **Časové škály (Time scales):** Různé fyzikální systémy měření času: TAI (rovnoměrný atomový čas), UT1 (skutečný rotační čas Země), UTC (občanský čas s přestupnými sekundami) a TT (terestrický efemeridový čas).

D

- **Delta–v (Δv – Delta–v):** Skalární nebo vektorová změna rychlosti udělená kosmické lodi tahem raketového motoru; tvoří základní energetické platidlo a rozpočet každé mise.
- **Doba oběhu / Perioda (T – Orbital period):** Doba potřebná k vykonání jednoho úplného oběhu tělesa kolem dokola (360°); pro ISS činí cca 92,9 minut, pro geostacionární družici 23 hodin 56 minut 4 sekundy.
- **Dráha Molnija (Molniya orbit):** Vysoce výstředná dráha ($e \approx 0,74$) s periodou 12 hodin a kritickým sklonem 63,435°, vyvinutá v SSSR pro dlouhodobé telekomunikační pokrytí polárních oblastí.
- **Dráha Tundra (Tundra orbit):** Geosynchronní dráha s periodou 24 hodin, vysokou excentricitou ($e \approx 0,25$) a kritickým sklonem 63,435°, umožňující družici viset téměř nehybně nad vysokými zeměpisnými šířkami.
- **Dvouimpulzový manévř (Two–impulse maneuver):** Orbitální přechod realizovaný dvěma diskrétními motorickými zážehy (např. Hohmannova elipsa).

E

- **ECEF soustava (Earth–Centered, Earth–Fixed):** Terestrický kartézský souřadný systém pevně spojený s rotující Zemí; osa x protíná nultý poledník a osa z zemskou rotační osu.
- **Efektivní pseudopotenciál (Ω – Effective potential):** Skalární funkce v rotující soustavě spojující gravitační potenciály obou primárních těles a potenciál setrvačné odstředivé síly.
- **Efektivní výtoková rychlost (v_e – Effective exhaust velocity):** Součin specifického impulsu a tíhového zrychlení ($v_e = I_{sp} \cdot g_0$); průměrná rychlost spalín opouštějících trysku.
- **Efemerida (Ephemeris):** Datová tabulka či matematický model udávající vypočtené polohy a rychlosti nebeských těles či družic v závislosti na čase.
- **Ekvatoriální / Rovníková dráha (Equatorial orbit):** Oběžná dráha ležící přesně v rovině rovníku centrálního tělesa ($i = 0^\circ$).
- **Epocha (Epoch):** Přesně specifikovaný okamžik, ke kterému se vztahuje daná sada publikovaných orbitálních elementů.
- **Excentricita / Výstřednost (e – Eccentricity):** Bezrozměrný parametr vyjadřující geometrický tvar kuželosečky ($e = 0$ kruh, $0 < e < 1$ elipsa, $e = 1$ parabola, $e > 1$ hyperbola).
- **Excentrická anomálie (E – Eccentric Anomaly):** Úhel měřený ze středu elipsy od perigea k bodu na opsané kružnici, který vznikne kolmým průmětem skutečné polohy tělesa; vystupuje v Keplerově rovnici.

F, G

- **Fotonový tah (Photon thrust):** Mechanická síla vyvolaná dopadem a odrazem fotonů slunečního záření na povrch kosmické plachty či solárních panelů.
- **Geostacionární dráha (Geostationary Orbit, GEO):** Kruhová dráha nad rovníkem ve výšce 35 786 km s periodou 23 h 56 min 4 s; družice se z pohledu pozemního pozorovatele jeví trvale nehybná na obloze.

- **Geosynchronní dráha (Geosynchronous Orbit, GSO):** Dráha se siderickou periodou rovnou otočce Země, která však může mít nenulový sklon či excentricitu; družice na obloze opisuje zdánlivou křivku ve tvaru osmičky (analemu).
- **Gravitační asistence / Gravitační prak (Gravity Assist / Slingshot):** Využití gravitačního pole a orbitálního pohybu planety ke změně heliocentrické rychlosti a směru letu meziplanetární sondy bez spotřeby paliva.
- **Gravitační gradient (Gravity gradient):** Rozdíl gravitačního zrychlení působícího na bližší a vzdálenější konec kosmické lodi; využívá se k pasivní gravitační stabilizaci podélné osy družice směrem k těžišti planety.
- **Gravitační parametr (μ – Standard Gravitational Parameter):** Součin univerzální gravitační konstanty G a hmotnosti tělesa M ($\mu = GM$); základní konstanta určující dynamiku v gravitačním poli tělesa.

H

- **Halová dráha (Halo orbit):** Periodická trojrozměrná oběžná dráha v okolí kolineárních libračních bodů L1 či L2 s navázanou rezonancí mezi pohybem v rovině a kolmo k rovině (využita JWST či SOHO).
- **Heliosynchronní dráha (Sun-Synchronous Orbit, SSO):** Kvazipolární retrográdní dráha ($i \approx 97^\circ - 98^\circ$), jejíž uzlová přímka precesuje vlivem zploštění J_2 rychlostí přesně $0,9856^\circ/\text{den}$, takže družice přelétá nad povrchem vždy ve stejném místním slunečním čase.
- **Hillova sféra (Hill sphere):** Gravitační sféra $r_{\text{Hill}} \approx a \sqrt[3]{m/(3M)}$, uvnitř které je těleso schopno dlouhodobě udržet vlastní obíhající přirozený satelit či družici vůči slapovým silám primárního tělesa.
- **Hohmannova přechodová elipsa (Hohmann Transfer Orbit):** Energeticky nejúspornější dvouimpulzový orbitální manévř spojující dvě soustředné kruhové dráhy v jedné rovině tečnou eliptickou trajektorií.
- **Hřbitovní dráha (Graveyard / Disposal Orbit):** Odkládací dráha ležící nejméně 200 až 300 km nad geostacionárním prstencem, kam se před vyčerpáním paliva přesunují vysloužilé komunikační družice.
- **Hvězdný / Siderický čas (Sidereal time):** Čas měřený podle zdánlivého denního pohybu jarního bodu vůči místnímu poledníku.
- **Hyperbolická přebytková rychlost (v_∞ – Hyperbolic excess velocity):** Asymptotická teoretická rychlost, kterou si těleso na únikové hyperbole zachová v nekonečné vzdálenosti po opuštění sféry vlivu planety.

I, J

- **Inklinace / Sklon dráhy (i – Orbital Inclination):** Úhel mezi rovinou oběžné dráhy a základní referenční rovinou (u Země rovinou rovníku, u meziplanetárních letů ekliptikou).
- **J_2 zonální perturbanční koeficient (J_2 zonal harmonic):** Bezrozměrný koeficient ($1,08263 \times 10^{-3}$) vyjadřující gravitační vliv rovníkového vydutí zploštělé Země; způsobuje stáčení uzlů a perigea.
- **Jacobiho integrál (C – Jacobi constant / integral):** Jediný zachovávající se integrál energie v kruhovém omezeném problému tří těles ($C = 2\Omega - v^2$); vymezuje nepřekročitelné plochy nulové rychlosti.
- **Juliánské datum (Julian Date, JD):** Spojitý astronomický časový systém udávající počet celých dnů a jejich desetinných zlomků uplynulých od 1. ledna 4713 př. n. l. ve 12:00 UTC.

K

- **Kármánova hranice (Kármán line):** Mezinárodně uznávaná hranice kosmického prostoru ve výšce 100 km nad hladinou moře; výška, kde by se aerodynamický letoun musel pohybovat 1. kosmickou rychlostí, aby ho udržel aerodynamický vztlak.
- **Keplerova časová rovnice (Kepler's equation):** Transcendentní vztah $M = E - e \sin E$ spojující uplynulý čas (střední anomálii M) s geometrií eliptické dráhy (excentrickou anomálií E).
- **Keplerovy dráhové elementy (Keplerian Elements):** Šest fundamentálních parametrů ($a, e, i, \Omega, \omega, \theta$ či M), které jednoznačně definují velikost, tvar, orientaci dráhy v prostoru a okamžitou polohu tělesa.
- **Keplerovy zákony (Kepler's laws):** Tři empirické zákony nebeské mechaniky formulované Johannesem Keplerem: 1. planety obíhají po elipsách s centrem v ohnisku, 2. plošná rychlost je konstantní, 3. poměr $T^2/a^3 = \text{konst.}$
- **Kesslerův syndrom (Kessler syndrome):** Kaskádový lavinovitý scénář navržený Donaldem Kesslerem, kdy hustota kosmického smetí na nízké oběžné dráze vyvolá řetězovou reakci vzájemných kolizí, která učiní dané orbitální pásmo na desetiletí nepoužitelným.
- **Kolineární body (Collinear libration points):** Librační body L1, L2 a L3 ležící přímo na přímce spojující obě primární masivní tělesa; jedná se o dynamicky nestabilní sedlové body efektivního potenciálu.

- **Kontrolní součet TLE (TLE Checksum):** Poslední číslice na každém řádku formátu TLE vypočtená jako součet všech cifer řádku modulo 10 (se započtením znaků minus jako 1).
- **Kosmické rychlosti (Cosmic velocities):** 1. kruhová rychlost ($v_c = 7,91 \text{ km/s}$ u Země), 2. úniková parabolická rychlost ($v_{esc} = 11,19 \text{ km/s}$) a 3. úniková rychlost ze Sluneční soustavy ($v_3 = 16,67 \text{ km/s}$).
- **Kritická inklinace (Critical inclination):** Sklon oběžné dráhy $i = 63,435^\circ$ nebo $116,565^\circ$, při němž je gravitační moment zploštění J_2 vyvážen a sekulární stáčení perigea je přesně nulové ($\dot{\omega} = 0$).

L

- **Lagrangeovy / Librační body (Lagrange points, L1 až L5):** Pět rovnovážných bodů v rotující soustavě dvou masivních těles, kde se gravitační a odstředivé síly vzájemně přesně vyruší.
- **Laplaceova sféra vlivu (Sphere of Influence, SOI):** Oblast kolem planety o poloměru $r_{SOI} \approx a(m/M)^{2/5}$, uvnitř které převažuje gravitační zrychlení planety nad poruchovým působením Slunce.
- **Laplaceův–Rungeův–Lenzův vektor ($\vec{e}$ – Runge–Lenz vector):** Vektorový integrál pohybu v Newtonově gravitačním poli $\vec{e} = \frac{1}{\mu}(\vec{v} \times \vec{h}) - \frac{\vec{r}}{r}$; jeho velikost je rovna excentricitě e a směr míří trvale do pericentra.
- **LEO – Nízká oběžná dráha (Low Earth Orbit):** Pásmo oběžných drah od hranice atmosféry (160 km) do výšky 2 000 km; operační prostor stanice ISS, HST a konstelací Starlink.
- **Lissajousova dráha (Lissajous orbit):** Kvazi-periodická prostorová trajektorie kolem libračních bodů, kde kmitání v rovině a kolmo k rovině probíhá s navzájem nesoudělnými frekvencemi.

M

- **Malá poloosa (b – Semi-minor axis):** Polovina nejkratšího rozměru elipsy kolmá k hlavní ose ($b = a\sqrt{1 - e^2}$).
- **Mascon (Mass concentration):** Výrazná lokální gravitační anomálie v kůře tělesa (zejména Měsíce) způsobená pradávými impakty těžkých těles; destabilizuje nízké oběžné dráhy.
- **MEO – Střední oběžná dráha (Medium Earth Orbit):** Pásmo drah mezi LEO a GEO (typicky 2 000 až 35 786 km); domov globálních družicových navigačních systémů GPS, Galileo a GLONASS.
- **Moment hybnosti ($\vec{h}$ – Specific Angular Momentum):** Vektorový součin $\vec{r} \times \vec{v}$ vyjadřující míru rotačního pohybu na jeden kilogram hmotnosti tělesa; je kolmý k oběžné rovině a v nerušeném poli se dokonale zachovává.

N

- **NORAD katalogové číslo (NORAD Catalog Number / SATCAT):** Jedinečné pětimístné identifikační číslo přidělené každému sledovanému umělému tělesu na oběžné dráze (např. 25544 pro ISS).
- **NRHO dráha (Near-Rectilinear Halo Orbit):** Vysoce protáhlá, dynamicky stabilní halová dráha v soustavě Země–Měsíc zvolená pro mezinárodní lunární stanici Gateway.

O

- **Oberthův efekt (Oberth effect):** Fyzikální zákonitost, podle níž je zážeh raketového motoru energeticky neúčinnější při maximální oběžné rychlosti tělesa; manévry Δv je proto nejvýhodnější provádět hluboko v gravitační studni v pericentru.
- **Odstředivý potenciál (Centrifugal potential):** Skalární potenciál $V_{\text{cent}} = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$ vyjadřující účinek odstředivé síly v neinerciální rotující soustavě.
- **Orbitální paradox odporu (Orbital drag paradox):** Jev, při němž družice brzděná atmosférou klesá na nižší dráhu, kde vlivem silnější gravitace paradoxně zrychluje svou dopřednou rychlost.
- **Orbitální rezonance (Orbital resonance):** Gravitační vazba nastávající v případě, kdy jsou oběžné doby dvou těles v poměru malých celých čísel (např. měsíce Io, Europa a Ganymedes v poměru 4:2:1).
- **Orbitální rozpad (Orbital decay):** Postupný nezvratný sestup výšky oběžné dráhy způsobený třením o atmosféru zakončený zánikem družice v hustých vrstvách.
- **Oskulační dráha a elementy (Osculating orbit):** Teoretická okamžitá keplerovská kuželosečka, po níž by se družice pohybovala, kdyby v daný časový okamžik zcela ustaly veškeré perturbační síly.

P

- **Parametr kuželosečky (p – Semi-latus rectum):** Šířka kuželosečky měřená v ohnisku kolmo k hlavní ose ($p = a(1 - e^2) = h^2/\mu$).
- **Patched Conics metoda (Metoda slátaných kuželoseček):** Inženýrská aproximace meziplanetárních trajektorií skládáním navazujících dvoutělesových kuželoseček na rozhraní Laplaceových sfér vlivu (SOI).
- **Perifokální soustava souřadnic (Perifocal coordinate frame, PQW):** Kartézská soustava vázaná na oběžnou rovinu dráhy; osa P míří do pericentra, osa Q leží v rovině s pravou anomálií 90° a osa W je rovnoběžná s momentem hybnosti $\vec{h}$.
- **Perigeum (Perigee):** Bod oběžné dráhy kolem Země ležící nejbližší zemskému těžišti; družice v něm dosahuje maximální orbitální rychlosti.
- **Periapsida / Pericentrum (Periapsis / Pericenter):** Obecné označení pro bod oběžné dráhy ležící nejbližší centrálnímu tělesu.
- **Perihélium / Přisluní (Perihelion):** Bod na heliocentrické dráze kolem Slunce ležící nejbližší jeho středu (Země jím prochází počátkem ledna ve vzdálenosti cca 147,1 mil. km).
- **Perilunium / Periselenium (Perilune / Periselene):** Bod oběžné dráhy ležící nejbližší povrchu Měsíce.
- **Plochy nulové rychlosti (Zero-Velocity Surfaces):** Hranice v prostoru definované rovnicí $2\Omega(x, y, z) = C$, které oddělují kinematically povolené oblasti pohybu od zakázaných zón pro danou hodnotu Jacobiho integrálu.
- **Polární dráha (Polar orbit):** Dráha se sklonem blízkým 90° přelétající nad zemskými póly; díky rotaci Země pod drahou umožňuje zmapovat celý povrch planety.
- **Pravá anomálie (θ či ν – True Anomaly):** Fyzikální úhel měřený z ohniska od pericentra k okamžité poloze tělesa.
- **Precese uzlů (Nodal precession, $\dot{\Omega}$):** Sekulární stáčení uzlové přímky oběžné dráhy v rovině rovníku vyvolané gravitačním vlivem zploštění Země J_2 .
- **Prográdní pohyb / dráha (Prograde motion):** Oběh tělesa ve stejném směru, v jakém rotuje centrální planeta (u Země od západu k východu, inklinace $0^\circ \leq i < 90^\circ$).

R

- **Rektascenze vzestupného uzlu (RAAN / Ω – Right Ascension of Ascending Node):** Úhel měřený v rovině rovníku od jarního bodu k vzestupnému uzlu oběžné dráhy; orientuje rovinu dráhy v inerciálním prostoru.
- **Retrográdní pohyb / dráha (Retrograde motion):** Oběh tělesa v protisměru rotace centrální planety ($90^\circ < i \leq 180^\circ$); vyžaduje vyšší startovací Δv .
- **Rovnice živých sil / Vis-Viva (Vis-Viva equation):** Klíčový vztah $v^2 = \mu(2/r - 1/a)$ propojující okamžitou rychlost tělesa s jeho vzdáleností a velkou poloosou dráhy.

S

- **Sestupný uzel (Descending node):** Průsečík oběžné dráhy se základní referenční rovinou (rovníkem), v němž těleso přechází ze severní polokoule na jižní.
- **SGP4 / SDP4 (Simplified General / Deep Space Perturbations-4):** Standardizované analytické výpočetní modely pro predikci polohy a rychlosti družic z dvouřádkových elementů TLE se započtením poruch.
- **Siderická perioda (Sidereal period):** Doba oběhu či rotace tělesa měřená vůči vzdáleným hvězdám (hvězdný den má 23 h 56 min 4 s).
- **Skalární součin v astrodynamice (Dot product):** Operace $\vec{r} \cdot \vec{v}$ sloužící k okamžitému určení radiální rychlosti $v_r = (\vec{r} \cdot \vec{v})/r$ a směru letu k apsidám.
- **Sluneční plachetnice (Solar sail):** Kosmické plavidlo bez raketového pohonu využívající k urychlování pouze tlak dopadajících fotonů slunečního světla na velkou zrcadlovou fólii.
- **Solární konstanta ($S_\odot$ – Solar constant):** Celkový zářivý tok dopadající ze Slunce na jednotkovou plochu kolmou k paprskům na hranici zemské atmosféry ($1\,361\text{ W/m}^2$).
- **Specifická mechanická energie ($\mathcal{E}$ – Specific mechanical energy):** Celková mechanická energie na jeden kilogram hmotnosti tělesa ($\mathcal{E} = v^2/2 - \mu/r = -\mu/(2a)$).
- **Specifický impuls (I_{sp} – Specific Impulse):** Základní měřítko palivové účinnosti raketového motoru udávané v sekundách; doba, po kterou motor vyvine tah 1 N při spotřebě 1 N tíhy paliva na zemském povrchu.

- **Startovací okno (Launch window):** Přesně vymezený časový interval, během kterého musí raketa odstartovat, aby dosáhla cílové oběžné roviny či meziplanetární trajektorie s minimální spotřebou paliva.
- **Stavový vektor (State vector):** Dvojice vektorů polohy a rychlosti $[\vec{r}, \vec{v}] = [x, y, z, v_x, v_y, v_z]^T$ plně a jednoznačně popisující stav tělesa v inerciálním prostoru.
- **Station-keeping (Udržování pracovní pozice dráhy):** Pravidelné motorické korekce dráhy kompenzující rušivé vlivy za účelem udržení družice v přiděleném orbitálním koridoru či libračním bodě.
- **Stopa družice (Ground track):** Průmět prostorové trajektorie obíhající družice na rotující povrch planety (sub-satelitní bod).
- **Střední anomálie (M – Mean Anomaly):** Úhlová veličina fiktivního tělesa obíhajícího rovnoměrně po kružnici se stejnou periodou; roste přímo úměrně s časem ($M = n(t - t_p)$).
- **Střední dráhové elementy (Mean orbital elements):** Elementy dráhy zbavené krátkoperiodických gravitačních oscilací; tvoří vstupní data formátu TLE pro model SGP4.
- **Střední pohyb (n – Mean Motion):** Průměrná úhlová rychlost tělesa na dráze vyjádřená v radiánech za sekundu ($n = \sqrt{\mu/a^3}$) nebo v počtu celých oběhů za den.
- **Synodická perioda (Synodic period):** Doba, po které se dvě tělesa obíhající společně centrum vrátí do identické vzájemné geometrické konfigurace (např. startovací okna k Marsu se opakují po 780 dnech).

T

- **TEME soustava (True Equator, Mean Equinox):** Geocentrická inerciální souřadná soustava používaná jako referenční rámec výstupních stavových vektorů modelu SGP4.
- **Tlak slunečního záření (Solar Radiation Pressure, SRP):** Tlak $P_{\odot} = S_{\odot}/c \approx 4,54 \mu\text{Pa}$ vyvíjený proudem slunečních fotonů ve vzdálenosti 1 AU.
- **TLE – Dvouřádkové elementy dráhy (Two-Line Elements):** Mezinárodní standardizovaný formát o dvou řádcích po 69 znacích pro kódování dráhových parametrů umělých těles.
- **Topocentrické souřadnice (Topocentric coordinates):** Souřadný systém vázaný na konkrétního pozorovatele na zemském povrchu vyjadřující polohu družice pomocí azimutu, elevace a vzdálenosti.
- **Triangulární body (Triangular libration points):** Librační body L4 a L5 tvořící s oběma primárními tělesy rovnostranné trojúhelníky; jsou stabilní pro poměr hmotností $m_1/m_2 > 24,96$.
- **Trojané (Trojan asteroids):** Přirozená tělesa (planetky) zachycená ve stabilních triangulárních libračních bodech L4 a L5 velkých planet (zejména Jupiteru).
- **Tsiolkovského / Ciolkovského raketová rovnice (Tsiolkovsky rocket equation):** Základní vztah raketové dynamiky $\Delta v = I_{sp} g_0 \ln(m_0/m_f)$ odvozený ze zákona zachování hybnosti.

U, V, Z

- **Uzlová přímka (Line of nodes):** Průsečnice roviny oběžné dráhy se základní referenční rovinou (rovníkem); spojuje vzestupný a sestupný uzel.
- **Vektorový součin v astrodynamice (Cross product):** Operace $\vec{r} \times \vec{v}$ vytvářející vektor momentu hybnosti $\vec{h}$ fixující oběžnou rovinu v prostoru.
- **Velká poloosa (a – Semi-Major Axis):** Polovina nejdelšího rozměru elipsy; určuje celkovou mechanickou energii dráhy i periodu oběhu tělesa.
- **Vzestupný uzel (Ascending node):** Průsečík dráhy s rovinou rovníku, v němž družice přechází z jižní polokoule na severní.
- **Zážeh apogea / perigea (Apogee burn / Perigee burn):** Motorický impuls provedený v apogeu (zvedá perigeum či mění sklon) nebo v perigeu (zvedá apogeu).
- **Zploštění tělesa (f – Flattening / Oblateness):** Geometrická deformace rotující planety vyjádřená poměrem $f = (R_{eq} - R_p)/R_{eq}$ (u Země $f \approx 1/298,26$).

C.2 Srovnávací přehled často zaměňovaných pojmů

V odborné literatuře a novinářských zprávách často dochází k nepřesnostem a záměnám zdánlivě podobných pojmů. Tento přehled uvádí na pravou míru sedm nejčastějších terminologických omylů:

1. Geostacionární dráha (GEO) versus Geosynchronní dráha (GSO)

- **Geosynchronní dráha (GSO):** Libovolná oběžná dráha se siderickou periodou rovnou přesně jedné otočce Země kolem osy (23 h 56 min 4 s). Může mít libovolný sklon vůči rovníku i nenulovou excentricitu. Družice se během dne na obloze pohybuje a opisuje analemu ve tvaru číslice 8.
- **Geostacionární dráha (GEO):** Zvláštní, striktně vymezený podtyp GSO, který je **přesně kruhový** ($e = 0$) a **leží přesně v rovině zemského rovníku** ($i = 0^\circ$). Družice na GEO se z pohledu pozorovatele na Zemi jeví jako absolutně nehybný bod na obloze. Každá GEO dráha je geosynchronní, ale zdaleka ne každá GSO dráha je geostacionární!

2. Apsidy: Kdy použít perigeum, perihélium a pericentrum?

Předpona *peri-* znamená řecky „blízko“ a *apo-* „daleko“. Druhá polovina slova specifikuje centrální těleso: *Kolem Země (Gé):* Perigeum / Apogeuem* *Kolem Slunce (Hélios):* Perihélium (přisluní) / Afélium (odsluní)* *Kolem Měsíce (Seléné):* Periselenium (perilunium) / Aposelenium (apolunium)* *Kolem Jupitera (Jove/Zevs):* Perijovium / Apojovium* *Kolem Marsu (Arés):* Periareion / Apoareion* *Kolem libovolného obecného tělesa:* Pericentrum (periapsida) / Apocentrum (apoapsida)*

3. Oskulační elementy versus Střední elementy (Mean Elements)

- **Oskulační elementy:** Představují okamžitý matematický stav kuželoščky v dané mikrosekundě. V reálném gravitačním poli s poruchami neustále divoce pulzují v důsledku krátkoperiodických gravitačních sil zploštění planety.
- **Střední elementy (Mean elements):** Elementy, z nichž byly tyto krátkodobé oscilace analyticky odfiltrovány (vyhlazeny). Zachycují pouze dlouhodobý sekulární vývoj dráhy. Jsou základem formátu TLE pro model SGP4.

4. Laplaceova sféra vlivu (SOI) versus Hillova sféra

Laplaceova sféra ($r_{\text{SOI}} = a(m/M)^{2/5}$): Určuje dynamickou hranici, kde je výhodnější přepnout vztažnou soustavu z heliocentrismu na planetocentrismus pro analytickou metodu slátaných kuželošček (Patched Conics*).

- **Hillova sféra** ($r_{\text{Hill}} = a\sqrt[3]{m/(3M)}$): Určuje fyzikální mez kruhového omezeného problému tří těles (CR3BP), uvnitř které dokáže planeta gravitačně udržet svůj vlastní měsíc či družici před stržením slapovými silami Slunce.

5. Trojice anomálií: Pravá, Excentrická a Střední

- **Pravá anomálie** (θ): Skutečný geometrický fyzikální úhel měřený z ohniska od perigea k okamžité poloze družice.
- **Excentrická anomálie** (E): Pomocný geometrický úhel měřený ze středu elipsy na opsanou kružnici; tvoří matematický most v Keplerově rovnici.
- **Střední anomálie** (M): Fiktivní úhel, který by opisovalo těleso pohybující se po kružnici zcela rovnoměrnou úhlovou rychlostí. Roste lineárně s plynoucím časem: $M(t) = n(t - t_p)$.

6. Časové systémy: UTC, TAI a UT1

- **TAI:** Zcela rovnoměrný fyzikální čas generovaný atomovými hodinami.
- **UT1:** Astronomický čas měřený skutečným nepravidelným fyzickým otáčením planety Země vůči hvězdám.
- **UTC:** Občanský standardní čas. Běží rovnoměrně podle atomových hodin, ale vkládáním přestupných sekund je udržován v souladu s rotačním časem planety UT1 s přesností do 0,9 s (aktuální posun je $\text{TAI} - \text{UTC} = 37$ sekund).

☑ ZÁVĚREČNÉ SLOVO K TERMINOLOGII A CELÉ MONOGRAFII

Osvojení přesné odborné terminologie nebeské mechaniky je branou k porozumění modernímu kosmickému inženýrství. Tento česko-anglický glosář na portálu **AstroHub.cz** propojuje bohatou domácí astronomickou tradici se standardy světových kosmických agentur.

Ať už plánujete meziplanetární trajektorii k vnějším planetám, modelujete jemné perturbace zemského elipsoidu, nebo jen s dalekohledem na zahradě čekáte na večerní přelet stanice ISS podle čerstvých TLE elementů, přesné matematické a fyzikální pojmy vám umožní nahlédnout za oponu zdánlivě složitých rovnic a spatřit v nich čistou geometrickou harmonii vesmíru.