

AstroHUB

Fyzikální kosmologie

Geometrie, reliktní záření a temný vesmír

AUTOR

David Pěkník

OBSAH

	Úvod a předmluva: Kosmologie jako exaktní věda	4
ČÁST I: GEOMETRIE A KINEMATIKA ROZPÍNAJÍCÍHO SE VESMÍRU		
Kapitola 1	FLRW metrika a obecná relativita	9
1.1	Einsteinovy rovnice gravitačního pole a tenzorový formalismus	9
1.2	Symetrie prostoročasu, Killingovy vektory a odvození FLRW metriky	10
1.4	Komovující souřadnice, konformní čas a nadsvětelná expanze	11
Kapitola 2	Friedmannovy rovnice a kosmologické modely	16
2.1	Tenzor energie a hybnosti a stavová rovnice	16
2.2	Friedmannovy rovnice a bezrozměrné hustotní parametry	17
2.5	Kosmické horizonty: částicový horizont a horizont událostí	19
Kapitola 3	Kosmologické vzdálenosti a rudý posuv	22
3.1	Kinematika kosmologického rudého posuvu	22
3.3	Úhlová a zářivá vzdálenost, Etheringtonův teorém	24
ČÁST II: RANÝ VESMÍR A TERMODYNAMIKA		
Kapitola 4	Kosmická inflace a generace fluktuací	29
4.1	Problémy klasického horkého velkého třesku	29
4.2	Dynamika inflatonového pole a aproximace pomalého valení	29
4.4	Kvantové fluktuace a primordiální výkonová spektra	31
Kapitola 5	Prvotní nukleosyntéza BBN	36
5.2	Zamrznutí slabých interakcí (Weak Freeze-Out)	37
5.3	Deuteriové úzké hrdlo a výtěžky primordiálních prvků	37
Kapitola 6	Rekombinace a fyzika reliktního záření CMB	43
6.2	Peeblesův tříhladinový model rekombinace vodíku	43
6.4	Fyzikální mechanismy anizotropií CMB a akustické vrcholy	45
6.6	Polarizace CMB: E-módy a primordiální gravitační B-módy	46
ČÁST III: VZNIK STRUKTUR A TEMNÝ VESMÍR		
Kapitola 7	Lineární poruchová teorie a Jeansova hmotnost	51
7.2	Odvození rovnice vývoje poruch hustoty	52
7.3	Jeansova vlnová délka a Jeansova hmotnost	52
7.5	Přenosová funkce a výkonové spektrum hmoty $P(k)$	54
Kapitola 8	Temná hmota a gravitační čočkování	58
8.2	Kupa Bullet Cluster jako přímý empirický důkaz	59
8.4	Silné a slabé gravitační čočkování (Cosmic Shear)	60
8.5	Profily halo temné hmoty: NFW profil vs. jádro	61
Kapitola 9	Temná energie a zrychlená expanze	64
9.1	Objev zrychlené expanze pomocí supernov typu Ia	64
9.3	Dynamická temná energie, kvintesence a modifikovaná gravitace	65
ČÁST IV: POZOROVACÍ TESTY A MODERNÍ KOSMOLOGIE		
Kapitola 10	Baryonové akustické oscilace BAO	71
10.1	Fyzikální podstata standardního pravítka zvukového horizontu	71
10.2	Korelační funkce galaxií a Landyho-Szalayův estimátor	72
10.4	Pozorovací milníky: SDSS, BOSS, eBOSS a DESI	73

Kapitola 11	Kosmologický rozpor Hubbleovy konstanty H_0	77
11.1	Formulace Hubbleova napětí (Early vs. Late Universe)	77
11.2	Lokální žebřík vzdáleností vs. CMB z mise Planck	78
11.5	Napětí parametru S_8 (LSS Tension) a nové fyzikální scénáře	80

ČÁST V: PŘÍLOHY A PRAKTICKÉ REPETITORIUM

Dodatek A	Matematická odvození Friedmannových rovnic	84
Dodatek B	Kosmologické výpočty v Astropy a CAMB	89
Dodatek C	Sbírka 15 řešených výpočetních úloh	96
Dodatek D	Encyklopedický glosář fyzikální kosmologie	105

Úvod a předmluva: Kosmologie jako exaktní věda

Fyzikální kosmologie prošla v průběhu uplynulého století jednou z nejpozoruhodnějších proměn v dějinách exaktních věd. Zatímco ještě na počátku dvacátého století byla otázka původu, geometrie a globálního vývoje vesmíru doménou spíše filosofických spekulací a kvalitativních hypotéz, dnes představuje kosmologie vysoce rigorózní vědní obor. V moderní éře je postulována na přesných tenzorových rovnicích obecné teorie relativity, nerovnovážné statistické termodynamice, kvantové teorii pole a masivních datech z přehlídek kosmických observatoří, jakými jsou satelity COBE, WMAP, Planck, vesmírné dalekohledy Hubble a James Webb (JWST), i pozemní spektroskopické projekty typu SDSS a DESI.

Tato vysokoškolská monografie a učební text edice **AstroHub.cz** je koncipována jako komplexní teoretický i výpočetní průvodce moderní fyzikální kosmologií. Klade si za cíl překlenout propast mezi abstraktním diferenciálně-geometrickým aparátem gravitačního pole a praktickou astrofyzikální interpretací pozorovaných fenoménů, jakými jsou anizotropie reliktního mikrovlnného záření (CMB), baryonové akustické oscilace (BAO), gravitační čočkování kupami galaxií či akcelerovaná expanze prostoročasu řízená temnou energií.

Kosmologický princip a hierarchie škál

Základním epistemologickým kamenem moderní kosmologie je **kosmologický princip**. Tento postulát tvrdí, že ve statistickém smyslu je vesmír na dostatečně velkých prostorových škálách prostorově homogenní a izotropní:

1. **Homogenita:** Prostorové vlastnosti vesmíru jsou invariantní vůči translaci. Žádný bod v prostoru není preferovaný; průměrná hustota energie $\bar{\rho}$ a lokální expanzní rychlost jsou v daném kosmickém čase t v každém místě identické.
2. **Izotropie:** Prostorové vlastnosti vesmíru jsou invariantní vůči prostorové rotaci kolem libovolného pozorovatele. Neexistuje žádný privilegovaný směr.

Je nezbytné zdůraznit, že kosmologický princip neplatí na malých škálách, kde gravitační nestabilita vedla ke kolapsu hmoty do vysoce nehomogenních struktur: planetárních soustav (10^{-4} pc), hvězdokup (10 pc), galaxií (10^4 pc) a galaktických kup (10^6 pc = 1 Mpc). Homogenita se projevuje až jako vlastnost průměrovaná přes objemy s lineárním rozměrem přesahujícím přibližně $100 h^{-1}$ Mpc (tzv. *škála homogenity* nebo *End of Greatness*).

📌 ZAJÍMAVOST

Pozorovací verifikace izotropie: Nejsilnější empirický důkaz izotropie poskytuje reliktní mikrovlnné záření (CMB). Po odečtení dipólové anizotropie způsobené pohybem naší lokální skupiny galaxií vůči klidové soustavě CMB rychlostí přibližně 370 km/s vykazuje teplota reliktního pozadí odchylky pouhých $\Delta T/T_0 \approx 10^{-5}$ napříč celou nebeskou kférou.

Standardní model kosmologie (Λ CDM)

Současný standardní model vesmíru, označovaný jako **Λ CDM model** (Lambda Cold Dark Matter), popisuje prostoročas pomocí homogenní a izotropní Friedmannovy-Lemaîtreovy-Robertsonovy-Walkerovy (FLRW) metriky s nulovou prostorovou křivostí ($k = 0$). Energetická bilance současného vesmíru je podle nejpresnějších měření mise Planck (2018) rozdělena do čtyř fundamentálních komponent:

Složka vesmíru	Hustotní parametr Ω_i	Fyzikální podstata a charakteristika
Temná energie (Λ)	$\approx 0,685$ (68,5 %)	Kosmologická konstanta či energie vakua s $w = -1$, působící antigravitačně
Chladná temná hmota (CDM)	$\approx 0,265$ (26,5 %)	Bezkolizní, nerelativistické částice interagující pouze gravitačně
Baryonová hmota	$\approx 0,049$ (4,9 %)	Běžná hmota tvořená protony, neutrony a elektrony (hvězdy, plyn, prach)
Záření a neutrina	$\approx 9 \times 10^{-5}$ (0,01 %)	Relativistické fotony CMB a reliktní neutrina ($w = 1/3$)

Přestože model Λ CDM excelentně vysvětluje široké spektrum nezávislých pozorování od prvotní nukleosyntézy přes fluktuace CMB až po velkoškálovou strukturu galaxií, čelí zásadním teoretickým i pozorovacím výzvám:

- **Problém kosmologické konstanty:** Teoretická hodnota hustoty energie vakuových kvantových fluktuací vypočtená v rámci standardního modelu částicové fyziky převyšuje pozorovanou hodnotu ρ_Λ o 60 až 120 řádů.
- **Podstata temné hmoty:** Přes desetiletí intenzivních experimentů přímé i nepřímé detekce zůstává fundamentální částice temné hmoty (WIMP, axion, sterilní neutrina) neznámá.
- **Hubbleovo napětí (H_0 tension):** Statisticky signifikantní rozpor (přesahující 5σ) mezi přímým měřením expanzní rychlosti v lokálním vesmíru pomocí cefeid a supernov ($H_0 \approx 73$ km/s/Mpc) a predikcí modelu Λ CDM kalibrovanou na raný vesmír misí Planck ($H_0 \approx 67,4$ km/s/Mpc).

Struktura publikace a výpočetní aparát

Kniha je systematicky rozdělena do pěti tematických částí:

- **Část I (Geometrie a kinematika rozpínajícího se vesmíru):** Formuluje Einsteinovy rovnice gravitačního pole, zavádí FLRW metriku, odvozuje Friedmannovy rovnice a definuje soustavu kosmologických vzdáleností.
- **Část II (Raný vesmír a termodynamika):** Zkoumá mechaniku inflačního rozpínání, termální rovnováhu a zamrznutí primordiální nukleosyntézy (BBN) a proces rekombinace s uvolněním CMB.
- **Část III (Vznik struktur a temný vesmír):** Analyzuje Jeansovu nestabilitu v expandujícím prostředí, fenomén gravitačního čočkování a fyziku temné energie.
- **Část IV (Pozorovací testy a moderní kosmologie):** Detailně rozebírá baryonové akustické oscilace (BAO), kosmologické svíčky a detailní analýzu napětí Hubbleovy konstanty.
- **Část V (Přílohy):** Přináší kompletní tenzorová odvození, programátorský manuál pro knihovny ``astropy`` a ``camb``, 15 detailně řešených numerických úloh a encyklopedický glosář.

Všechny kapitoly obsahují plně reprodukovatelné skripty v jazyce Python využívající vědecký ekosystém NumPy, SciPy a Matplotlib. Čtenář je tak veden od základních fyzikálních postulátů až k vlastnímu numerickému modelování kosmologických procesů.

Část I: Geometrie a kinematika rozpínajícího se vesmíru

Globální dynamika vesmíru je v moderní astrofyzice formulována jako geometrický problém čtyřrozměrného zakřiveného prostoročasu. Einsteinova obecná teorie relativity odhalila fundamentální jednotu mezi distribucí hmoty a energie na straně jedné a metrickou strukturou prostoročasu na straně druhé. Na rozdíl od klasické newtonovské mechaniky, kde prostor představuje rigidní a statickou arénu pro pohyb těles, v obecné relativitě je prostoročas dynamickým fyzikálním objektem schopným deformace, vlnění a globální expanze.

V první části této publikace vybudujeme matematický a fyzikální aparát kosmologického popisu:

- **Kapitola 1 (FLRW metrika a obecná relativita):** Odvodíme metriku homogenního a izotropního prostoročasu z fundamentálních symetrií a Killingových vektorových polí. Zavedeme tenzorový formalismus, komovující souřadnice a konformní čas.
- **Kapitola 2 (Friedmannovy rovnice a kosmologické modely):** Propojíme FLRW metriku s tenzorem energie a hybnosti ideální kosmologické tekutiny. Odvodíme obě Friedmannovy rovnice, zavedeme bezrozměrné hustotní parametry a prozkoumáme analytická i numerická řešení pro různé složky vesmíru.
- **Kapitola 3 (Kosmologické vzdálenosti a rudý posuv):** Převedeme abstraktní metrické veličiny do empiricky měřitelných astronomických pozorování. Definujeme kosmologický rudý posuv, komovující, úhlovou a zářivou vzdálenost a ukážeme princip kalibrace standardních svíček a pravítek.

Kapitola 1: FLRW metrika a obecná relativita

Pochopení globální stavby vesmíru vyžaduje propojení geometrie čtyřrozměrného pseudoriemannovského prostoročasu s Einsteinovou gravitační teorií. V této kapitole odvodíme nejobecnější metrický tenzor, který respektuje fundamentální symetrie postulované kosmologickým principem, zavedeme komovující souřadnicový systém a prozkoumáme kinematické důsledky metrické expanze prostoru.

1.1 Einsteinovy rovnice gravitačního pole a tenzorový formalismus

Základním zákonem obecné teorie relativity jsou Einsteinovy rovnice gravitačního pole, které v přítomnosti kosmologické konstanty Λ nabývají tvaru:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

kde $g_{\mu\nu}$ je metrický tenzor se signaturou $(-, +, +, +)$, $G_{\mu\nu}$ značí Einsteinův tenzor, G je Newtonova gravitační konstanta, c je rychlost světla ve vakuu a $T_{\mu\nu}$ představuje tenzor energie a hybnosti. Einsteinův tenzor je definován prostřednictvím Ricciho tenzoru $R_{\mu\nu}$ a Ricciho skaláru křivosti R :

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

Geometrické tenzory křivosti jsou přímo odvozeny z afinní konexe prostoročasu, reprezentované Christoffelovými symboly druhého druhu $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$. Ty vyjadřují derivace metrického tenzoru:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right)$$

Riemannův tenzor křivosti $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ následně měří nekomutativnost kovariantních derivací vektorového pole:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}$$

Zúžením Riemannova tenzoru přes první a třetí index obdržíme Ricciho tenzor $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$ a dalším zúžením Ricciho skalár $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Díky Bianchiho identitám platí pro Einsteinův tenzor kovariantní divergence:

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$$

Tato geometrická vlastnost přímo zaručuje lokální zákon zachování energie a hybnosti pro hmotnou náplň vesmíru:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

1.2 Symetrie prostoročasu a Killingovy vektory

Kosmologický princip vyžaduje, aby byl vesmír prostorově homogenní a izotropní. V diferenciální geometrii jsou spojitě symetrie reprezentovány izometriemi – difeomorfismy, které zachovávají metrický tenzor. Každá jednoparametrická skupina izometrií je generována Killingovým vektorovým polem ξ^μ , jež splňuje Killingovu rovnici:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$$

kde $\mathcal{L}_\xi$ značí Lieovu derivaci podél vektorového pole ξ . V obecném n -rozměrném prostoru může existovat nejvýše $n(n+1)/2$ lineárně nezávislých Killingových vektorů. Pro trojrozměrný prostor ($n = 3$) je maximální počet roven šesti:

- 3 Killingovy vektory prostorových translací (zaručující homogenitu),
- 3 Killingovy vektory prostorových rotací (zaručující izotropii).

Prostoročas splňující kosmologický princip lze proto rozložit (foliovat) na jednoparametrickou rodinu prostorových trojrozměrných nadploch Σ_t s maximální symetrií, parametrizovaných globálním kosmickým časem t . Časový vektorový vektor ∂_t je kolmý ke všem prostorovým řezům Σ_t , což eliminuje smíšené složky metriky $g_{0i} = 0$.

1.3 Odvození FLRW metriky

Metrika homogenního a izotropního vesmíru, nezávisle odvozená Alexanderem Friedmannem (1922), Georgesem Lemaître (1927), Howardem Robertsonem (1935) a Arthurem Walkerem (1936), má obecný prostoročasový interval:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\sigma^2$$

kde $a(t)$ je bezrozměrný expanzní faktor (scale factor), který normalizujeme k dnešní hodnotě $a(t_0) \equiv 1$, a $d\sigma^2$ je metrika trojrozměrného prostoru s konstantní prostorovou křivostí. V polárních sférických souřadnicích (r, θ, ϕ) má prostorový lineární element tvar:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Výsledný čtyřrozměrný interval FLRW metriky je tedy:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

Parametr prostorové křivosti k nabývá jedné ze tří hodnot:

1. $k = 0$ (**Eukleidovský, plochý prostor**): Prostorové řezy jsou ploché ($\mathbb{R}^3$). Součet úhlů v trojúhelníku je roven přesně π radiánů.
2. $k = +1$ (**Sférický, uzavřený prostor**): Trojrozměrná hypersféra S^3 vnořená do čtyřrozměrného eukleidovského prostoru. Celkový prostorový objem je konečný a roven $V = 2\pi^2 a^3(t)$.

3. $k = -1$ (**Hyperbolický, otevřený prostor**): Trojrozměrná pseudosféra (Lobačevského prostor). Prostor má nekonečný objem a záporné zakřivení.

Alternativní zápis metriky využívá bezrozměrnou radiální souřadnici χ :

$$r = S_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \text{pro } k = +1 \\ \chi & \text{pro } k = 0 \\ \sinh \chi & \text{pro } k = -1 \end{cases}$$

s níž metrika přechází do elegantní podoby:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

1.4 Komovující souřadnice, konformní čas a nadsvětelná expanze

Souřadnice (r, θ, ϕ) nebo (χ, θ, ϕ) se nazývají **komovující souřadnice** (comoving coordinates). Jsou fixovány na fundamentální pozorovatele, kteří se pohybují výhradně s expanzí kosmické tekutiny (jejich prostorová rychlost je v klidové soustavě plazmatu nulová). Fyzikální vzdálenost $\vec{x}_{\text{phys}}$ mezi dvěma komovujícími objekty v čase t roste úměrně s expanzním faktorem:

$$\vec{x}_{\text{phys}}(t) = a(t) \vec{x}_{\text{com}}$$

Derivací podle kosmického času obdržíme fyzikální rychlost:

$$\vec{v}_{\text{phys}} \equiv \frac{d\vec{x}_{\text{phys}}}{dt} = \dot{a}(t) \vec{x}_{\text{com}} + a(t) \frac{d\vec{x}_{\text{com}}}{dt} = H(t) \vec{x}_{\text{phys}} + \vec{v}_{\text{pec}}$$

kde první člen představuje Hubbleovo rozpínání prostoru s parametrem expanze $H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ a druhý člen je pekuliární rychlost objektu vůči kosmologickému pozadí.

❗ DŮLEŽITÉ

Zdánlivý nadsvětelný pohyb v kosmologii: Pro objekty ve vzdálenosti $d_{\text{phys}} > c/H(t)$ je rychlost metrické expanze $v_{\text{exp}} = H(t)d_{\text{phys}} > c$. Tato skutečnost není v rozporu se speciální teorií relativity. Speciální relativita zakazuje pohyb těles nebo přenos informace *prostorem* rychlostí vyšší než c . V obecné relativitě se však rozpíná samotná metrika prostoročasu, nikoli tělesa v lokálně inerciální soustavě.

Pro popis šíření světla je výhodné zavést **konformní čas** η , definovaný vztahem:

$$d\eta \equiv \frac{dt}{a(t)} \quad \Longrightarrow \quad \eta(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$$

S touto substitucí se FLRW metrika stává konformně ekvivalentní statickému prostoročasu:

$$ds^2 = a^2(\eta) [-c^2 d\eta^2 + d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2]$$

Světelné paprsky (nulové geodetiky s $ds^2 = 0$) pohybující se radiálně ($d\Omega = 0$) splňují jednoduchou rovnici:

$$c^2 d\eta^2 = d\chi^2 \quad \implies \quad \Delta\chi = c\Delta\eta$$

V konformním časoprostorovém diagramu (η, χ) se tedy světelné kužely šíří pod konstantním úhlem 45° , zcela identicky jako v plochém Minkowského prostoročasu speciální relativity.

1.5 Numerická simulace a konformní časový diagram v Pythonu

Následující vědecký skript provádí numerickou integraci kosmického a konformního času pro standardní model Λ CDM a generuje konformní prostoročasový diagram zachycující světelné kužely a trajektorie komovujících galaxií.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

<h1>Kosmologické parametry (Planck 2018)</h1>
H0 = 67.4 # km/s/Mpc
H0_si = H0 * 1e3 / (3.085677581e22) # 1/s
c_si = 299792458.0 # m/s
Om_m = 0.315
Om_L = 0.685
Om_r = 9.0e-5

def E(a):
    """Bezrozmerna Hubbleova funkce E(a) = H(a)/H0."""
    return np.sqrt(Om_r / a<strong>4 + Om_m / a</strong>3 + Om_L)

def dt_da(a):
    """Derivace kosmickeho casu dt/da."""
    return 1.0 / (H0_si * a * E(a))

def deta_da(a):
    """Derivace konformniho casu deta/da."""
    return c_si / (H0_si * a**2 * E(a))

def compute_conformal_diagram():
    # Expanzni faktor od velmi ranneho vesmiru do soucasnosti
    a_grid = np.linspace(1e-4, 1.0, 500)

    t_arr = np.zeros_like(a_grid)
    eta_arr = np.zeros_like(a_grid)

    sec_to_gyr = 1.0 / (365.25 * 86400 * 1e9)
    m_to_gpc = 1.0 / (3.085677581e25)

    for i, a in enumerate(a_grid):
        t_val, _ = quad(dt_da, 1e-6, a)
        eta_val, _ = quad(deta_da, 1e-6, a)
        t_arr[i] = t_val * sec_to_gyr
        eta_arr[i] = eta_val * m_to_gpc

```

```

# Soucasny vek a konformni horizont
t0 = t_arr[-1]
eta0 = eta_arr[-1]

print(f"Soucasny vek vesmiru t0: {t0:.3f} Gyr")
print(f"Soucasny konformni rozmer pozorovaneho vesmiru eta0: {eta0:.3f} Gpc")

# Vykresleni konformniho prostoro-casoveho diagramu
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6))

# Svetelne kuzele z pozorovatele v eta0, chi=0
chi_vals = np.linspace(0, eta0, 300)
past_light_cone = eta0 - chi_vals

ax.plot(chi_vals, past_light_cone, 'r-', lw=2.5, label='Minuly svetelny kuzel (past light cone)')
ax.plot(-chi_vals, past_light_cone, 'r-', lw=2.5)

# Komovujici trajektorie galaxii (svisle cary v konformnich souradnicich)
for chi_gal in [2.0, 5.0, 8.0, 11.0]:
    ax.axvline(chi_gal, color='gray', linestyle='--', alpha=0.6)
    ax.axvline(-chi_gal, color='gray', linestyle='--', alpha=0.6)

    ax.axhline(eta0, color='blue', linestyle=':', label=f'Soucasnost:  $\eta_0$  = {eta0:.1f} Gpc')
ax.set_xlabel('Komovujici vzdalenost  $\chi$  [Gpc]')
ax.set_ylabel('Konformni cas  $\eta$  [Gpc]')
ax.set_title('Konformni prostoro-casovy diagram vesmiru ( $\Lambda$ CDM)')
ax.set_xlim(-15, 15)
ax.set_ylim(0, 16)
ax.grid(True, alpha=0.3)
ax.legend(loc='lower center')

plt.tight_layout()
plt.savefig('conformal_spacetime_diagram.png', dpi=300)
print("Graf 'conformal_spacetime_diagram.png' uspesne ulozen.")

if __name__ == '__main__':
    compute_conformal_diagram()

```


Kapitola 2: Friedmannovy rovnice a kosmologické modely

Dynamika rozpínajícího se vesmíru je určena gravitačním působením všech forem hmoty a energie, které vyplňují prostor. V této kapitole odvodíme Friedmannovy rovnice z Einsteinových rovnic pole aplikovaných na FLRW metriku, analyzujeme základní kosmologické modely a zavedeme aparát kosmických horizontů.

2.1 Tenzor energie a hybnosti a stavová rovnice

Na kosmologických škálách lze veškerou hmotu modelovat jako ideální tekutinu. Tenzor energie a hybnosti v obecném souřadnicovém tvaru je dán výrazem:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$$

kde ρ je klidová hustota hmoty (odpovídající hustotě energie $\varepsilon = \rho c^2$), p je izotropní hydrostatický tlak a $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ je čtyřrychlost kosmické tekutiny. Pro komovujícího pozorovatele v klidové soustavě plazmatu platí $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$ a smíšený tenzor energie a hybnosti má elegantní diagonální tvar:

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho c^2, p, p, p)$$

Zákon zachování energie a hybnosti $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ aplikovaný na nultou (časovou) složku vede k fundamentální **rovnici kontinuity**:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0$$

Fyzikální vlastnosti jednotlivých kosmologických komponent jsou specifikovány barotropní **stavovou rovnicí**:

$$p = w\rho c^2$$

kde w je bezrozměrný parametr stavové rovnice. Dosazením do rovnice kontinuity obdržíme diferenciální rovnici:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}$$

Její integrací získáváme zákon škálování hustoty s expanzním faktorem:

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}$$

Pro klíčové složky vesmíru dostáváme specifické závislosti:

1. **Nerelativistická hmota (baryony a chladná temná hmota, $w = 0$):** Tlak je zanedbatelný vůči klidové energii ($p \ll \rho c^2$). Hustota klesá s rostoucím objemem:

$$\rho_m(a) = \rho_{m,0} a^{-3}$$

1. **Relativistické záření a neutrino ($w = 1/3$):** Fotony podléhají jak poklesu číselné hustoty $n \propto a^{-3}$, tak ztrátě energie v důsledku kosmologického rudého posuvu $E = h\nu \propto a^{-1}$. Celková hustota energie proto klesá jako:

$$\rho_r(a) = \rho_{r,0} a^{-4}$$

1. **Vakuová energie a kosmologická konstanta ($w = -1$):** Tlak je záporný: $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$. Hustota energie vakua zůstává při expanzi striktně konstantní:

$$\rho_\Lambda(a) = \text{konst.} = \rho_{\Lambda,0}$$

2.2 Friedmannovy rovnice

Dosazením FLRW metriky a tenzoru energie a hybnosti do Einsteinových rovnic pole obdržíme dvě nezávislé diferenciální rovnice řídící evoluci expanzního faktoru $a(t)$.

Časová složka ($\mu = 0, \nu = 0$) dává **první Friedmannovu rovnici**:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Prostorové složky ($\mu = i, \nu = i$) ve spojení s první rovnicí poskytují **druhou Friedmannovu rovnici** (nazývanou též akcelerační rovnice):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Definujeme-li **Hubbleův parametr** jako míru relativní rychlosti expanze:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

lze první Friedmannovu rovnici zapsat ve tvaru:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{kc^2}{a^2(t)} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Z druhé rovnice plyne klíčový poznatek: běžná hmota a záření splňující silnou energetickou podmínku ($\rho + 3p/c^2 > 0$) způsobují gravitační zpomalování expanze ($\ddot{a} < 0$). K urychlenému rozpínání vesmíru ($\ddot{a} > 0$) může docházet výhradně tehdy, je-li prostor vyplněn substancí s dostatečně záporným tlakem splňujícím $w < -1/3$.

2.3 Kritická hustota a bezrozměrné hustotní parametry

Předpokládejme vesmír s nulovou prostorovou křivostí ($k = 0$) a nulovou kosmologickou konstantou ($\Lambda = 0$). Z první Friedmannovy rovnice plyne hodnota hustoty, která přesně odpovídá této ploché geometrii – **kritická hustota**:

$$\rho_{\text{crit}}(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

V současné epoše ($t = t_0$) pro $H_0 = 67,4 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ činí hodnota kritické hustoty:

$$\rho_{\text{crit},0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 8,5 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \approx 5 \text{ protonů na m}^3$$

Zavedením bezrozměrných **hustotních parametrů** $\Omega_i \equiv \rho_{i,0}/\rho_{\text{crit},0}$ pro hmotu (Ω_m), záření (Ω_r) a temnou energii ($\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$) a definováním efektivního parametru křivosti:

$$\Omega_k \equiv -\frac{kc^2}{a_0^2 H_0^2} = -\frac{kc^2}{H_0^2}$$

přechází první Friedmannova rovnice v dnešním čase do fundamentální relace:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$$

Pro libovolný expanzní faktor a pak můžeme psát Hubbleův parametr jako funkci a :

$$H^2(a) = H_0^2 E^2(a) = H_0^2 [\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda]$$

Geometrie vesmíru je tedy jednoznačně svázána s celkovou hustotou energie $\Omega_{\text{tot}} \equiv \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$:

- $\Omega_{\text{tot}} = 1 \iff \Omega_k = 0$: Plochý vesmír ($k = 0$).
- $\Omega_{\text{tot}} > 1 \iff \Omega_k < 0$: Uzavřený vesmír ($k = +1$).
- $\Omega_{\text{tot}} < 1 \iff \Omega_k > 0$: Otevřený vesmír ($k = -1$).

2.4 Analytické kosmologické modely

Pro jednosložkové vesmíry s nulovou křivostí existují exaktní analytická řešení:

1. **Einsteinův–de Sitterův vesmír (plošný model dominance hmoty, $\Omega_m = 1$):**

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto a^{-3} \implies \dot{a} \propto a^{-1/2} \implies a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}$$

Věk vesmíru je v tomto modelu roven $t_0 = \frac{2}{3H_0}$.

1. **Radiační vesmír ($\Omega_r = 1$):**

$$H^2 \propto a^{-4} \implies \dot{a} \propto a^{-1} \implies a(t) = (2H_0 t)^{1/2}$$

Věk vesmíru odpovídá $t_0 = \frac{1}{2H_0}$.

1. **de Sitterův vesmír (čistá vakuová dominance, $\Omega_\Lambda = 1$):**

$$H = \text{konst.} = H_0 \implies \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \implies a(t) = e^{H_0(t-t_0)}$$

Expanze probíhá exponenciálně zrychleným tempem, prostor nemá počáteční singularitu ($a \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow -\infty$).

1. **Milneův vesmír (prázdný otevřený vesmír, $\rho = 0, k = -1$):**

$$\dot{a}^2 = c^2 \implies a(t) = \frac{ct}{a_0} = H_0 t$$

Lineární rozpínání představující pouhou kinematickou transformaci Minkowského prostoročasu do expandujících souřadnic.

2.5 Kosmické horizonty

V expandujícím prostoročasu existují fundamentální meze pro šíření světla a kauzální propojení bodů:

- **Částicový horizont (Particle horizon) $\chi_p(t)$:** Maximální komovující vzdálenost, ze které mohlo světlo dorazit k pozorovateli od počátku vesmíru ($t = 0$):

$$\chi_p(t) = \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')} = c\eta(t)$$

Fyzikální poloměr částicového horizontu je $d_p(t) = a(t)\chi_p(t)$. Definuje hranici dnes pozorovatelného vesmíru.

- **Horizont událostí (Event horizon) $\chi_e(t)$:** Maximální komovující vzdálenost, na kterou může světelný signál vyslaný v čase t doputovat v nekonečném budoucím čase ($t \rightarrow \infty$):

$$\chi_e(t) = \int_t^\infty \frac{c dt'}{a(t')}$$

Vesmíry se zrychlenou expanzí dominované temnou energií mají konečný horizont událostí. Události odehrávající se za touto hranicí náš pozorovatel nikdy neuvidí.

2.6 Numerická integrace Friedmannových rovnic v Pythonu

Níže uvedený skript integruje časový vývoj expanzního faktoru pro tři odlišné modely: standardní model Λ CDM, Einsteinův-de Sitterův model a uzavřený vesmír s dominancí hmoty směřující k budoucímu kolapsu (Big Crunch).

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

<h1>Hubbleova konstanta normalizovana na  $H_0 = 1/h_1$ </h1>
<h1>Cas je meren v jednotkach Hubbleova casu  $t_H = 1/H_0$ </h1>

def friedmann_ode(t, a, Om_m, Om_r, Om_L):
    """Diferencialni rovnice  $da/dt = a * H(a)$ ."""
    if a <= 1e-6:
        return 0.0
    Om_k = 1.0 - (Om_m + Om_r + Om_L)
    H_sq = Om_r / a<strong>4 + Om_m / a</strong>3 + Om_k / a**2 + Om_L
    if H_sq < 0:
        return 0.0 # Obrat expanze (kolaps)
    return a * np.sqrt(H_sq)

def solve_models():
    t_span = (1e-4, 2.5)
    t_eval = np.linspace(1e-4, 2.5, 1000)
    a0 = [1e-4]

    # 1. Standardni LambdaCDM (Om_m=0.3, Om_L=0.7)
    sol_lcdm = solve_ivp(
        friedmann_ode, t_span, a0, t_eval=t_eval,
        args=(0.3, 0.0, 0.7), rtol=1e-8, atol=1e-10
    )

    # 2. Einstein-de Sitter (Om_m=1.0, Om_L=0.0)
    sol_eds = solve_ivp(
        friedmann_ode, t_span, a0, t_eval=t_eval,
        args=(1.0, 0.0, 0.0), rtol=1e-8, atol=1e-10
    )

    # 3. Uzavreny vesmir bez Lambda (Om_m=2.0, Om_L=0.0)
    sol_closed = solve_ivp(
        friedmann_ode, (1e-4, 3.5), a0, t_eval=np.linspace(1e-4, 3.5, 1000),
        args=(2.0, 0.0, 0.0), rtol=1e-8, atol=1e-10
    )

```

```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 5.5))
    ax.plot(sol_lcdm.t, sol_lcdm.y[0], 'b-', lw=2.5, label='$\Lambda$CDM
($\Omega_m=0.3, \Omega_\Lambda=0.7$)')
    ax.plot(sol_eds.t, sol_eds.y[0], 'k--', lw=2.0, label='Einstein-de Sitter
($\Omega_m=1.0, \Omega_\Lambda=0$)')
    ax.plot(sol_closed.t, sol_closed.y[0], 'r-.', lw=2.0, label='Uzavreny model
($\Omega_m=2.0, \Omega_\Lambda=0$)')

ax.axhline(1.0, color='gray', linestyle=':', label='Soucasny stav: $a=1$')
ax.set_xlabel('Cas $t$ / $t_H$ (v nasobcich $H_0^{-1}$)')
ax.set_ylabel('Expanzni faktor $a(t)$')
ax.set_title('Evoluce expanzniho faktoru v kosmologickych modelech')
ax.set_xlim(0, 2.5)
ax.set_ylim(0, 2.2)
ax.grid(True, alpha=0.3)
ax.legend(loc='upper left')

plt.tight_layout()
plt.savefig('friedmann_evolution_models.png', dpi=300)
print("Graf 'friedmann_evolution_models.png' uspesne vytvoren.")

if __name__ == '__main__':
    solve_models()
```

Kapitola 3: Kosmologické vzdálenosti a rudý posuv

V zakřiveném a expandujícím prostoročasu ztrácí pojem geometrické vzdálenosti svou triviální eukleidovskou jednoznačnost. Pozorovatel nemůže natáhnout rigidní měřítko k vzdálené galaxii; veškeré informace získáváme prostřednictvím fotonů šířících se po nulových geodetikách. V této kapitole propojíme kosmologický rudý posuv s expanzním faktorem a zavedeme exaktní definice komovující, úhlové a zářivé vzdálenosti.

3.1 Kinematika kosmologického rudého posuvu

Představme si světelný signál vyslaný komovujícím zdrojem v čase t_e při expanzním faktoru $a(t_e)$, který je zachycen pozorovatelem v čase t_0 při $a(t_0) = 1$. Světlo se šíří po radiální nulové geodetice ($ds^2 = 0$):

$$c dt = -a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Pro vlnový signál o frekvenci ν_e vyslaný s časovým intervalem $\Delta t_e = 1/\nu_e$ a přijatý s periodou $\Delta t_0 = 1/\nu_0$ plyne z invariance prostorové komovující vzdálenosti:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{c dt}{a(t)}$$

Odečtením společného integračního intervalu od $t_e + \Delta t_e$ do t_0 a za předpokladu $\Delta t \ll t$ obdržíme fundamentální vztah:

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t_e}{a(t_e)} \implies \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}$$

Definujeme-li **kosmologický rudý posuv** z jako relativní posun vlnové délky spektrálních čar:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1$$

dostáváme klíčový zákon propojující spektrální měření s geometrií vesmíru:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{1}{a(t)}$$

📌 ZAJÍMAVOST

Fyzikální distinkce rudých posuvů: Kosmologický rudý posuv z není důsledkem klasického kinematického Dopplerova jevu (pohybu tělesa okolním prostorem), nýbrž přímým natažením vlnové délky fotonu v důsledku metrické expanze prostoročasu během jeho pouti. V lokálním spektroskopickém měření je však výsledný rudý posuv kombinací kosmologického posuvu, gravitačního rudého posuvu v potenciálové jámě kupy a pekuliárního Dopplerova posuvu způsobeného lokálním pohybem galaxie: $(1 + z_{\text{obs}}) = (1 + z_{\text{cosmo}})(1 + z_{\text{pec}})(1 + z_{\text{grav}})$.

Vztah mezi diferenciálem rudého posuvu a kosmickým časem plyne z definice:

$$a = \frac{1}{1+z} \implies da = -\frac{dz}{(1+z)^2}$$

a proto:

$$dt = \frac{da}{aH(a)} = -\frac{dz}{(1+z)H(z)}$$

3.2 Komovující vzdálenost

Radiální komovující vzdálenost $D_C(z)$ mezi pozorovatelem při $z = 0$ a zdrojem při rudém posuvu z je integrálem podél světelného paprsku:

$$D_C(z) = \int_0^x d\chi' = \int_{t(z)}^{t_0} \frac{c dt'}{a(t')} = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}$$

S využitím bezrozměrné Hubbleovy funkce $E(z) \equiv H(z)/H_0$ zapisujeme:

$$D_C(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$$

kde $c/H_0 \approx 4,28 h^{-1} \text{ Gpc} \approx 3000 h^{-1} \text{ Mpc}$ je **Hubbleův poloměr**.

Pro vesmír s obecnou prostorovou křivostí definujeme **příčnou komovující vzdálenost** (transverse comoving distance) $D_M(z)$:

$$D_M(z) = \begin{cases} \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_k}} \sinh \left(\sqrt{\Omega_k} \frac{H_0 D_C}{c} \right) & \text{pro } \Omega_k > 0 \ (k = -1) \\ D_C(z) & \text{pro } \Omega_k = 0 \ (k = 0) \\ \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sin \left(\sqrt{|\Omega_k|} \frac{H_0 D_C}{c} \right) & \text{pro } \Omega_k < 0 \ (k = +1) \end{cases}$$

V plochém vesmíru ($\Omega_k = 0$) je příčná komovující vzdálenost identická s radiální komovující vzdáleností: $D_M(z) = D_C(z)$.

3.3 Úhlová vzdálenost a její netriviální geometrie

Mějme v prostoru standardní pravítko – astronomický objekt o známém vlastním fyzikálním příčném rozměru $\Delta\ell$, který se nachází při rudém posuvu z . Je-li objekt pozorován pod malým úhlem $\Delta\theta \ll 1$ rad, definujeme **úhlovou vzdálenost** (angular diameter distance) D_A vztahem:

$$D_A(z) \equiv \frac{\Delta\ell}{\Delta\theta}$$

Z FLRW metriky pro příčný prostorový interval ($dt = 0, dr = 0, d\phi = 0$) plyne:

$$\Delta\ell = a(t)r \Delta\theta = \frac{D_M(z)}{1+z} \Delta\theta$$

Odtud dostáváme exaktní vztah mezi úhlovou a příčnou komovující vzdáleností:

$$D_A(z) = \frac{D_M(z)}{1+z} = \frac{c}{(1+z)H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$$

Chování úhlové vzdálenosti vykazuje pozoruhodnou nefyzikální vlastnost z hlediska eukleidovské intuice:

- Pro malé rudé posuvy ($z \ll 1$) roste lineárně podle Hubbleova zákona: $D_A \approx \frac{cz}{H_0}$.
- S rostoucím z začíná dominovat tlumicí člen $1/(1+z)$ plynoucí z menšího expanzního faktoru v době emise světla.
- Funkce $D_A(z)$ dosahuje ostrého maxima při $z \approx 1,5 - 1,6$ (v závislosti na hodnotách Ω_m a Ω_Λ) a pro vyšší rudé posuvy klesá!

❗ DŮLEŽITÉ

Kosmologické zvětšení: Důsledkem poklesu $D_A(z)$ pro $z > 1,6$ je fakt, že objekty o pevném fyzikálním rozměru (např. galaxie o průměru 30 kpc) mají na obloze pro $z = 4$ *větší* úhlový rozměr $\Delta\theta$ než identické objekty při $z = 1,5$. Vesmír v raných epochách funguje jako obří geometrická lupa, protože v době emise fotonů byl prostor podstatně menší a objekt byl fyzicky blíže k naší budoucí pozici.

3.4 Zářivá vzdálenost a Etheringtonův teorém

Mějme standardní svíčku – zdroj o známé bolometrické zářivosti (zářivém výkonu) L . Zaznamenáme-li pozorovatelem bolometrický zářivý tok F [W/m²], je **zářivá vzdálenost** (luminosity distance) D_L definována inverzním čtvercovým zákonem:

$$F \equiv \frac{L}{4\pi D_L^2(z)} \implies D_L(z) \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$$

V expandujícím vesmíru dochází při šíření fotonů ke dvěma nezávislým energetickým ztrátám:

1. Energie každého jednotlivého fotonu klesá v důsledku kosmologického rudého posuvu:

$$E_{\text{obs}} = E_{\text{em}} / (1 + z).$$

2. Rychlost dopadu fotonů na detektor je dilatována časem: $(dt)_{\text{obs}} = (1 + z)(dt)_{\text{em}}$.

Celkový zářivý výkon dopadající na kouli o komovujícím poloměru D_M a ploše $4\pi D_M^2$ je tedy snížen o faktor $(1 + z)^2$:

$$F = \frac{L}{4\pi D_M^2(z)(1 + z)^2}$$

Porovnáním s definičním vztahem obdržíme:

$$D_L(z) = (1 + z)D_M(z)$$

Spojením výrazů pro úhlovou a zářivou vzdálenost získáváme slavný **Etheringtonův teorém reciprocity** (1933):

$$D_L(z) = (1 + z)^2 D_A(z)$$

Tento vztah je fundamentální; platí v libovolné metrické teorii gravitace za předpokladu, že se fotony pohybují po nulových geodetikách a jejich počet se během propagace zachovává (nedochází k rozpadu fotonů ani k absorpci mezigalaktickým prachem).

3.5 Modul vzdálenosti a K-korekce

V pozorovací astronomii se toky vyjadřují v logaritmické škále hvězdných velikostí (magnitud). Rozdíl mezi zdánlivou magnitudou m a absolutní magnitudou M (definovanou jako zdánlivá magnituda ve vzdálenosti 10 pc) určuje **modul vzdálenosti** $\mu(z)$:

$$\mu(z) \equiv m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L(z)}{10 \text{ pc}} \right) = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L(z)}{\text{Mpc}} \right) + 25$$

Při měření ve specifickém fotometrickém filtru (např. standardní Johnson-Cousins filtry U, B, V, R, I) je nutné provést tzv. **K-korekci** $K(z)$. Ta kompenzuje fakt, že filtr na Zemi zachycuje jinou část spektrální distribuce energie (SED) než filtr vysílající v klidové soustavě vzdálené galaxie:

$$m_{\text{filter}} = M_{\text{filter}} + \mu(z) + K(z) + A_{\text{ext}}$$

kde A_{ext} reprezentuje mezihvězdnou extinkci v Mléčné dráze.

3.6 Numerický výpočet kosmologických vzdáleností v Pythonu

Následující skript počítá a vizualizuje průběhy komovující vzdálenosti D_C , úhlové vzdálenosti D_A a zářivé vzdálenosti D_L pro model Planck 2018 v intervalu rudých posuvů $z \in [0, 5]$.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

<h1>Parametry standardního modelu LambdaCDM</h1>
c_kms = 299792.458 # km/s
H0 = 67.4 # km/s/Mpc
Om_m = 0.315
Om_L = 0.685

def E_inv(z):
    """Pevracena bezrozměrná expanzní funkce pro plochy vesmír."""
    return 1.0 / np.sqrt(Om_m * (1.0 + z)**3 + Om_L)

def compute_distances(z_max=5.0, n_points=500):
    z_arr = np.linspace(0.0, z_max, n_points)
    D_C = np.zeros_like(z_arr)

    for i, z in enumerate(z_arr):
        integral, _ = quad(E_inv, 0.0, z)
        D_C[i] = (c_kms / H0) * integral # v Mpc

D_M = D_C.copy() # Pro plochy vesmír Om_k = 0
D_A = D_M / (1.0 + z_arr)
D_L = D_M * (1.0 + z_arr)

# Nalezení maxima uhlové vzdálenosti
idx_max = np.argmax(D_A)
z_turn = z_arr[idx_max]
DA_max = D_A[idx_max]
print(f"Maximum uhlové vzdálenosti D_A: {DA_max:.1f} Mpc při z = {z_turn:.3f}")

# Vykreslení grafu
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 5.5))
ax.plot(z_arr, D_L / 1e3, 'r-', lw=2.5, label='Zariva vzdálenost $D_L(z)$')
ax.plot(z_arr, D_C / 1e3, 'k--', lw=2.0, label='Komovující vzdálenost $D_C(z)$')
ax.plot(z_arr, D_A / 1e3, 'b-.', lw=2.5, label='Uhlová vzdálenost $D_A(z)$')

```

```
ax.scatter([z_turn], [DA_max / 1e3], color='blue', s=60, zorder=5)
ax.annotate(
    f'Maximum $D_A$\n($z = {z_turn:.2f}$)',
    xy=(z_turn, DA_max / 1e3), xytext=(z_turn + 0.4, DA_max / 1e3 + 1.5),
    arrowprops=dict(arrowstyle='->', lw=1.5, color='blue'),
    fontweight='bold', color='navy'
)

ax.set_xlabel('Kosmologický rudý posuv $z$')
ax.set_ylabel('Vzdálenost [Gpc]')
ax.set_title('Kosmologické vzdálenosti v modelu $\Lambda$CDM (Planck 2018)')
ax.set_xlim(0, z_max)
ax.set_ylim(0, 35)
ax.grid(True, alpha=0.3)
ax.legend(loc='upper left')

plt.tight_layout()
plt.savefig('cosmological_distances_comparison.png', dpi=300)
print("Graf 'cosmological_distances_comparison.png' úspěšně uložen.")

if __name__ == '__main__':
    compute_distances()
```

Část II: Raný vesmír a termodynamika

První zlomky sekund po vzniku vesmíru představují unikátní laboratoř vysokých energií, kde se obecná teorie relativity prolíná s kvantovou teorií pole a statistickou fyzikou elementárních částic. Standardní model horkého velkého třesku excelentně popisuje expanzi vesmíru od teplot v řádu jednotek megaelektronvoltů, avšak bez zavedení dynamické inflační epochy ponechává fundamentální vlastnosti dnešního kosmu nevysvětlené jako pouhé náhodné počáteční podmínky.

V druhé části monografie prozkoumáme fyziku extrémně raného vesmíru:

- **Kapitola 4 (Kosmická inflace a generace fluktuací):** Analyzujeme dynamiku inflatonového skalárního pole, která exponenciální expanzí vyřešila problém horizontu a plochosti. Ukážeme, jak se mikroskopické kvantové vakuové fluktuace roztáhly na superhorizontové kosmické škály a staly se zárodky veškeré pozorované struktury.
- **Kapitola 5 (Prvotní nukleosyntéza BBN):** Prozkoumáme termální historii relativistického plazmatu, zamrznutí slabých interakcí při $T \approx 0,8$ MeV, proces deuteriového úzkého hrdla a syntézu prvotních lehkých jader (^4He , D , ^3He , ^7Li).
- **Kapitola 6 (Rekombinace a fyzika reliktního záření CMB):** Odvodíme nerovnovážnou kinetiku zachytu elektronů na jádra podle Peeblesova tříhladinového modelu. Analyzujeme vznik sféry posledního rozptylu, difúzní tlumení a fyzikální mechanismy stojící za akustickými vrcholy v úhlovém spektru anizotropií CMB.

Kapitola 4: Kosmická inflace a generace fluktuací

Standardní kosmologický model horkého velkého třesku slavil obrovské úspěchy ve vysvětlení Hubbleovy expanze a syntézy lehkých prvků. Přesto zanechal hluboké konceptuální hádanky týkající se počátečních podmínek. Řešení těchto problémů navrhl na počátku 80. let 20. století Alan Guth (s dalšími příspěvky Andreje Lindeho, Alexeje Starobinského, Paula Steinhardta a Andrease Albrechta) v podobě teorie **kosmické inflace** – epochy kvazi-exponenciálního rozpínání v raném vesmíru ($t \approx 10^{-36}$ s).

4.1 Problémy klasického horkého velkého třesku

Klasický model bez inflace trpí třemi fundamentálními problémy jemného ladění:

1. **Problém horizontu:** Při rekombinaci ($z \approx 1100$) měl částicový komovující horizont úhlový rozměr na dnešní obloze pouhých přibližně 1° . Oblasti CMB vzdálené od sebe více než 1° nemohly být před vysláním fotonů v žádném kauzálním kontaktu. Přesto vykazují napříč celou oblohou (360°) identickou teplotu s přesností na 10^{-5} . Bez inflace je tato homogenita nevysvětlitelným předpokladem.
1. **Problém plochosti (Flatness problem):** Z první Friedmannovy rovnice plyne vztah pro odchylku hustoty od kritické hodnoty:

$$|1 - \Omega(t)| = \frac{|k|c^2}{a^2 H^2} = \frac{|k|c^2}{\dot{a}^2}$$

V epochách dominovaných zářením ($a \propto t^{1/2} \implies \dot{a} \propto t^{-1/2}$) a hmotou ($a \propto t^{2/3} \implies \dot{a} \propto t^{-1/3}$) expanzní rychlost $\dot{a}$ neustále klesá. Veličina $|1 - \Omega(t)|$ proto s časem roste. Aby dnes platilo $|1 - \Omega_0| \leq 0,005$, musela být v Planckově čase hodnota hustoty jemně vyladěna na $|1 - \Omega(t_{\text{Pl}})| \leq 10^{-60}$.

1. **Problém topologických defektů (magnetických monopolů):** Teorie velkého sjednocení (GUT) předpovídají při fázovém přechodu při energiích 10^{16} GeV masivní produkci stabilních těžkých částic – magnetických monopolů. Jejich odhadovaná hustota by v klasické expanzi zcela dominovala vesmíru a vedla k předčasnému kolapsu.

4.2 Dynamika inflatonového pole a pomalé valení

Inflace řeší tyto paradoxy epochou, během níž zrychlení expanze splňuje $\ddot{a} > 0$, což odpovídá klesajícímu komovujícímu Hubbleovu poloměru:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{c}{aH} \right) < 0 \iff \ddot{a} > 0 \iff \rho + 3 \frac{p}{c^2} < 0$$

Nejjednodušší realizací inflace je homogenní reálné skalární pole $\phi(t)$ – **inflaton**, popsané Lagrangeovou hustotou:

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)$$

kde $V(\phi)$ je potenciál pole. Tenzor energie a hybnosti homogenního pole $\phi(t)$ má efektivní hustotu energie a tlak:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

Pohybová rovnice inflatonu v expandujícím prostoročasu je dána Kleinovou-Gordonovou rovnicí s tlumícím Hubbleovým třením:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0$$

kde $V'(\phi) \equiv dV/d\phi$. Spolu s Friedmannovou rovnicí vyjádřenou pomocí redukované Planckovy hmotnosti $M_{\text{Pl}} \equiv (8\pi G)^{-1/2} = \sqrt{\hbar c/(8\pi G)} \approx 2,435 \times 10^{18} \text{ GeV}/c^2$:

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right)$$

V režimu **pomalého valení** (slow-roll approximation) předpokládáme, že kinetická energie pole je zanedbatelná vůči potenciální energii ($\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$) a zrychlení pole je malé vůči Hubbleovu tření ($|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|$). Rovnice přecházejí do zjednodušeného tvaru:

$$3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi), \quad H^2 \approx \frac{V(\phi)}{3M_{\text{Pl}}^2}$$

Tento režim je kvantifikován bezrozměrnými **parametry pomalého valení**:

$$\epsilon \equiv \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2, \quad \eta \equiv M_{\text{Pl}}^2 \frac{V''(\phi)}{V(\phi)}$$

Režim pomalého valení a zrychlené expanze trvá, dokud platí $\epsilon \ll 1$ a $|\eta| \ll 1$. Inflace končí v momentě, kdy pole zrychlí a $\epsilon(\phi_{\text{end}}) \approx 1$.

4.3 Počet e-foldů expanze a znovuzahřátí

Celková míra nafouknutí vesmíru se měří **počtem e-foldů** N :

$$N \equiv \ln \left(\frac{a(t_{\text{end}})}{a(t)} \right) = \int_t^{t_{\text{end}}} H dt'$$

V aproximaci pomalého valení integrujeme přímo přes hodnoty pole:

$$N = \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi' \approx \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi} \frac{V(\phi')}{V'(\phi')} d\phi'$$

K vyřešení problému horizontu a plochosti je vyžadováno minimálně:

$$N \gtrsim 50 - 60$$

Během této doby se objem vesmíru zvětší minimálně o faktor $e^{60} \approx 10^{26}$, čímž se veškeré předchozí nehomogenity a zakřivení dokonale vyhladí.

Po skončení inflace inflaton osciluje kolem minima svého potenciálu a prostřednictvím vazeb na částice standardního modelu se rozpadá. Tento proces, zvaný **znovuzahřátí** (reheating), přemění potenciální energii inflatonu na horké relativistické plazma a zahájí standardní éru horkého velkého třesku.

4.4 Kvantové fluktuace a primordiální výkonová spektra

Nejpozoruhodnějším důsledkem inflace je původ velkoškálové struktury. Mikroskopické kvantové vakuové fluktuace inflatonu $\delta\phi(\vec{x}, t)$ a metriky jsou metrickou expanzí vytaženy z podhorizontových měřítek přes Hubbleův horizont ($k = aH$) do superhorizontové oblasti, kde zamrznou jako klasické poruchy zakřivení $\mathcal{R}$.

Pro bezrozměrné výkonové spektrum skalárních (hustotních) perturbací platí:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1}$$

kde $k_* = 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$ je pivotní škála, $A_s \approx 2,1 \times 10^{-9}$ je amplituda fluktuací a n_s je **skalární spektrální index**. V aproximaci pomalého valení je spektrální index přímo vyjádřen parametry ϵ a η :

$$n_s - 1 = 2\eta - 6\epsilon$$

Protože $\epsilon, \eta \ll 1$, je spektrum téměř, ale ne zcela invariantní vůči škále (tzv. red-tilted spektrum). Data mise Planck naměřila $n_s = 0,9649 \pm 0,0042$, což s vysokou statistickou signifikancí ($> 8\sigma$) vylučuje přesně škálově invariantní Harrisonovo-Zeldovičovo spektrum ($n_s = 1$).

Kromě skalárních fluktuací generuje inflace též tenzorové perturbace – **primordiální gravitační vlny**:

$$\mathcal{P}_t(k) = A_t \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_t}$$

Poměr tenzorových k skalárním perturbacím r je definován jako:

$$r \equiv \frac{A_t}{A_s} = 16\epsilon$$

Měření parametru r poskytuje přímé určení energetické škály inflace:

$$V^{1/4} \approx 1,04 \times 10^{16} \text{ GeV} \left(\frac{r}{0,01} \right)^{1/4}$$

Současné kombinované limity BICEP/Keck a Planck stanovují $r < 0,036$ (při 95 % C.L.).

📌 ZAJÍMAVOST

Starobinského model (R^2 gravitace): Model inflace navržený Alexejem Starobinským s efektivním potenciálem $V(\phi) = \Lambda^4 \left(1 - e^{-\sqrt{2/3}\phi/M_{\text{Pl}}}\right)^2$ předpovídá $n_s \approx 1 - 2/N$ a $r \approx 12/N^2$. Pro $N = 55$ dostáváme $n_s \approx 0,964$ a $r \approx 0,004$, což leží přesně v srdci nejpravděpodobnější oblasti parametrů pozorovaných družicí Planck. Naopak klasický model s kvadratickým potenciálem $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ předpovídá $r \approx 4/N \approx 0,14$ a je současnými daty experimentálně vyloučen.

4.5 Numerická simulace pomalého valení v Pythonu

Následující skript simuluje trajektorii inflatonu v potenciálu Starobinského typu, integruje počet e-foldů $N(\phi)$ a počítá teoretické hodnoty n_s a r .

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

<h1>Redukovana Planckova hmotnost  $M_{Pl} = 1$ </h1>
M_pl = 1.0

def V_starobinsky(phi, Lambda=1e-3):
    """Potencial Starobinskeho modelu v Einsteinove ramci."""
    return Lambda<strong>4 * (1.0 - np.exp(-np.sqrt(2.0 / 3.0) * phi / M_pl))
</strong>2

def V_prime(phi, Lambda=1e-3):
    """Prvni derivace potencialu dV/dphi."""
    alpha = np.sqrt(2.0 / 3.0) / M_pl
    exp_factor = np.exp(-alpha * phi)
    return 2.0 * Lambda**4 * (1.0 - exp_factor) * alpha * exp_factor

def V_double_prime(phi, Lambda=1e-3):
    """Druha derivace potencialu d2V/dphi2."""
    alpha = np.sqrt(2.0 / 3.0) / M_pl
    exp_factor = np.exp(-alpha * phi)
    return 2.0 * Lambda<strong>4 * alpha</strong>2 * exp_factor * (2.0 *
exp_factor - 1.0)

def slow_roll_parameters(phi):
    """Vypocet parametru pomaleho valeni epsilon a eta."""
    v = V_starobinsky(phi)
    vp = V_prime(phi)
    vpp = V_double_prime(phi)

    eps = 0.5 * M_pl<strong>2 * (vp / v)</strong>2
    eta = M_pl**2 * (vpp / v)
    return eps, eta

def compute_inflation_observables():
    # Hledani phi_end kde epsilon = 1
    phi_grid = np.linspace(0.1, 8.0, 1000)
    eps_vals = np.array([slow_roll_parameters(p)[0] for p in phi_grid])

```

```

idx_end = np.argmin(np.abs(eps_vals - 1.0))
phi_end = phi_grid[idx_end]
print(f"Konec inflace pri phi_end: {phi_end:.3f} M_Pl")

# Integrace e-foldingu  $N(\phi) = \int (V / V') d\phi / M_{Pl}^2$ 
def dN_dphi(p):
    return (1.0 / M_Pl**2) * (V_starobinsky(p) / V_prime(p))

# Nalezeni pocatecniho pole pro  $N = 55$  e-foldu
phi_scan = np.linspace(phi_end, 7.0, 500)
N_arr = np.zeros_like(phi_scan)
for i, p in enumerate(phi_scan):
    val, _ = quad(dN_dphi, phi_end, p)
    N_arr[i] = val

idx_55 = np.argmin(np.abs(N_arr - 55.0))
phi_55 = phi_scan[idx_55]
eps_55, eta_55 = slow_roll_parameters(phi_55)

ns_pred = 1.0 + 2.0 * eta_55 - 6.0 * eps_55
r_pred = 16.0 * eps_55

print(f"Pocatecni pole pro  $N = 55$ :  $\phi_{55} = \{phi\_55:.3f\} M_{Pl}$ ")
print(f"Predikce pro  $N = 55$ :  $n_s = \{ns\_pred:.4f\}$ ,  $r = \{r\_pred:.5f\}$ ")

# Vykreslení potenciálu a parametru
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(11, 4.5))

ax1.plot(phi_grid, V_starobinsky(phi_grid) / 1e-12, 'b-', lw=2.0)
ax1.axvline(phi_end, color='r', linestyle='--', label=f' $\phi_{\{end\}} = \{phi\_end:.2f\}$ ')
ax1.axvline(phi_55, color='g', linestyle=':', label=f' $\phi_{\{55\}} = \{phi\_55:.2f\}$ ')
ax1.set_xlabel('Pole  $\phi / M_{Pl}$ ')
ax1.set_ylabel('Potencial  $V(\phi) \cdot 10^{12}$ ')
ax1.set_title('Inflatonovy potencial Starobinskeho')
ax1.legend()
ax1.grid(True, alpha=0.3)

```

```
ax2.plot(phi_scan, N_arr, 'purple', lw=2.0)
ax2.axhline(55, color='gray', linestyle='--')
ax2.axvline(phi_55, color='g', linestyle=':')
ax2.set_xlabel('Pole  $\phi / M_{Pl}$ ')
ax2.set_ylabel('Pocet e-foldu  $N$ ')
ax2.set_title('Pocet expanzi  $N(\phi)$ ')
ax2.grid(True, alpha=0.3)

plt.tight_layout()
plt.savefig('inflation_slow_roll_starobinsky.png', dpi=300)
print("Graf 'inflation_slow_roll_starobinsky.png' uspesne vytvoren.")

if __name__ == '__main__':
    compute_inflation_observables()
```

Kapitola 5: Prvotní nukleosyntéza BBN

Prvotní nukleosyntéza (Big Bang Nucleosynthesis, BBN) představuje nejstarší epochu kosmologického vývoje, kterou lze přímo a kvantitativně testovat pozorováním chemického složení vesmíru. Odehrála se v časovém intervalu od přibližně 0,1 sekundy do 20 minut po velkém třesku při energiích plazmatu v rozmezí od 10 MeV do 0,01 MeV. BBN poskytuje nezvratný důkaz, že vesmír prošel fází horkého a hustého relativistického stavu, a představuje klíčový pilíř pro nezávislé určení baryonové hustoty vesmíru Ω_b .

5.1 Termodynamika relativistického plazmatu

V raných epochách po znovuzahřátí byl vesmír v téměř dokonalé lokální termodynamické rovnováze. Částice v relativistickém režimu ($k_B T \gg mc^2$) přispívají k celkové hustotě energie relé:

$$\rho_r(T) = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3 c^3}$$

kde $g_*(T)$ je **efektivní počet relativistických stupňů volnosti**:

$$g_*(T) = \sum_{i \in \text{bosony}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{j \in \text{fermiony}} g_j \left(\frac{T_j}{T} \right)^4$$

Faktor 7/8 plyne z rozdílu mezi Fermiho-Diracovou a Boseho-Einsteinovou statistikou. Při teplotách $T > 1 \text{ MeV}$ ($t < 1 \text{ s}$) plazma obsahovalo fotony ($g_\gamma = 2$), elektrony a pozitrony ($g_{e^\pm} = 4$) a tři generace lehkých neutrin a antineutrin ($g_\nu = 6$). Efektivní počet stupňů volnosti činil:

$$g_* = 2 + \frac{7}{8}(4 + 6) = 10,75$$

Expanzní rychlost v radiační epoše je určena Friedmannovou rovnicí:

$$H(T) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_r(T)} = \sqrt{\frac{4\pi^3 G g_*(T)}{45 \hbar^3 c^3}} (k_B T)^2 \propto T^2$$

Vztah mezi kosmickým časem a teplotou plazmatu je dán analytickým vztahem:

$$t \approx 0,74 \text{ s} \cdot g_*^{-1/2} \left(\frac{T}{\text{MeV}} \right)^{-2}$$

Při poklesu teploty pod $T \approx 0,5 \text{ MeV}$ došlo k anihilaci elektron-pozitronových párů ($e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$). Vzhledem k tomu, že neutrina se od zbytku plazmatu již oddělila (decoupling při $T \approx 1 \text{ MeV}$), přelila se entropie párů $e^\pm$ výhradně do fotonového plynu. Z podmínky zachování entropie komovujícího objemu $S \propto g_* a^3 T^3 = \text{konst.}$ plyne poměr teplot po anihilaci:

$$\frac{T_\nu}{T_\gamma} = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} \approx 0,714$$

Tento poměr přetrvává až do dnešního dne: při současné teplotě CMB $T_{\gamma,0} = 2,7255 \text{ K}$ činí teoretická teplota reliktního neutrinového pozadí (Cosmic Neutrino Background, CNB) $T_{\nu,0} \approx 1,945 \text{ K}$.

5.2 Zamrznutí slabých interakcí (Weak Freeze-Out)

Při teplotách $T \gg 1 \text{ MeV}$ byly neutrony a protony udržovány ve vzájemné statistické rovnováze slabými interakcemi:

$$n + \nu_e \longleftrightarrow p + e^-$$

$$n + e^+ \longleftrightarrow p + \bar{\nu}_e$$

$$n \longleftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Rychlost přeměny na jeden nukleon $\Gamma_{n \leftrightarrow p}$ roste s teplotou jako $\Gamma \propto G_F^2 T^5$, kde $G_F \approx 1,166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ je Fermiho vazbová konstanta slabé interakce.

Rovnovážný poměr číselných hustot neutronů n_n a protonů n_p je dán Boltzmannovým faktorem závislým na rozdílu klidových hmotností $\Delta m = m_n - m_p \approx 1,293 \text{ MeV}/c^2$:

$$\left(\frac{n}{p} \right)_{\text{eq}} = \exp \left(- \frac{\Delta m c^2}{k_B T} \right)$$

Jak vesmír expanduje, teplota klesá a expanzní rychlost $H \propto T^2$ začíná předbíhat rychlost slabých procesů $\Gamma \propto T^5$. K **zamrznutí** (freeze-out) dochází v okamžiku, kdy:

$$\Gamma_{n \leftrightarrow p}(T_{\text{freeze}}) \approx H(T_{\text{freeze}})$$

Detailní výpočet udává teplotu zamrznutí:

$$k_B T_{\text{freeze}} \approx 0,8 \text{ MeV} \quad (t \approx 1 \text{ s})$$

V tomto bodě slabé interakce již nedokáží udržovat termodynamickou rovnováhu a poměr neutronů k protonům zamrzá na hodnotě:

$$\left(\frac{n}{p} \right)_{\text{freeze}} \approx \exp \left(- \frac{1,293 \text{ MeV}}{0,8 \text{ MeV}} \right) \approx e^{-1,6} \approx \frac{1}{6} \approx 0,167$$

5.3 Deuteriové úzké hrdlo a volný rozpad neutronů

Po zamrznutí při $t \approx 1 \text{ s}$ již neutrony nemohou efektivně přecházet na protony srážkami s leptony, ale podléhají volnému beta rozpadu ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$) s experimentálním poločasem rozpadu:

$$\tau_n \approx 879,4 \pm 0,6 \text{ s}$$

Časový vývoj poměru neutronů je tedy popsán exponenciálním poklesem:

$$\left(\frac{n}{p}\right)(t) \approx \frac{(n/p)_{\text{freeze}} e^{-t/\tau_n}}{1 + (n/p)_{\text{freeze}}(1 - e^{-t/\tau_n})}$$

Termodynamicky by fúze neutronů a protonů na jádra deuteria ($p + n \rightarrow D + \gamma$) byla energeticky výhodná již při $k_B T \approx 1 \text{ MeV}$, neboť vazbová energie deuteria činí $B_D = 2,22 \text{ MeV}$. Přesto syntéza deuteria v této fázi nenastává v důsledku tzv. **deuteriového úzkého hrdla** (deuterium bottleneck).

Důvodem je enormní převaha fotonů nad baryony vyjádřená poměrem baryonů k fotonům:

$$\eta_b \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} \approx 6 \times 10^{-10}$$

Vysokoenergetický Planckův chvost fotonového spektra s energiemi $E_\gamma > B_D$ okamžitě fotodisociuje každé nově vzniklé jádro deuteria. K efektivní akumulaci deuteria dochází až ve chvíli, kdy teplota klesne na:

$$k_B T_{\text{BBN}} \approx 0,08 \text{ MeV} \quad (T \approx 8 \times 10^8 \text{ K})$$

což odpovídá kosmickému času $t_{\text{BBN}} \approx 200 - 300 \text{ s}$.

Během této doby zpoždění poklesne poměr neutronů k protonům volným rozpadem z původní hodnoty $1/6$ na:

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{BBN}} \approx \frac{1}{7} \approx 0,14$$

5.4 Reakční síť a výtěžky primordiálních prvků

Jakmile teplota dosáhne T_{BBN} , deuteriová bariéra padá a během několika desítek sekund proběhne lavinovitá série jaderných reakcí:

1. Vznik deuteria:



1. Syntéza tritia a helia-3:



1. Finální syntéza helia-4:



Vazbová energie jádra helia-4 (${}^4\text{He}$) je mimořádně vysoká ($B_{\text{He}} \approx 28,3 \text{ MeV}$, tj. $7,1 \text{ MeV}$ na nukleon). Prakticky veškeré dostupné volné neutrony jsou proto okamžitě vázány do jader helia-4.

Hmotnostní podíl helia-4, tradičně značený Y_p , lze analyticky odhadnout z bilance:

$$Y_p \equiv \frac{M_{\text{He}}}{M_{\text{tot}}} = \frac{4n_{\text{He}}}{n_n + n_p} = \frac{4(n_n/2)}{n_n + n_p} = \frac{2(n/p)}{1 + (n/p)}$$

Dosazením zamrzlého poměru $(n/p)_{\text{BBN}} \approx 1/7$ získáváme:

$$Y_p \approx \frac{2 \cdot (1/7)}{1 + 1/7} = \frac{2}{8} = 0,25 \quad (25 \%)$$

Přesné numerické integrace reakční sítě udávají $Y_p = 0,245 \pm 0,003$.

Nukleosyntéza těžších prvků než helium-4 je v raném vesmíru prakticky zastavena dvěma faktory:

- **Absence stabilních jader s nukleonovým číslem $A = 5$ a $A = 8$:** Izotop ${}^5\text{He}$ i ${}^5\text{Li}$ se okamžitě rozpadají s poločasem 10^{-21} s , stejně tak beryllium-8 (${}^8\text{Be} \rightarrow 2 {}^4\text{He}$).
- **Rychlý pokles hustoty:** Tříčásticové srážky typu $3 {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}$ (Salpeterův proces $3-\alpha$), které probíhají v jádrech červených obrů, vyžadují vysoké hustoty a v expandujícím kosmickém plazmatu jsou statisticky zcela zanedbatelné.

Syntetizována jsou proto pouze stopová množství deuteria ($\text{D}/\text{H} \approx 2,5 \times 10^{-5}$), helia-3 (${}^3\text{He}/\text{H} \approx 10^{-5}$) a lithia-7 (${}^7\text{Li}/\text{H} \approx 1,6 \times 10^{-10}$).

❗ DŮLEŽITÉ

Kosmologický lithiový problém: Teoretická hodnota poměru primordiálního lithia ${}^7\text{Li}/\text{H}$ vypočtená ze standardní BBN a kalibrovaná na baryonovou hustotu z mise Planck převyšuje spektroskopicky pozorované zastoupení lithia ve starých halo hvězdách populace II (tzv. Spiteovo plató) přibližně třikrát. Tato diskrepance (označovaná jako lithiový problém) je předmětem intenzivního výzkumu; možná vysvětlení sahají od hvězdné difúze a deplece lithia až po hypotetické rozpady nestabilních částic temné hmoty během BBN.

5.5 Závislost na baryonové hustotě a počet neutrin

Výsledná zastoupení lehkých prvků závisejí na dvou klíčových parametrech:

1. **Hustota baryonů $\Omega_b h^2$ (parametr η_b):** Vyšší baryonová hustota urychluje jaderné reakce, čímž vede k dokonalejšímu spálení deuteria na helium-4. Poměr D/H je proto extrémně citlivým kosmologickým "baryometrem" – čím vyšší Ω_b , tím méně zbylého deuteria.
2. **Efektivní počet neutrinových generací N_{eff} :** Vyšší počet relativistických částic zvyšuje expanzní rychlost $H \propto \sqrt{g_*} T^2$. Freeze-out slabých interakcí nastává při vyšší teplotě, poměr $(n/p)_{\text{freeze}}$ je vyšší a vzniká větší množství ${}^4\text{He}$. Měření Y_p v oblastech H II trpasličích galaxií nezávisle potvrdilo, že počet lehkých neutrinových rodin je $N_\nu = 3$ ještě před přesným změřením rozpadové šířky bosonu Z^0 na urychlovači LEP v CERNu.

5.6 Numerický model primordiální nukleosyntézy v Pythonu

Skript níže modeluje zamrznutí poměru neutronů k protonům v závislosti na teplotě a počítá finální hmotnostní podíl helia Y_p .

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

<h1>Fyzikalni konstanty v SI a MeV</h1>
delta_m = 1.29333 # Rozdil hmotnosti neutronu a protonu v MeV
tau_n = 879.4      # Polocas rozpadu neutronu v s

def equilibrium_np(T_mev):
    """Rovnovazny pomer n/p pri dane teplote T v MeV."""
    return np.exp(-delta_m / T_mev)

def simulate_bbn_freezeout():
    # Teplotni rozsah od 5 MeV do 0.01 MeV
    T_grid = np.logspace(np.log10(5.0), np.log10(0.01), 500)

    # Rychlost slabe interakce a Hubbleova expanze (zjednoduseny semi-
    analyticky model)
    # Gamma_weak ~ G_F^2 * T^5, H ~ T^2
    # Bod protnuti je pri T_freeze ~ 0.8 MeV
    T_freeze = 0.8 # MeV

    np_ratio = np.zeros_like(T_grid)
    freeze_val = equilibrium_np(T_freeze)

    # Cas jako funkce teploty v radiacni epose: t [s] ~ (T / MeV)^(-2)
    for i, T in enumerate(T_grid):
        if T > T_freeze:
            np_ratio[i] = equilibrium_np(T)
        else:
            # Po zamrznuti nastava volny rozpad neutronu
            t = (1.0 / T**2) # cas v sekundach
            t_freeze = (1.0 / T_freeze**2)
            dt = max(0.0, t - t_freeze)
            np_ratio[i] = freeze_val * np.exp(-dt / tau_n)

    # Teplota zahajeni nukleosynthese (prolomeni deuteriova hrdla)
    T_bbn = 0.078 # MeV (~ 80 keV)
    idx_bbn = np.argmin(np.abs(T_grid - T_bbn))
    np_bbn = np_ratio[idx_bbn]

    # Vypocet helia-4
```

```

Y_p = (2.0 * np_bbn) / (1.0 + np_bbn)

    print(f"Teplota freeze-outu: T_f = {T_freeze:.2f} MeV, pomer n/p =
{freeze_val:.4f}")
    print(f"Teplota nukleosyntézy: T_bbn = {T_bbn*1e3:.1f} keV, pomer n/p =
{np_bbn:.4f}")
    print(f"Vysledny teoreticky podil helia Y_p: {Y_p:.4f}")

# Vykresleni grafu
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 5.5))
ax.plot(T_grid, np_ratio, 'b-', lw=2.5, label='Pomer $n/p$')
    ax.plot(T_grid, equilibrium_np(T_grid), 'k--', lw=1.5, alpha=0.6,
label='Termodynamicka rovnovaha')

    ax.axvline(T_freeze, color='r', linestyle=':', label=f'Freeze-out ($T
\\approx {T_freeze}$ MeV)')
    ax.axvline(T_bbn, color='g', linestyle=':', label=f'Deuteriovy zlom ($T
\\approx {T_bbn*1e3:.0f}$ keV)')

ax.set_xscale('log')
ax.set_yscale('log')
ax.invert_xaxis()
ax.set_xlabel('Teplota plazmatu $T$ [MeV]')
ax.set_ylabel('Pomer neutronu k protonum $(n/p)$')
ax.set_title('Zamrznuti slabe interakce a rozpad neutronu pri BBN')
ax.set_xlim(5.0, 0.01)
ax.set_ylim(1e-3, 1.0)
ax.grid(True, which='both', alpha=0.3)
ax.legend(loc='lower left')

plt.tight_layout()
plt.savefig('bbn_freezeout_evolution.png', dpi=300)
print("Graf 'bbn_freezeout_evolution.png' uspesne vytvoren.")

if __name__ == '__main__':
    simulate_bbn_freezeout()

```

Kapitola 6: Rekombinace a fyzika reliktního záření CMB

Relikt ní mikrovlnné záření (Cosmic Microwave Background, CMB) představuje nejstarší elektromagnetický signál, který můžeme ve vesmíru pozorovat. Bylo vyzářeno přibližně 380 000 let po velkém třesku v epoše rekombinace ($z \approx 1100$), kdy teplota expandujícího kosmického plazmatu klesla natolik, že se volné elektrony navázaly na protony za vzniku neutrálních atomů vodíku. V této kapitole odvodíme nerovnovážnou termodynamiku rekombinace, analyzujeme optickou hloubku a funkci viditelnosti a prozkoumáme fyziku akustických oscilací otištěných do úhlového výkonového spektra CMB.

6.1 Sahaova rovnice a její meze

V termodynamické rovnováze je stupeň ionizace plazmatu $x_e \equiv n_e/n_b = n_e/(n_p + n_H)$ popsán **Sahaovou ionizační rovnicí**:

$$\frac{x_e^2}{1 - x_e} = \frac{1}{n_b} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\epsilon_0}{k_B T} \right)$$

kde $\epsilon_0 = 13,6$ eV je ionizační energie základního stavu atomu vodíku a m_e je klidová hmotnost elektronu.

Ačkoliv ionizační potenciál vodíku odpovídá ekvivalentní teplotě $T \approx 157\,800$ K, k rekombinaci dochází při teplotách podstatně nižších ($T \approx 3000$ K, $k_B T \approx 0,3$ eV). Důvodem je opět extrémně nízký poměr baryonů k fotonům $\eta_b \approx 6 \times 10^{-10}$. Obrovský počet fotonů v Planckově spektru znamená, že i při $k_B T \ll \epsilon_0$ existuje dostatečný počet fotonů ve vysokoenergetickém chvostu s $h\nu > 13,6$ eV, které okamžitě fotoionizují nově vzniklé neutrální atomy vodíku.

Sahaova rovnice však selhává v pokročilé fázi rekombinace. Jakmile stupeň ionizace poklesne na $x_e \lesssim 0,1$, hustota částic je natolik nízká a expanze natolik rychlá, že rekombinační reakce $p + e^- \rightarrow \text{H} + \gamma$ již nedokáže udržet rovnovážný stav. Skutečný proces rekombinace zamrzá na zbytkové ionizaci:

$$x_{e,\text{freeze}} \approx 2 \times 10^{-4}$$

6.2 Peeblesův tříhladinový model vodíku

Přímý přechod elektronu do základního stavu $1s$ vyzáří foton o energii Lymanova kontinua ($h\nu \geq 13,6$ eV) nebo Lyman- α foton ($h\nu = 10,2$ eV), který je v opticky hustém prostředí okamžitě reabsorbován sousedním neutrálním atomem. Tím nedochází k žádnému čistému úbytku volných elektronů.

Jim Peebles (1968) ukázal, že čistá rekombinace může probíhat pouze dvěma úzkými "únikovými cestami":

1. **Dvoufotonový zakázaný přechod $2s \rightarrow 1s$:** Elektron přechází z metastabilního stavu $2s$ do základního stavu $1s$ současnou emisí dvou fotonů s celkovou energií $E_1 + E_2 = 10,2 \text{ eV}$. Protože energie žádného z nich samostatně nestačí k excitaci $1s \rightarrow 2p$, mohou tyto fotony volně unikat. Rychlost tohoto zakázaného přechodu činí:

$$\Lambda_{2\gamma} \approx 8,224 \text{ s}^{-1}$$

1. **Červený posuv Lyman- α fotonů:** Rezonanční foton Ly- α vyzářený přechodem $2p \rightarrow 1s$ může být v důsledku kosmologické expanze posunut k delším vlnovým délkám dříve, než narazí na další atom vodíku. Rychlost úniku přes Sobolevovo optické zúžení je úměrná expanznímu parametru:

$$\Gamma_{\text{Sobolev}} = \frac{8\pi H}{3\lambda_{\text{Ly}\alpha}^3 n_{1s}}$$

Časový vývoj ionizačního stupně $x_e(t)$ je popsán Peeblesovou diferenciální rovnicí:

$$\frac{dx_e}{dt} = -C(T) \left[\alpha_B(T) n_b x_e^2 - \beta_B(T) (1 - x_e) \exp\left(-\frac{h\nu_{\text{Ly}\alpha}}{k_B T}\right) \right]$$

kde $\alpha_B(T)$ je rekombinační koeficient pro záchyt na excitované stavy (Case B recombination), β_B je příslušný fotoionizační koeficient a $C(T)$ je Peeblesův korekční faktor reprezentující pravděpodobnost úniku fotonu:

$$C(T) = \frac{\Lambda_{2\gamma} + \Gamma_{\text{Sobolev}}}{\Lambda_{2\gamma} + \Gamma_{\text{Sobolev}} + \beta_B \exp(-h\nu_{\text{Ly}\alpha}/k_B T)}$$

6.3 Thomsonův rozptyl a funkce viditelnosti

Dokud byl vesmír plně ionizován, fotony byly vázány na elektrony prostřednictvím elastického **Thomsonova rozptylu** s účinným průřezem:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 \approx 6,652 \times 10^{-29} \text{ m}^2$$

Střední volná dráha fotonu byla $\lambda_{\text{mfp}} = 1/(n_e \sigma_T) \ll c/H$, takže plazma představovalo neprůhlednou zářící "mlhu".

Optická hloubka pro Thomsonův rozptyl od pozorovatele v čase t_0 zpět k rudému posuvu z je definována integrálem:

$$\tau(z) = \int_{t(z)}^{t_0} n_e(t') \sigma_T c dt' = \int_0^z \frac{c dz'}{(1+z')H(z')} n_b(0)(1+z')^3 x_e(z') \sigma_T$$

Pravděpodobnost, že foton zachycený dnes byl naposledy rozptýlen v intervalu konformního času $(\eta, \eta + d\eta)$, je dána **funkcí viditelnosti** (visibility function) $g(\eta)$:

$$g(\eta) \equiv -\frac{d\tau}{d\eta} e^{-\tau(\eta)} = e^{-\tau} \frac{d\tau}{dz} \frac{dz}{d\eta}$$

Funkce viditelnosti má tvar ostrého gaussovského rozdělení s maximem při:

$$z_* \approx 1089,8 \pm 0,5 \quad (t_* \approx 379\,000 \text{ let})$$

a poloviční šířkou $\Delta z \approx 80$. Tato úzká oblast v prostoročasu se nazývá **sféra posledního rozptylu** (Last Scattering Surface, LSS). Od tohoto okamžiku se fotony šíří vesmírem prakticky bez dalších interakcí.

6.4 Fyzikální mechanismy anizotropií CMB

Pozorované teplotní fluktuace na obloze $\Delta T(\hat{n})/T_0$ jsou výsledkem několika fyzikálních jevů působících na sféře posledního rozptylu i podél dráhy paprsku:

1. **Intenzitní (akustické) perturbace:** Lokální fluktuace hustoty fotonového plynu $\delta_\gamma/4 = \delta T/T$.
2. **Sachsův–Wolfeův jev (gravitační rudý posuv):** Fotony unikající z hlubokých gravitačních potenciálových jam vytvořených primordiálními poruchami temné hmoty ztrácejí energii. Současně dochází k dilataci času, která mění efektivní teplotu emise:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\text{SW}} = \frac{1}{3} \frac{\Phi(\vec{x}_*)}{c^2}$$

kde Φ je newtonovský gravitační potenciál.

1. **Dopplerův jev:** Pohyb baryon-fotonového plazmatu s rychlostí $\vec{v}_b$ v době rekombinace indukuje Dopplerův posuv:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\text{Doppler}} = \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}_b}{c}$$

1. **Integrovaný Sachsův–Wolfeův jev (ISW):** Prochází-li foton gravitační potenciálovou jamou, která se s časem mění ($\dot{\Phi} \neq 0$), energie získaná při pádu se nerovná energii ztracené při výstupu:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\text{ISW}} = \frac{2}{c^2} \int_{\eta_*}^{\eta_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\eta$$

* Časný ISW jev nastává krátce po rekombinaci v důsledku zbytkového vlivu záření na expanzi. * Pozdní ISW jev nastává při $z < 1$, kdy expanzi začíná dominovat temná energie, což způsobuje rozpad gravitačních potenciálů na velkých škálách.

1. **Silkův damping (difúzní tlumení):** Protože sféra posledního rozptylu má konečnou tloušťku a fotony před rekombinací vykonávaly náhodnou procházku, dochází k difúzi fotonů na malých

prostorových škálách pod tzv. Silkův poloměr $\lambda_D \approx 3 \text{ Mpc}$. Fluktuace na multipólech $\ell \gtrsim 1000$ jsou proto exponenciálně tlumeny.

6.5 Výkonové spektrum úhlových fluktuací C_ℓ

Teplotní anizotropie na nebeské sféře rozkládáme do báze ortonormálních **sférických harmonických funkcí** $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$:

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{n})$$

kde koeficienty multipólového rozvoje jsou:

$$a_{\ell m} = \int_{S^2} \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}) d\Omega$$

Předpokládáme-li statistickou izotropii, je střední hodnota koeficientů nulová ($\langle a_{\ell m} \rangle = 0$) a jejich kovariance je diagonální:

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_\ell \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}$$

kde C_ℓ je **úhlové výkonové spektrum**. Multipól ℓ odpovídá úhlové škále na obloze $\theta \approx 180^\circ/\ell$. Standardně se vynáší veličina:

$$\mathcal{D}_\ell \equiv \frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_\ell \quad [\mu\text{K}^2]$$

která přímo reprezentuje příspěvek k teplotnímu rozptylu na logaritmický interval multipólů.

Struktura akustických vrcholů v C_ℓ kóduje fundamentální kosmologické parametry:

- **Poloha 1. vrcholu** ($\ell \approx 220$): Určuje prostorovou křivost vesmíru Ω_k . Odpovídá úhlovému rozměru zvukového horizontu při rekombinaci $\theta_s \approx 1^\circ \implies$ vesmír je s vysokou přesností plochý ($k = 0$).
- **Poměr výšky 1. a 2. vrcholu**: Určuje fyzikální baryonovou hustotu $\Omega_b h^2$. Baryony zvyšují hmotnost plazmatu, čímž zesilují kompresní fáze (liché vrcholy) a potlačují expanzní fáze (sudé vrcholy).
- **Poměr 3. vrcholu k 2. vrcholu**: Měří celkovou hustotu hmoty $\Omega_m h^2$ a potvrzuje přítomnost bezkolizní temné hmoty.

6.6 Polarizace reliktního záření: E-módy a B-módy

Thomsonův rozptyl záření vykazujícího lokální kvadrupólovou anizotropii generuje lineární polarizaci. Polarizační pole na obloze lze jednoznačně matematicky rozložit do dvou ortogonálních složek:

- **E-módy (gradientové módy)**: Bezzkrutové pole se sudou paritou generované primordiálními skalárními (hustotními) poruchami.

- **B-módy (rotorační módy):** Zkrutové pole s lichou paritou. Skalární poruchy v lineárním přiblížení B-módy negenerují. Mohou vznikat výhradně dvěma způsoby: 1. Primordiálními tenzorovými perturbacemi (gravitačními vlnami z inflace) na velkých škálách ($\ell < 100$). 2. Gravitačním čočkováním E-módů velkoškálovou strukturou na malých úhlových škálách ($\ell \sim 1000$).

Detekce primordiálních B-módů je hlavním cílem současných a budoucích experimentů (BICEP Array, Simons Observatory, satelit LiteBIRD) jako definitivní důkaz kvantové gravitační povahy inflace.

6.7 Python skript pro analýzu akustických vrcholů CMB

Následující skript demonstruje načtení, parametrizaci a vizualizaci akustických vrcholů v spektru CMB a výpočet úhlového rozměru zvukového horizontu.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def model_cmb_spectrum():
    # Multipolovy rozsah l od 2 do 2500
    ell = np.arange(2, 2501)

    # Empiricky model akustickych vrcholu (aproximace Planck 2018 TT spektra)
    # Sachs-Wolfe plató na malych l
    sw_plateau = 1000.0 * (ell / 10.0)**(-0.1)

    # Akusticke oscilace: vrcholy pri l ~ 220, 540, 810, 1120...
    peaks = (
        4800.0 * np.exp(-((ell - 220.0) / 90.0)**2) +      # 1. pík (komprese)
        2100.0 * np.exp(-((ell - 540.0) / 110.0)**2) +    # 2. pík (expanze)
        2600.0 * np.exp(-((ell - 810.0) / 120.0)**2) +    # 3. pík (komprese)
        1200.0 * np.exp(-((ell - 1120.0) / 130.0)**2) +   # 4. pík
        800.0 * np.exp(-((ell - 1420.0) / 140.0)**2)     # 5. pík
    )

    # Silk damping (exponencialni difuzni tlumeni)
    damping = np.exp(-(ell / 1300.0)**1.4)

    # Celkove spektrum  $D_{\ell} = \langle l+1 \rangle C_{\ell} / (2\pi)$  v  $\mu K^2$ 
    D_ell = (sw_plateau + peaks) * damping

    # Pridani realneho kosmickeho rozptylu (cosmic variance)
    #  $\text{Var}(C_{\ell}) / C_{\ell}^2 = 2 / (2l + 1)$ 
    cosmic_variance = D_ell * np.sqrt(2.0 / (2.0 * ell + 1.0))

    fig, ax = plt.subplots(figsize=(9, 5.5))
    ax.plot(ell, D_ell, 'b-', lw=2.0, label='Model  $\mathcal{D}_{\ell}^{TT}$  ( $\Lambda$ CDM)')
    ax.fill_between(
        ell, D_ell - cosmic_variance, D_ell + cosmic_variance,
        color='blue', alpha=0.2, label='Kosmicky rozptyl (Cosmic Variance)'
    )

    # Oznaceni akustickych vrcholu
    ax.annotate('1. akusticky pik\n( $\ell \approx 220$ ,  $\Omega_k \approx 0$ )',
               xy=(220, 5700), xytext=(350, 6000),
               arrowprops=dict(arrowstyle='->', lw=1.5, color='red'),

```

```

        fontweight='bold', color='darkred')
ax.annotate('2. pik ( $\Omega_b$ )', xy=(540, 2600), xytext=(560, 3600),
            arrowprops=dict(arrowstyle='->', lw=1.2, color='green'),
            fontweight='bold', color='darkgreen')
ax.annotate('3. pik ( $\Omega_m$ )', xy=(810, 2700), xytext=(850, 4200),
            arrowprops=dict(arrowstyle='->', lw=1.2, color='purple'),
            fontweight='bold', color='purple')
ax.annotate('Silkovo tlumení', xy=(1500, 700), xytext=(1600, 2000),
            arrowprops=dict(arrowstyle='->', lw=1.2, color='gray'),
            fontstyle='italic', color='gray')

ax.set_xlabel('Multipol  $\ell$ ')
ax.set_ylabel('D $_{\ell}^{TT} \equiv \ell(\ell+1)C_{\ell} / (2\pi) [\mu\text{K}^2]$ ')
ax.set_title('Vykonové spektrum teplotních anizotropií CMB (Planck 2018)')
ax.set_xlim(2, 2200)
ax.set_ylim(0, 6800)
ax.grid(True, alpha=0.3)
ax.legend(loc='upper right')

plt.tight_layout()
plt.savefig('cmb_angular_power_spectrum.png', dpi=300)
print("Graf 'cmb_angular_power_spectrum.png' úspěšně vytvořen.")

if __name__ == '__main__':
    model_cmb_spectrum()

```

Část III: Vznik struktur a temný vesmír

Dnešní vesmír vykazuje bohatou hierarchickou strukturu: od jednotlivých hvězd a galaxií přes galaktické skupiny a kupy až po gigantickou kosmickou pavučinu (cosmic web) tvořenou vlákny, stěnami a rozsáhlými prázdnotami (voids). Všechny tyto gigantické gravitačně vázané systémy však vznikly postupným zesilováním nepatrných hustotních odchylek ($\delta \sim 10^{-5}$) přítomných v primordiálním plazmatu na počátku věků.

V třetí části této monografie prozkoumáme mechanismy gravitačního růstu nehomogenit a fyziku dvou dominantních, avšak dosud záhadných složek vesmíru:

- **Kapitola 7 (Lineární poruchová teorie a Jeansova hmotnost):** Formulujeme rovnice hydrodynamické stability v expandujícím prostoročasu, odvodíme Jeansovo kritérium a dramatický propad Jeansovy hmotnosti po rekombinaci. Analyzujeme růstový faktor $D(z)$ v různých dynamických epochách a zavedeme přenosovou funkci spektra hmoty $P(k)$.
- **Kapitola 8 (Temná hmota a gravitační čočkování):** Zrekapitulujeme astrofyzikální důkazy chladné temné hmoty od Zwickyho viriálové analýzy a rotačních křivek spirálních galaxií až po srážku kup galaxií Bullet Cluster. Detailně odvodíme formalismus silného a slabého gravitačního čočkování a prozkoumáme NFW profil halo temné hmoty.
- **Kapitola 9 (Temná energie, kosmologická konstanta a zrychlená expanze):** Představíme přelomový objev akcelerované expanze pomocí supernov typu Ia. Prozkoumáme teoretické dilema kosmologické konstanty, dynamické modely kvintesence s proměnnou stavovou rovnicí $w(a)$ a alternativní teorie modifikované gravitace.

Kapitola 7: Lineární poruchová teorie a Jeansova hmotnost

Vývoj velkoškálové struktury vesmíru je řízen gravitační nestabilitou. Na prostorových škálách mnohem menších než Hubbleův horizont ($r \ll c/H$) a v režimu slabých gravitačních polí ($\Phi/c^2 \ll 1$) lze dynamiku poruch hustoty s vynikající přesností popsat v rámci newtonovské hydrodynamiky expandující tekutiny. V této kapitole odvodíme základní rovnici vývoje hustotního kontrastu, analyzujeme Jeansovu hmotnost a prozkoumáme přenosovou funkci výkonového spektra hmoty.

7.1 Newtonovská hydrodynamika v expandujícím prostoru

Kosmologická tekutina je na subhorizontových škálách popsána soustavou tří fundamentálních rovnic vyjádřených ve fyzikálních souřadnicích $\vec{r} = a(t)\vec{x}$:

1. Rovnice kontinuity (zákon zachování hmoty):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

1. Eulerova pohybová rovnice (zákon zachování hybnosti):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}} p}{\rho} - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi$$

1. Poissonova rovnice pro gravitační potenciál:

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

kde $\vec{u}(\vec{r}, t)$ je celková fyzikální rychlost tekutiny, p je tlak a Φ je gravitační potenciál.

Provedeme transformaci do komovujících souřadnic $\vec{x} = \vec{r}/a(t)$ a zavedeme pekuliární rychlost $\vec{v}(\vec{x}, t) \equiv a(t)\dot{\vec{x}}$:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \dot{a}\vec{x} + \vec{v}(\vec{x}, t) = H\vec{r} + \vec{v}$$

Dále definujeme bezrozměrný **hustotní kontrast** $\delta(\vec{x}, t)$:

$$\delta(\vec{x}, t) \equiv \frac{\rho(\vec{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}$$

kde $\bar{\rho}(t) \propto a^{-3}(t)$ je průměrná homogenní hustota pozadí. V lineární aproximaci předpokládáme malé odchylky od homogenity: $|\delta| \ll 1$ a $|\vec{v}| \ll aH$. Zanedbáním členů druhého a vyšších řádů v perturbacích přechází rovnice kontinuity a Eulerova rovnice do tvaru:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + H\vec{v} = -\frac{c_s^2}{a} \vec{\nabla} \delta - \frac{1}{a} \vec{\nabla} \phi_p$$

kde $\vec{\nabla} \equiv \vec{\nabla}_{\vec{x}}$ je komovující gradient, $c_s \equiv \sqrt{\partial p / \partial \rho}$ je adiabatická rychlost zvuku v médiu a ϕ_p je perturbační část gravitačního potenciálu splňující komovující Poissonovu rovnici:

$$\nabla^2 \phi_p = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta$$

7.2 Odvození rovnice vývoje poruch hustoty

Aplikujeme-li na perturbační Eulerovu rovnici divergenci a dosadíme-li rovnici kontinuity a Poissonovu rovnici, obdržíme po eliminaci pekuliární rychlosti $\vec{v}$ fundamentální diferenciální rovnici druhého řádu pro hustotní kontrast:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \delta + 4\pi G \bar{\rho} \delta$$

Člen $2H\dot{\delta}$ se nazývá **Hubbleovo tření** (Hubble drag) a představuje brzdňý účinek globální metrické expanze prostoročasu na gravitační kolaps.

Díky linearitě lze rovnici rozložit do Fourierových módů:

$$\delta(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

Každý Fourierův mód o komovujícím vlnovém vektoru $\vec{k}$ (fyzikální vlnové délce $\lambda = 2\pi a/k$) se vyvíjí zcela nezávisle podle rovnice:

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \bar{\rho} \right) \delta_k = 0$$

7.3 Jeansova vlnová délka a Jeansova hmotnost

Chování Fourierova módu δ_k je určeno vzájemným soupeřením dvou protichůdných sil:

1. **Gravitační přitažlivost** ($4\pi G \bar{\rho}$): Působí ve směru kolapsu a zesílení poruchy.
2. **Tlakový gradient** ($c_s^2 k^2 / a^2$): Působí jako pružná obnovující síla bránící kompresi tekutiny.

Kritická hodnota, při níž jsou obě síly v rovnováze, definuje **fyzikální Jeansovu vlnovou délku** λ_J :

$$\frac{c_s^2 k_J^2}{a^2} = 4\pi G \bar{\rho} \implies \lambda_J \equiv \frac{2\pi a}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \bar{\rho}}}$$

- **Pro módy s $\lambda < \lambda_J$ ($k > k_J$):** Převažuje tlakový gradient. Člen v závorce je kladný a perturbace nekolabují, nýbrž oscilují jako stojaté akustické vlny s tlumenou amplitudou.

- **Pro módy s $\lambda > \lambda_J$ ($k < k_J$):** Převažuje gravitace. Perturbace jsou nestabilní a monotónně rostou.

Celková hmotnost plynu obsažená v kouli o průměru Jeansovy vlnové délky definuje **Jeansovu hmotnost** M_J :

$$M_J \equiv \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} \left(\frac{\lambda_J}{2} \right)^3 = \frac{\pi}{6} \bar{\rho} \left(c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}} \right)^3 = \frac{\pi^{5/2}}{6G^{3/2}} \frac{c_s^3}{\bar{\rho}^{1/2}}$$

❗ DRAMATICKÝ KOLAPS JEANSOVY HMOTNOSTI PŘI REKOMBINACI:

* **Před rekombinací** ($z > 1100$): Baryony jsou pevně svázány s fotony v relativistické plazma. Rychlost zvuku je relativistická: $c_s \approx c/\sqrt{3} \approx 173\,000$ km/s. Jeansova hmotnost dosahuje gigantické hodnoty $M_J \approx 10^{16} M_\odot$, což odpovídá měřítku obřích nadkup galaxií. Veškeré menší baryonové poruchy (na škálách jednotlivých galaxií) nemohou gravitačně růst a podléhají akustickým oscilacím a Silkovu tlumení. * **Po rekombinaci** ($z < 1100$): Neutrální plyn se odděluje od záření. Rychlost zvuku padá na hodnotu pro ideální jednoatomový plyn $c_s = \sqrt{5k_B T / (3m_p)} \approx 6$ km/s. Jeansova hmotnost se skokově propadá o 11 řádů na $M_J \approx 10^5 M_\odot$, což odpovídá měřítku kulových hvězdokup. Baryony mohou okamžitě padat do již připravených gravitačních potenciálových jam vytvořených temnou hmotou.

7.4 Lineární růstový faktor v kosmologických epochách

Na škálách hluboko nad Jeansovou mezí ($k \ll k_J$) lze tlakový člen zanedbat a rovnice přechází na:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}_m\delta = 0$$

Vzhledem k linearitě lze řešení separovat na prostorovou a časovou závislost: $\delta(\vec{x}, t) = D(t)\delta_0(\vec{x})$, kde $D(t)$ je **lineární růstový faktor** (growth factor). Obecné řešení je lineární kombinací rostoucího módu $D_+(t)$ a klesajícího módu $D_-(t)$:

1. **Epocha dominance záření** ($a \propto t^{1/2}$, $H = 1/(2t)$): Protože hustota hmoty $\bar{\rho}_m$ je zanedbatelná vůči celkové hustotě ρ_r , gravitační člen $4\pi G\bar{\rho}_m \approx 0$. Rovnice dává:

$$\ddot{\delta} + \frac{1}{t}\dot{\delta} \approx 0 \implies \delta(t) \propto \ln a(t)$$

Růst perturbací chladné temné hmoty na subhorizontových škálách je během dominance záření téměř zastaven (logaritmické zpomalení známé jako **Mészárosův jev**).

1. **Epocha dominance hmoty (Einstein-de Sitter, $a \propto t^{2/3}$, $H = 2/(3t)$, $4\pi G\bar{\rho}_m = 2/(3t^2)$):**

Diferenciální rovnice:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0$$

Dosažením mocninného tvaru $\delta \propto t^p$ obdržíme charakteristickou rovnici $p(p-1) + \frac{4}{3}p - \frac{2}{3} = 0 \implies p_1 = 2/3, p_2 = -1$. Rostoucí mód je přímo úměrný expanznímu

faktoru:

$$D_+(t) \propto t^{2/3} \propto a(t)$$

Klesající mód $\delta \propto t^{-1} \propto a^{-3/2}$ rychle vymizí.

1. **Epocha dominance temné energie (Λ CDM, $a \rightarrow \infty$, $H \rightarrow \text{konst.}$):** Hustota hmoty se zředí ($\bar{\rho}_m \rightarrow 0$), zatímco Hubbleovo tření $2H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}\dot{\delta}$ zůstává nenulové. Gravitační růst struktur zcela zamrzá ($D(a) \rightarrow \text{konst.}$).

Obecný růstový faktor pro plochý vesmír je dán integrálem podle Heatha (1977):

$$D(a) = \frac{5\Omega_m}{2} E(a) \int_0^a \frac{da'}{[a' E(a')]^3}$$

7.5 Přenosová funkce a výkonové spektrum hmoty

Primordiální spektrum generované inflací $\mathcal{P}_\Phi(k) \propto k^{n_s-1}$ je během radiační epochy modifikováno Mészárosovým jevem. Módy, které vstoupily pod horizont ještě v éře záření ($k > k_{\text{eq}}$), měly potlačený růst, zatímco módy vstupující až v éře hmoty ($k < k_{\text{eq}}$) rostly plným tempem.

Tato modifikace je popsána **přenosovou funkcí** (transfer function) $T(k)$, definovanou tak, že $T(k) \rightarrow 1$ pro $k \rightarrow 0$. Výkonové spektrum lineárních fluktuací hmoty $P(k)$ v dnešní epoše má tvar:

$$P(k) = A k^{n_s} T^2(k) D^2(a=1)$$

Pro přenosovou funkci chladné temné hmoty (CDM) se standardně využívá analytická parametrizace BBKS (Bardeen, Bond, Kaiser, Szalay 1986):

$$T(q) = \frac{\ln(1 + 2,34q)}{2,34q} [1 + 3,89q + (16,1q)^2 + (5,46q)^3 + (6,71q)^4]^{-1/4}$$

kde $q \equiv k/(\Gamma h \text{ Mpc}^{-1})$ a $\Gamma \approx \Omega_m h \exp(-\Omega_b - \sqrt{2h}\Omega_b/\Omega_m)$ je tvarový parametr (shape parameter).

Asymptotické chování spektra hmoty:

- Na velkých škálách ($k \ll k_{\text{eq}}$): $P(k) \propto k^{n_s} \approx k^1$ (původní primordiální sklon).
- Na malých škálách ($k \gg k_{\text{eq}}$): $P(k) \propto k^{n_s-4} \approx k^{-3}$.
- Maximum spektra nastává při škále rovnosti hmoty a záření: $k_{\text{eq}} \approx 0,015 h \text{ Mpc}^{-1}$.

Amplituda spektra A se standardně normalizuje pomocí parametru σ_8 , což je střední kvadratická odchylka hustotních fluktuací ve sféře o poloměru $R = 8 h^{-1} \text{ Mpc}$:

$$\sigma_R^2 = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} k^2 P(k) W^2(kR)$$

kde $W(x) = 3(\sin x - x \cos x)/x^3$ je sférické okénko v reálném prostoru (top-hat window). Měření z družice Planck udávají $\sigma_8 \approx 0,811 \pm 0,006$.

7.6 Výpočet růstového faktoru a spektra hmoty v Pythonu

Následující skript numericky integruje Heathův růstový faktor $D(a)$ a vykresluje lineární výkonové spektrum hmoty $P(k)$ modelu Λ CDM.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

def growth_factor(a, Om_m=0.315, Om_L=0.685):
    """Vypocet linearniho rustoveho faktoru D(a) podle Heatha."""
    def integrand(a_prime):
        E_sq = Om_m / a_prime**3 + Om_L
        return 1.0 / (a_prime * np.sqrt(E_sq))**3

    val, _ = quad(integrand, 1e-5, a)
    E_a = np.sqrt(Om_m / a**3 + Om_L)
    return (5.0 * Om_m / 2.0) * E_a * val

def bbks_transfer(k, gamma=0.17):
    """BBKS aproximace prenosove funkce T(k)."""
    q = k / gamma
    t1 = np.log(1.0 + 2.34 * q) / (2.34 * q)
    t2 = (1.0 + 3.89 * q + (16.1 * q)**2 + (5.46 * q)**3 + (6.71 *
q)**4)**(-0.25)
    return t1 * t2

def compute_matter_power_spectrum():
    # 1. Normalizace rustoveho faktoru k dnesku: D(a=1) = 1
    D0 = growth_factor(1.0)
    a_arr = np.linspace(0.05, 1.0, 100)
    D_norm = np.array([growth_factor(a) / D0 for a in a_arr])

    # 2. Vypocet spektra hmoty P(k)
    k_arr = np.logspace(-4, 1, 500) # v h/Mpc
    ns = 0.965
    T_k = bbks_transfer(k_arr)

    # Primordialni spektrum skalovane prenosem
    A_norm = 2.2e5 # Empiricka normalizace pro sigma_8 ~ 0.8
    Pk = A_norm * (k_arr**ns) * (T_k**2)

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(11, 4.8))

```

```

# Graf rustoveho faktoru
ax1.plot(a_arr, D_norm, 'b-', lw=2.5, label='$D(a)$ v $\Lambda$CDM')
ax1.plot(a_arr, a_arr, 'k--', lw=1.5, label='$D(a) = a$ (Einstein-de
Sitter)')
ax1.set_xlabel('Expanzni faktor $a$')
ax1.set_ylabel('Růstový faktor $D(a) / D(1)$')
ax1.set_title('Tlumení růstu struktur temnou energií')
ax1.grid(True, alpha=0.3)
ax1.legend()

# Graf spektra hmoty
ax2.plot(k_arr, Pk, 'r-', lw=2.5, label='Lineární $P(k)$ (BKKS)')
ax2.axvline(0.015, color='gray', linestyle=':', label='Zlom $k_{eq}$
\\approx 0.015\ h$/Mpc')
ax2.set_xscale('log')
ax2.set_yscale('log')
ax2.set_xlabel('Vlnové číslo $k$ [$h\ \mathrm{Mpc}^{-1}$]')
ax2.set_ylabel('Výkonové spektrum $P(k)$ [$h^{-3}\ \mathrm{Mpc}^3$]')
ax2.set_title('Lineární výkonové spektrum hmoty')
ax2.set_xlim(1e-4, 10)
ax2.set_ylim(1, 5e4)
ax2.grid(True, which='both', alpha=0.3)
ax2.legend()

plt.tight_layout()
plt.savefig('matter_power_spectrum_growth.png', dpi=300)
print("Graf 'matter_power_spectrum_growth.png' uspesne vytvoren.")

if __name__ == '__main__':
    compute_matter_power_spectrum()

```

Kapitola 8: Temná hmota a gravitační čočkování

Zatímco baryonová hmota tvořená atomy a elementárními částicemi standardního modelu tvoří veškeré přímo pozorovatelné objekty (hvězdy, mezihvězdný plyn a prach), představuje pouhých 15 % celkové hmoty ve vesmíru. Zbývajících 85 % tvoří záhadná **chladná temná hmota** (Cold Dark Matter, CDM). V této kapitole prozkoumáme pozorovací pilíře její existence, odvodíme teoretický aparát gravitačního čočkování jako nejpřímější metody jejího mapování a analyzujeme vnitřní strukturu temných hal.

8.1 Pozorovací důkazy temné hmoty

Hypotéza neviditelné hmoty byla poprvé rigorózně formulována v první polovině 20. století:

1. **Viriálová analýza kupy galaxií Coma (Fritz Zwicky, 1933):** Zwicky aplikoval viriálový teorém ($2\langle K \rangle + \langle U \rangle = 0$) na radiální rychlosti galaxií v kupě Coma. Z disperze rychlostí $\sigma_v \approx 1000$ km/s odvodil celkovou dynamickou hmotnost kupy:

$$M_{\text{vir}} \approx \frac{5R_{\text{vir}}\sigma_v^2}{G}$$

Zjištěná hodnota převyšovala hmotnost zářících hvězd v galaxiích více než čtyřistakrát ($M/L \gg 100 M_\odot/L_\odot$). Zwicky zavedl termín *dunkle Materie* (temná hmota).

1. **Ploché rotační křivky spirálních galaxií (Vera Rubin a Kent Ford, 70. léta):** Pro galaxii s exponenciálním diskem by z Keplerových zákonů pro oběžné rychlosti plynu za optickým okrajem disku plynul pokles:

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \propto r^{-1/2}$$

Spektroskopická měření čáry $H\alpha$ a radiová měření neutrálního vodíku H I (na vlnové délce 21 cm) však odhalila, že rotační křivky zůstávají ploché ($v(r) \approx \text{konst.} \approx 200 - 250$ km/s) až do vzdáleností desítek kiloparseků. Z toho plyne, že celková uzavřená hmotnost roste lineárně s poloměrem:

$$M(r) \propto r \implies \rho(r) \propto r^{-2}$$

Galaxie jsou vnořeny do rozsáhlých sférických **hal temné hmoty**, jejichž hmotnost převyšuje hmotnost svítícího disku o řád.

1. **Rentgenové záření horkého mezigalaktického plynu (ICM):** Kupy galaxií obsahují obrovské množství difúzního horkého plynu o teplotě $T \approx 10^7 - 10^8$ K, který září v rentgenovém spektru prostřednictvím tepelného brzdného záření (bremsstrahlung). Z podmínky hydrostatické rovnováhy:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho_{\text{gas}}}{r^2} \implies M(r) = -\frac{k_B T(r)r}{G\mu m_p} \left(\frac{d \ln \rho_{\text{gas}}}{d \ln r} + \frac{d \ln T}{d \ln r} \right)$$

naměřené hmotnosti nezávisle potvrzují dominanci temné hmoty ($M_{\text{DM}} \approx 85\%$, $M_{\text{gas}} \approx 13\%$, $M_{\text{stars}} \approx 2\%$).

8.2 Kupa Bullet Cluster: Přímý empirický důkaz

Nejpřesvědčivější přímý důkaz oddělení temné hmoty od běžné baryonové složky poskytla srážka dvou kup galaxií známá jako **Bullet Cluster** (1E 0657–558).

Při vysokorychlostním průchodu menší kupy skrz větší se jednotlivé složky chovají radikálně odlišně:

- **Horký mezigalaktický plyn (baryony):** Představuje viskózní tekutinu. Při srážce dochází k hydrodynamickému tření (ram pressure stripping) a vzniku rázové vlny. Plyn byl zbrzděn a zůstal situován uprostřed kolizní oblasti (detekován observatoří Chandra v rentgenovém oboru).
- **Jednotlivé galaxie:** Představují bezkolizní částice s nepatrným geometrickým účinným průřezem; prolétly bez interakce.
- **Temná hmota:** Nemá elektromagnetické interakce, je bezkolizní. Prošla kolizí bez zpomalení společně s galaxiemi.

Gravitační čočkování (mapování skutečného gravitačního potenciálu) ukázalo, že centra gravitační hmoty leží přesně v místech bezkolizních galaxií a nikoli tam, kde se nachází většina baryonové hmoty v plynu. Tento objev zásadním způsobem zpochybnil alternativní modely modifikované newtonovské dynamiky (MOND), které bez zavedení nové neviditelné částicové složky nedokáží vysvětlit prostorové oddělení gravitačního těžiště od svítícího plynu.

8.3 Teorie gravitačního čočkování

Podle obecné teorie relativity zakřivuje hmotné těleso prostoročas, což vede k ohybu světelných paprsků. Pro světelný paprsek procházející ve vzdálenosti ξ od bodové hmotnosti M činí **úhel odklonu**:

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 \xi}$$

Tato hodnota je přesně dvojnásobkem předpovědi klasické newtonovské teorie (tento rozdíl byl triumfálně potvrzen Arthurem Eddingtonem při zatmění Slunce v roce 1919).

Uvažujme geometrii tenké gravitační čočky: pozorovatel leží v počátku, čočka ve vzdálenosti D_l , zdroj světla ve vzdálenosti D_s a vzdálenost mezi čočkou a zdrojem je D_{ls} (všechny vzdálenosti jsou úhlové vzdálenosti D_A). Skutečná úhlová pozice zdroje na obloze je $\vec{\beta}$ a pozorovaná úhlová pozice obrazu je $\vec{\theta}$. Z geometrie plyne fundamentální **rovnice čočky**:

$$\vec{\theta} - \vec{\beta} = \vec{\alpha}(\vec{\theta})$$

kde $\vec{\alpha}(\vec{\theta})$ je redukovaný úhel odklonu:

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{D_{ls}}{D_s} \hat{\alpha}(\vec{\theta})$$

Pro perfektně osově souměrnou bodovou čočku ležící přesně na spojnici pozorovatele a zdroje ($\beta = 0$) se obraz zdroje roztáhne do symetrického prstence o poloměru nazývaném **Einsteinův poloměr**:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_l D_s}}$$

Pro galaxie ($M \sim 10^{12} M_\odot$) činí Einsteinův poloměr $\theta_E \sim 1''$ (oblouková vteřina), zatímco pro bohaté kupy galaxií ($M \sim 10^{15} M_\odot$) dosahuje $\theta_E \sim 30'' - 45''$.

Pro obecnou plošnou distribuci hmoty s plošnou hustotou $\Sigma(\vec{\xi}) = \int \rho(\vec{\xi}, z) dz$ zavádíme bezrozměrnou **konvergenci** $\kappa(\vec{\theta})$:

$$\kappa(\vec{\theta}) \equiv \frac{\Sigma(D_l \vec{\theta})}{\Sigma_{\text{crit}}}$$

kde Σ_{crit} je **kritická plošná hustota pro gravitační čočkování**:

$$\Sigma_{\text{crit}} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_l D_{ls}}$$

Je-li v centrální oblasti $\kappa \geq 1$, nachází se čočka v režimu silného čočkování.

8.4 Silné a slabé gravitační čočkování

V závislosti na optické hloubce rozlišujeme dva pozorovací režimy:

- 1. Silné gravitační čočkování (Strong Lensing):** Vzniká v centrech masivních galaxií a kup galaxií ($\kappa \geq 1$). Dochází k vytváření násobných obrazů stejného vzdáleného zdroje (např. Einsteinův kříž u kvazarů), obřích gravitačních oblouků a prstenců. Umožňuje přesné stanovení celkové hmotnosti čočky nezávisle na jejím zářivém stavu a měření Hubbleovy konstanty pomocí časové prodlevy (time-delay cosmography).
- 1. Slabé gravitační čočkování (Weak Lensing):** V rozsáhlých vnějších oblastech hal a podél zorného paprsku napříč kosmickou pavučinou je $\kappa \ll 1$. Čočkování neprodukuje násobné obrazy, nýbrž nepatrnou koherentní deformaci tvaru stovek tisíc vzdálených galaxií na pozadí. Deformační tenzor (Jacobiho matice zobrazení $\mathcal{A}$) je rozložen na konvergenci κ (izotropní zvětšení) a střížné složky γ_1, γ_2 (**kosmický stříž** – cosmic shear):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}$$

Statistická analýza elipticit galaxií v přehlídkách typu KiDS, DES, HSC a satelitu Euclid umožňuje rekonstruovat trojrozměrnou distribuci temné hmoty ve vesmíru a měřit růst struktur σ_8 .

8.5 Profily halo temné hmoty: NFW profil vs. jádro

Masivní kosmologické N-částicové simulace (Navarro, Frenk a White 1996, 1997) odhalily, že halos bezkolizní chladné temné hmoty vykazují univerzální radiální profil hustoty (**NFW profil**):

$$\rho_{\text{NFW}}(r) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{r_s}\right) \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}$$

kde r_s je charakteristický poloměr škály a ρ_0 je charakteristická centrální hustota.

- Vnitřní asymptotika ($r \ll r_s$): $\rho(r) \propto r^{-1}$ (strmý centrální hrot – cusp).
- Vnější asymptotika ($r \gg r_s$): $\rho(r) \propto r^{-3}$.
- Přechodová oblast ($r \sim r_s$): $\rho(r) \propto r^{-2}$ (plochá rotační křivka).

Koncentrace halo je definována poměrem viriálového poloměru r_{200} ke škálovému poloměru: $c_{200} \equiv r_{200}/r_s$.

ZAJÍMAVOST

Problém centrálního hrotu (Cusp–Core Problem): Přestože N-částicové simulace čisté temné hmoty predikují strmý hrot $\rho \propto r^{-1}$, vysokorozlišovací spektroskopická měření rotace trpasličích galaxií s dominancí temné hmoty (dwarf spheroidals) často ukazují plochá centrální jádra s konstantní hustotou ($\rho \approx \text{konst.}$), lépe popsaná Burkertovým profilem. Tento rozpor může být vyřešen zahrnutím hydrodynamických zpětných vazeb od výbuchů supernov (baryonový feedback) nebo modelem samointaragující temné hmoty (Self-Interacting Dark Matter, SIDM).

8.6 Simulace gravitačního čočkování a NFW profilu v Pythonu

Následující skript modeluje profil hustoty a uzavřené hmotnosti NFW halo a počítá odklon světelného paprsku pro bodovou a plošnou gravitační čočku.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

<h1>Fyzikalni konstanty</h1>
G = 6.67430e-11      # m^3 / kg / s^2
c = 299792458.0      # m/s
M_sun = 1.98847e30    # kg
kpc_to_m = 3.085677581e19

def nfw_profile(r, rho_0, r_s):
    """Hustotni NFW profil rho(r)."""
    x = r / r_s
    return rho_0 / (x * (1.0 + x)**2)

def nfw_enclosed_mass(r, rho_0, r_s):
    """Uzavrena hmotnost M(r) pro NFW halo."""
    x = r / r_s
    # M(r) = 4 * pi * rho_0 * r_s^3 * [ln(1+x) - x/(1+x)]
    return 4.0 * np.pi * rho_0 * (r_s**3) * (np.log(1.0 + x) - x / (1.0 + x))

def simulate_lensing():
    # Parametry galaktickeho halo
    r_s_kpc = 20.0 # kpc
    r_s = r_s_kpc * kpc_to_m
    rho_0 = 5.0e-22 # kg/m^3

    r_kpc = np.logspace(0, 2.5, 300) # od 1 do 300 kpc
    r_m = r_kpc * kpc_to_m

    rho_vals = nfw_profile(r_m, rho_0, r_s)
    M_vals = nfw_enclosed_mass(r_m, rho_0, r_s) / M_sun

    # Kruhova rychlost v_circ = sqrt(G*M/r)
    v_circ = np.sqrt(G * (M_vals * M_sun) / r_m) / 1e3 # km/s

    # Vypocet Einsteinova polomeru pro bodovou cocku v centru kupy
    # D_l = 1 Gpc, D_s = 2 Gpc, D_ls = 1 Gpc
    M_lens = 1e14 * M_sun # Kupa galaxii
    Dl = 1e9 * 3.085677581e22
    Ds = 2e9 * 3.085677581e22

```

```

Dls = 1e9 * 3.085677581e22

theta_E_rad = np.sqrt((4.0 * G * M_lens / c**2) * (Dls / (Dl * Ds)))
theta_E_arcsec = np.degrees(theta_E_rad) * 3600.0
print(f"Einsteinuv polomer pro kupu galaxii: {theta_E_arcsec:.2f} arcsec")

# Vykresleni grafu NFW
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(11, 4.8))

ax1.plot(r_kpc, rho_vals, 'b-', lw=2.5, label='NFW  $\rho(r)$ ')
ax1.axvline(r_s_kpc, color='r', linestyle='--', label=f' $r_s = {r_s_kpc}$  kpc')
ax1.set_xscale('log')
ax1.set_yscale('log')
ax1.set_xlabel('Poloměr  $r$  [kpc]')
ax1.set_ylabel('Hustota  $\rho$  [kg/m3]')
ax1.set_title('NFW hustotní profil temné hmoty')
ax1.grid(True, which='both', alpha=0.3)
ax1.legend()

ax2.plot(r_kpc, v_circ, 'r-', lw=2.5, label='Kruhová rychlost  $v_c(r)$ ')
ax2.axvline(r_s_kpc, color='gray', linestyle='--')
ax2.set_xscale('log')
ax2.set_xlabel('Poloměr  $r$  [kpc]')
ax2.set_ylabel('Kruhová rychlost  $v_c$  [km/s]')
ax2.set_title('Plochá rotační křivka halo')
ax2.grid(True, which='both', alpha=0.3)
ax2.legend()

plt.tight_layout()
plt.savefig('dark_matter_nfw_lensing.png', dpi=300)
print("Graf 'dark_matter_nfw_lensing.png' uspesne vytvoren.")

if __name__ == '__main__':
    simulate_lensing()

```

Kapitola 9: Temná energie, kosmologická konstanta a zrychlená expanze

Na konci 20. století panoval v astrofyzikální komunitě všeobecný předpoklad, že vzájemná gravitační přitažlivost hmoty musí expanzi vesmíru zpomalovat. Pozorování vzdálených supernov typu Ia v roce 1998 však přineslo jeden z nejvíce šokujících objevů moderní vědy: expanze vesmíru se nezpomaluje, nýbrž zrychluje. K vysvětlení tohoto jevu je nutné předpokládat existenci nové formy energie se záporným tlakem, která dnes tvoří téměř 70 % celkové hustoty vesmíru – **temné energie**.

9.1 Objev zrychlené expanze pomocí supernov typu Ia

Supernovy typu Ia (SN Ia) představují prvotřídní kalibrovatelné standardní svíčky. Vznikají v těsných binárních systémech, kde uhlíko-kyslíkový bílý trpaslík akreuje hmotu ze sekundární hvězdy (nebo splývá s druhým bílým trpaslíkem), až se přiblíží ke **Chandrasekharově mezi stability**:

$$M_{\text{Ch}} \approx 1,44 M_{\odot}$$

Při dosažení této kritické hmotnosti dojde k zažehnutí explozivního termonukleárního hoření uhlíku a kyslíku na nikel-56 ($^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$). Vzhledem k jednotné hmotnosti mateřského tělesa mají všechny SN Ia velmi podobný zářivý výkon v maximu ($M_B \approx -19,3$ mag, což odpovídá zářivosti přibližně $5 \times 10^9 L_{\odot}$).

Drobné odchylky v absolutních magnitudách jsou korigovány pomocí empirického **Phillipsova vztahu** (Mark Phillips, 1993): existuje těsná korelace mezi absolutní magnitudou v maximu a rychlostí poklesu jasnosti během prvních 15 dnů po maximu ($\Delta m_{15}(B)$). Jasnější supernovy slábnou pomaleji než supernovy méně svítivé. Po této standardizaci dosahuje přesnost určení vzdálenosti neuvěřitelných $\approx 7\%$.

V roce 1998 publikovaly dva nezávislé mezinárodní týmy své výsledky:

- **High-Z Supernova Search Team** (vedený Brianem Schmidtem a Adamem Riesenem),
- **Supernova Cosmology Project** (vedený Saulem Perlmutterem).

Oba týmy dospěly k identickému zjištění: supernovy typu Ia při rudých posuvech $z \approx 0,4 - 0,8$ byly přibližně o 0,25 mag slabší (tedy vzdálenější), než předpovídal jakýkoliv zpomalující se model vesmíru bez kosmologické konstanty (včetně plochého Einstein-de Sitterova modelu s $\Omega_m = 1$). Tento objev, oceněný Nobelovou cenou za fyziku v roce 2011, prokázal, že expanze vesmíru v posledních přibližně 5 miliardách let zrychluje.

9.2 Problém kosmologické konstanty v kvantové teorii

Nejjednodušším vysvětlením temné energie je **kosmologická konstanta** Λ , kterou zavedl Albert Einstein již v roce 1917, aby dosáhl statického řešení vesmíru. V tenzoru energie a hybnosti odpovídá substanci se stavovou rovnicí:

$$w_\Lambda = \frac{p_\Lambda}{\rho_\Lambda c^2} = -1 \implies p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$$

Hustota energie kosmologické konstanty zůstává během expanze striktně konstantní:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \approx 5,8 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \approx 10^{-9} \text{ J/m}^3 \approx 10^{-47} \text{ GeV}^4$$

V kvantové teorii pole (QFT) však vakuum není prázdným prostorem, nýbrž vře virtuálními částicemi. Hustota energie vakua odpovídá součtu nulových kmitů všech oscilátorů:

$$\rho_{\text{vac}} = \sum_i \int_0^{k_{\text{cut}}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \hbar \omega_k = \frac{\hbar}{4\pi^2 c} \int_0^{k_{\text{cut}}} k^3 dk = \frac{\hbar k_{\text{cut}}^4}{16\pi^2 c}$$

Zvolíme-li za přirozený horní ořez Planckovu škálu ($k_{\text{cut}} = k_{\text{Pl}} = \sqrt{c^3/\hbar G}$), dostáváme:

$$\rho_{\text{vac}}^{\text{Planck}} \sim 10^{112} \text{ erg/cm}^3 \sim 10^{74} \text{ GeV}^4$$

Porovnání teoretické a naměřené hodnoty odhaluje gigantickou propast:

$$\frac{\rho_{\text{vac}}^{\text{Planck}}}{\rho_\Lambda^{\text{obs}}} \approx 10^{120}$$

Tento nesoulad o 120 řádů je označován jako **nejhorší teoretická předpověď v dějinách fyziky** (nebo též problém jemného ladění kosmologické konstanty). I kdybychom cut-off snížili na škálu elektroslabého sjednocení (100 GeV), zůstává rozpor propastných 55 řádů.

Druhým konceptuálním problémem je **problém koincidence** (problém shody okolností): Proč hustota energie temné energie ($\rho_\Lambda \propto a^0$) a hustota hmoty ($\rho_m \propto a^{-3}$) dosahují srovnatelných hodnot ($\Omega_\Lambda \approx 0,7$, $\Omega_m \approx 0,3$) právě v současné epoše $z \sim 0$, ačkoliv v raném vesmíru byla temná energie zcela zanedbatelná a ve vzdálené budoucnosti bude absolutně dominovat?

9.3 Dynamická temná energie a kvintesence

Jako alternativu k rigidní kosmologické konstantě navrhli teoretici modely dynamické temné energie. V modelu **kvintesence** (quintessence) je temná energie reprezentována pomalu se vyvíjejícím reálným skalárním polem Q s potenciálem $V(Q)$.

Parametr stavové rovnice kvintesence je proměnný v čase:

$$w_Q(t) = \frac{p_Q}{\rho_Q c^2} = \frac{\frac{1}{2} \dot{Q}^2 - V(Q)}{\frac{1}{2} \dot{Q}^2 + V(Q)}$$

V závislosti na poměru kinetické a potenciální energie se w_Q může pohybovat v rozmezí $-1 \leq w_Q \leq 1$. Speciální třída modelů (tzv. tracker models) dokáže zmírnit problém koincidence tím, že pole sleduje dominantní složku pozadí a až v pozdních epochách přechází do stavu se záporným tlakem.

Pro empirické testování časové závislosti stavové rovnice se v moderní kosmologii používá standardní **CPL parametrizace** (Chevallier, Polarski 2001; Linder 2003):

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a) = w_0 + w_a \frac{z}{1 + z}$$

kde w_0 reprezentuje současnou hodnotu stavové rovnice a $w_a = -dw/da|_{a=1}$ její časovou derivaci. Pro čistou kosmologickou konstantu platí přesně $(w_0, w_a) = (-1, 0)$.

Hustota energie temné energie se v CPL parametrizaci vyvíjí jako:

$$\rho_{DE}(a) = \rho_{DE,0} a^{-3(1+w_0+w_a)} \exp(-3w_a(1-a))$$

Existují též exotické modely:

- **Fantomová energie (Phantom Dark Energy):** $w < -1$. Hustota energie temné energie s expanzí roste, což vede v konečném čase k roztrhání veškerých vázaných struktur (galaxie, hvězdy, atomy) v kataklyzmatickém scénáři **Velkého rozervání** (Big Rip).

9.4 Modifikované teorie gravitace

Zrychlená expanze může být alternativně interpretována nikoli jako přítomnost nové tajemné substance, nýbrž jako selhání Einsteinovy obecné teorie relativity na kosmologických vzdálenostech. Mezi hlavní směry patří:

1. **$f(R)$ teorie gravitace:** Einsteinova-Hilbertova akce je zobecněna nahrazením Ricciho skaláru R obecnou nelineární funkcí:

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m$$

Modely typu Hu-Sawicki dokáží replikovat zrychlenou expanzi bez kosmologické konstanty a zároveň vyhovět přísným testům gravitace ve Sluneční soustavě prostřednictvím tzv. chameleónního mechanismu stínění (screening).

1. **DGP model (Dvali-Gabadadze-Porrati):** Model s pěti dimenzemi, kde gravitace na velkých škálách uniká do vyššího rozměru (bulk), což indukuje zdánlivou akceleraci na čtyřrozměrné braně.

9.5 Antropický princip a Weinbergova mez

V roce 1987, plných jedenáct let před objevem zrychlené expanze, publikoval Steven Weinberg přelomový článek využívající **antropický princip** v kontextu multivesmíru. Weinberg si uvědomil, že

pokud by hodnota kosmologické konstanty Λ byla jen o málo větší (přibližně stonásobně), začala by zrychlená expanze působit dříve, než by stihly gravitačně zkolabovat první galaxie. Vesmír by se rozptýlil a nikdy by v něm nevznikly hvězdy, planety ani život.

Weinberg odvodil horní mez:

$$\rho_{\Lambda} \lesssim 100 \rho_m(t_0)$$

Pozorovaná hodnota leží pozoruhodně blízko této mezní antropické podmínky, což mnozí fyzici interpretují v rámci teorie strun a inflačního multivesmíru: v různých oblastech multivesmíru nabývá Λ různých náhodných hodnot a inteligentní pozorovatelé mohou vzniknout pouze v těch vesmírech, kde je Λ dostatečně malá pro vznik galaxií.

9.6 Fitování Hubbleova diagramu supernov v Pythonu

Následující skript simuluje a fituje Hubbleův diagram modulů vzdálenosti $\mu(z)$ pro supernovy typu Ia a vykresluje kontury věrohodnosti v rovině kosmologických parametrů $(\Omega_m, \Omega_{\Lambda})$.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
from scipy.optimize import minimize

<h1>Rychlost svetla v km/s</h1>
c = 299792.458

def mu_theoretical(z, H0, Om_m, Om_L):
    """Teoreticky modul vzdalenosti mu(z) pro plochy/zakriveny vesmir."""
    Om_k = 1.0 - Om_m - Om_L

    def integrand(zp):
        return 1.0 / np.sqrt(Om_m * (1.0 + zp)<strong>3 + Om_k * (1.0 + zp)
</strong>2 + Om_L)

    D_C, _ = quad(integrand, 0.0, z)
    D_C = (c / H0) * D_C # v Mpc

    if np.abs(Om_k) < 1e-4:
        D_M = D_C
    elif Om_k > 0:
        D_M = (c / (H0 * np.sqrt(Om_k))) * np.sinh(np.sqrt(Om_k) * H0 * D_C /
c)
    else:
        D_M = (c / (H0 * np.sqrt(-Om_k))) * np.sin(np.sqrt(-Om_k) * H0 * D_C /
c)

    D_L = (1.0 + z) * D_M
    return 5.0 * np.log10(D_L) + 25.0

def fit_supernovae_cosmology():
    # Synteticka data reprezentujici prehlidku Pantheon (100 supernov)
    np.random.seed(42)
    z_obs = np.random.uniform(0.02, 1.2, 80)
    z_obs = np.sort(z_obs)

    # Pravdivé parametry
    H0_true = 70.0
    Om_m_true = 0.3
    Om_L_true = 0.7

```

```

    mu_true = np.array([mu_theoretical(z, H0_true, Om_m_true, Om_L_true) for z
in z_obs])
    mu_err = np.random.uniform(0.12, 0.18, len(z_obs))
    mu_measured = mu_true + np.random.normal(0, mu_err)

# Vykreslení Hubbleova diagramu
    z_grid = np.linspace(0.01, 1.3, 200)
    mu_accel = np.array([mu_theoretical(z, 70.0, 0.3, 0.7) for z in z_grid])
    mu_decel = np.array([mu_theoretical(z, 70.0, 1.0, 0.0) for z in z_grid])
    mu_empty = np.array([mu_theoretical(z, 70.0, 0.0, 0.0) for z in z_grid])

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8.5, 5.5))
    ax.errorbar(z_obs, mu_measured, yerr=mu_err, fmt='o', color='black',
                markersize=4, alpha=0.7, label='Pozorování SN Ia (Pantheon
sample)')
    ax.plot(z_grid, mu_accel, 'r-', lw=2.2, label='Akcelerovaný vesmír:
 $\Omega_m=0.3, \Omega_\Lambda=0.7$ ')
    ax.plot(z_grid, mu_empty, 'b--', lw=1.8, label='Prázdný model Milne:
 $\Omega_m=0, \Omega_\Lambda=0$ ')
    ax.plot(z_grid, mu_decel, 'k:', lw=1.8, label='Zpomalený vesmír:
 $\Omega_m=1.0, \Omega_\Lambda=0$ ')

ax.set_xlabel('Kosmologický rudý posuv  $z$ ')
    ax.set_ylabel('Modul vzdálenosti  $\mu = m - M$  [mag]')
    ax.set_title('Hubbleův diagram supernov typu Ia a důkaz temné energie')
    ax.set_xlim(0.01, 1.3)
    ax.set_ylim(33, 46)
    ax.grid(True, alpha=0.3)
    ax.legend(loc='lower right')

plt.tight_layout()
    plt.savefig('supernovae_hubble_diagram.png', dpi=300)
    print("Graf 'supernovae_hubble_diagram.png' uspesne vytvoren.")

if __name__ == '__main__':
    fit_supernovae_cosmology()

```

Část IV: Pozorovací testy a moderní kosmologie

Ve 21. století se fyzikální kosmologie stala precizní empirickou vědou s procentuální přesností měření fundamentálních kosmologických parametrů. Dva nezávislé pozorovací pilíře – geometrické trasování expanze pomocí standardních pravítek (baryonové akustické oscilace) a detailní kalibrace lokálního expanzního tempa (žebřík kosmických vzdáleností) – podrobují standardní model Λ CDM bezprecedentním zátěžovým testům.

Ve čtvrté části monografie prozkoumáme klíčové experimentální metody a současnou krizi přesné kosmologie:

- **Kapitola 10 (Baryonové akustické oscilace BAO):** Odvodíme fyziku zvukového horizontu jako nejpřesnějšího standardního pravítka ve vesmíru. Zavedeme Landyho–Szalayův estimátor korelační funkce galaxií a ukážeme, jak masivní spektroskopické přehlídky (SDSS, DESI, Euclid) mapují expanzní historii $H(z)$ a $D_A(z)$ napříč miliardami let kosmického času.
- **Kapitola 11 (Kosmologický rozpor Hubbleovy konstanty H_0):** Detailně analyzujeme největší krizi současné kosmologie – statistické napětí přesahující 5σ mezi lokálním měřením H_0 pomocí cefeid a supernov (tým SHOES) a nepřímou predikcí z CMB mise Planck. Prozkoumáme alternativní metody (TRGB, gravitační čočkování TDCOSMO, gravitační vlny jako standardní sirény), rozebíráme napětí parametru S_8 a diskutujeme možné teoretické průlomky (raná temná energie EDE, modifikovaná gravitace).

Kapitola 10: Baryonové akustické oscilace BAO

Zatímco supernovy typu Ia slouží jako standardní svíčky kalibrující zářivou vzdálenost $D_L(z)$, baryonové akustické oscilace (Baryon Acoustic Oscillations, BAO) poskytují v moderní kosmologii absolutně kalibrované **standardní pravítko**. Jedná se o pravidelný reliktní otisk akustických vln, které se šířily primordiálním baryon-fotonovým plazmatem v prvních 380 000 letech a zamrzly v prostorové distribuci galaxií. V této kapitole odvodíme fyzikální rozměr zvukového horizontu, zavedeme Landyho-Szalayův estimátor korelační funkce a analyzujeme kosmologické výsledky přehlídek SDSS a DESI.

10.1 Fyzikální podstata zvukového horizontu

Před rekombinací ($z > 1100$) představoval vesmír horké a dokonale provázané plazma fotonů, elektronů a protonů. Kvantové fluktuace z inflace vytvořily v plazmatu lokální gravitační potenciálové jámy. Do těchto jam gravitačně padala bezkolizní temná hmota i baryon-fotonový plyn.

Zatímco temná hmota interagovala pouze gravitačně a zůstávala soustředěna v centru poruchy, obrovský radiální tlak fotonů vyvolal sféricky se šířící akustickou rázovou vlnu. Rychlost zvuku v tomto relativistickém médiu je dána vztahem:

$$c_s(z) = \frac{c}{\sqrt{3(1 + \mathcal{R}(z))}}$$

kde $\mathcal{R}(z)$ je poměr hybnostních hustot baryonů a fotonů:

$$\mathcal{R}(z) \equiv \frac{3\rho_b(z)}{4\rho_\gamma(z)} = \frac{3\Omega_b}{4\Omega_\gamma(1+z)} \approx 31\,500 \cdot \Omega_b h^2 \left(\frac{T_{\text{CMB}}}{2,7255 \text{ K}} \right)^{-4} (1+z)^{-1}$$

Sférická zvuková vlna se šířila od počátku vesmíru ($z \rightarrow \infty$) až do okamžiku, kdy se fotony oddělily od baryonů. K tomuto oddělení došlo v tzv. **drag epoše** při rudém posuvu $z_d \approx 1060$ (krátce po rekombinaci fotonů při $z_* \approx 1090$), kdy optická hloubka pro odpor plynu (drag optical depth) klesla pod jedničku.

V tomto okamžiku fotony volně unikly (vznik CMB) a baryonová akustická vlna se okamžitě zastavila, protože ztratila fotonový hnací tlak. Na místě zůstala sférická slupka s mírným přebytkem baryonů o komovujícím poloměru rovném **zvukovému horizontu drag epochy** r_d (sound horizon):

$$r_d \equiv r_s(z_d) = \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz$$

Z přesných měření mise Planck známe fyzikální hustoty $\Omega_b h^2 = 0,02237$ a $\Omega_c h^2 = 0,1200$, z nichž plyne fundamentální kalibrační délka:

$$r_d = 147,09 \pm 0,26 \text{ Mpc} \approx 99 h^{-1} \text{ Mpc}$$

Gravitace přebytku hmoty v centrálním halo temné hmoty a na obvodu baryonové slupky následně vedla k preferovanému vzniku galaxií ve vzájemných vzdálenostech odpovídajících právě r_d .

10.2 Korelační funkce galaxií a Landyho–Szalayův estimátor

Statistický otisk BAO v prostorovém rozložení stovek tisíc galaxií se měří pomocí prostorové **dvojbodové korelační funkce** $\xi(s)$. Ta udává pravděpodobnost dP nalezení páru galaxií ve vzdálenosti s v objemových elementech dV_1 a dV_2 vůči náhodnému rovnoměrnému rozdělení o průměrné číselné hustotě $\bar{n}$:

$$dP = \bar{n}^2 [1 + \xi(s)] dV_1 dV_2$$

Korelační funkce $\xi(s)$ je Fourierovou transformací výkonového spektra hmoty $P(k)$:

$$\xi(s) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{s}} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 P(k) j_0(ks)$$

kde $j_0(x) = \sin(x)/x$ je sférická Besselova funkce nultého řádu. V reálném prostoru se oscilace v $P(k)$ transformují do izolovaného charakteristického píku v $\xi(s)$ při vzdálenosti $s \approx r_d \approx 100 h^{-1} \text{ Mpc}$.

V praktické analýze pozorovacích katalogů, které mají složité prostorové geometrie a selekční funkce, se využívá minimálně-rozptylový **Landyho–Szalayův estimátor** (1993):

$$\hat{\xi}(s) = \frac{DD(s) - 2DR(s) + RR(s)}{RR(s)}$$

kde:

- $DD(s)$ je normalizovaný počet párů galaxií v reálném datovém katalogu (Data–Data) ve vzdálenostním koši $s \pm \Delta s$,
- $RR(s)$ je počet párů v syntetickém náhodném katalogu (Random–Random) generovaném se stejnou prostorovou selekční funkcí a okrajovými podmínkami,
- $DR(s)$ je počet křížových párů mezi daty a náhodným katalogem (Data–Random).

Tento estimátor eliminuje systematické chyby prvního řádu způsobené geometrií přehlídkového pole a fluktuacemi hustoty na okrajích.

10.3 Geometrie BAO měření: Podélný a příčný směr

Měření rozložení galaxií je anizotropní, protože poloha galaxie je určena dvěma úhly na obloze (α, δ) a spektroskopickým rudým posuvem z . Zvukový horizont r_d funguje jako standardní pravítko v obou směrech:

1. **Podélný směr (podél zorného paprsku, line-of-sight):** Rozpětí rudých posuvů Δz odpovídající zvukovému horizontu přímo měří okamžitou expanzní rychlost vesmíru $H(z)$:

$$c\Delta z = H(z)r_d \implies H(z) = \frac{c\Delta z}{r_d}$$

1. **Příčný směr (kolmo k zornému paprsku):** Úhlový rozměr $\Delta\theta$ odpovídající zvukovému horizontu měří úhlovou komovující vzdálenost $D_M(z) = (1+z)D_A(z)$:

$$D_M(z)\Delta\theta = r_d \implies D_A(z) = \frac{r_d}{(1+z)\Delta\theta}$$

Pokud měřený vzorek nemá dostatečný počet galaxií pro separátní rozklad do podélného a příčného směru, stanovuje se úhlově zprůměrovaný **sférizovaný vzdálenostní parametr** $D_V(z)$ (Eisenstein et al. 2005):

$$D_V(z) \equiv \left[cz D_M^2(z) \frac{1}{H(z)} \right]^{1/3}$$

Přehlídky BAO tedy přímo měří bezrozměrné poměry $D_M(z)/r_d$, $c/(H(z)r_d)$ a $D_V(z)/r_d$.

❗ ZAJÍMAVOST

Alcockův–Paczyńského test (1979): Jestliže při přepočtu úhlů a rudých posuvů na fyzikální vzdálenosti použijeme nesprávný kosmologický model, původně sféricky symetrický BAO pík se zdánlivě zdeformuje do elipsoidu. Parametr deformace $F_{AP}(z) \equiv D_M(z)H(z)/c$ umožňuje testovat geometrii vesmíru a temnou energii zcela nezávisle na absolutní kalibraci r_d .

10.4 Pozorovací milníky: SDSS, BOSS, eBOSS a DESI

Vývoj měření BAO zaznamenal v uplynulých dvou dekadách obrovský skok:

- **2005 (První detekce):** Tým Sloan Digital Sky Survey (SDSS, Daniel Eisenstein) detekoval BAO pík v korelaci jasných červených galaxií (LRG) při $z \approx 0,35$, současně s týmem 2dFGRS v Austrálii.
- **BOSS a eBOSS (SDSS–III a IV, 2010–2020):** Změřily spektra více než 1,5 milionu galaxií a kvazarů až do $z \approx 2,2$. Mapování Lyman- α lesa v absorpčních spektrech vzdálených kvazarů umožnilo první přesné změření $H(z)$ při $z \approx 2,33$, hluboko v epoše dominance hmoty.
- **DESI (Dark Energy Spectroscopic Instrument, 2024–):** Pozorování s 5000 robotickými optickými vlákny na teleskopu Mayall v Arizoně. Výsledky prvního roku (DESI Year 1) dosáhly bezkonkurenční přesnosti $< 1\%$ napříč sedmi koši rudého posuvu $0,1 < z < 2,4$.

Data z DESI 2024 v kombinaci s CMB a supernovami přinesla fascinující náznak (na úrovni $2,5 - 3,9\sigma$), že temná energie nemusí být statickou kosmologickou konstantou ($w = -1$), nýbrž že se její stavová rovnice dynamicky vyvíjí v čase podle parametrizace CPL ($w_0 > -1$, $w_a < 0$).

10.5 Numerická detekce BAO píku v korelační funkci v Pythonu

Následující skript demonstruje výpočet dvojbodové korelační funkce galaxií $\xi(s)$ z výkonového spektra hmoty a detekuje výrazný akustický pík při komovující vzdálenosti $s \approx 100 h^{-1} \text{ Mpc}$.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

def eisenstein_hu_bao_pk(k):
    """Zjednodušené výkonové spektrum s BAO oscilacemi (Eisenstein & Hu)."""
    # Hladké spektrum bez BAO
    q = k / 0.17
    pk_smooth = (k**0.965) / (1.0 + 3.89*q + (16.1*q)**2 + (5.46*q)**3 + (6.71*q)**4)**0.5

    # Přidání akustických oscilací s periodou danou zvukovým horizontem  $r_d \sim 100 \text{ Mpc}/h$ 
    r_d = 100.0 #  $h^{-1} \text{ Mpc}$ 
    damping = np.exp(-(k / 0.12)**1.4) # nelineární tlumení oscilací
    bao_wiggles = 1.0 + 0.15 * np.sin(k * r_d) / (k * r_d + 1e-5) * damping

    return pk_smooth * bao_wiggles

def compute_correlation_function():
    # Vzdálenostní rozsah s od 20 do 180  $h^{-1} \text{ Mpc}$ 
    s_arr = np.linspace(20.0, 160.0, 150)
    xi_arr = np.zeros_like(s_arr)

    # Numerická Fourierova-Besselova transformace:
    #  $\xi(s) = (1 / 2\pi^2) * \int k^2 * P(k) * (\sin(ks)/(ks)) dk$ 
    k_vals = np.logspace(-3, 0.5, 800)
    pk_vals = eisenstein_hu_bao_pk(k_vals)

    for i, s in enumerate(s_arr):
        # Integrand:  $k^2 * P(k) * j_0(k*s)$ 
        integrand = k_vals**2 * pk_vals * (np.sin(k_vals * s) / (k_vals * s))
        # Logaritmická integrace
        xi_arr[i] = np.trapz(integrand * k_vals, np.log(k_vals)) / (2.0 * np.pi**2)

    # Standardně se vynásobí veličina  $s^2 * \xi(s)$ 
    s2_xi = (s_arr**2) * xi_arr

    # Nalezení lokálního maxima (BAO pik)
    idx_peak = 50 + np.argmax(s2_xi[50:])

```

```

s_bao = s_arr[idx_peak]
print(f"Detekovaný BAO pík při vzdálenosti: s = {s_bao:.1f} h-1 Mpc")

# Vykreslení grafu
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8.5, 5.2))
ax.plot(s_arr, s2_xi, 'b-', lw=2.5, label='Korelační funkce  $s^2 \xi(s)$ ')
ax.axvline(s_bao, color='r', linestyle='--', lw=1.8, label=f'BAO pík ( $s \approx {s_bao:.0f} h^{-1}$  Mpc)')

ax.annotate(
    f'Zvukový horizont  $r_d \approx {s_bao:.0f} h^{-1}$  Mpc',
    xy=(s_bao, s2_xi[idx_peak]), xytext=(s_bao + 15, s2_xi[idx_peak] + 5),
    arrowprops=dict(arrowstyle='->', lw=1.5, color='red'),
    fontweight='bold', color='darkred'
)

ax.set_xlabel('Komovující vzdálenost  $s$  [ $h^{-1}$  Mpc]')
ax.set_ylabel(' $s^2 \xi(s)$  [ $h^{-2} \text{Mpc}^2$ ]')
ax.set_title('Detekce akustického píku v korelační funkci galaxií (BAO)')
ax.set_xlim(20, 160)
ax.grid(True, alpha=0.3)
ax.legend(loc='upper right')

plt.tight_layout()
plt.savefig('bao_correlation_function_peak.png', dpi=300)
print("Graf 'bao_correlation_function_peak.png' úspěšně vytvořen.")

if __name__ == '__main__':
    compute_correlation_function()

```

Kapitola 11: Kosmologický rozpor Hubbleovy konstanty H_0

Moderní fyzikální kosmologie dosáhla éry mimořádné přesnosti, kdy jsou základní parametry standardního modelu Λ CDM měřeny s nejistotami pod jedno procento. Právě tato bezprecedentní preciznost však odhalila hluboký rozpor v samotných základech našeho chápání vesmíru: **napětí Hubbleovy konstanty** (Hubble tension). Jedná se o statisticky vysoce signifikantní diskrepanci mezi přímým lokálním měřením expanzní rychlosti a nepřímým odvozením z raného vesmíru. V této kapitole detailně zanalyzujeme strukturu žebříku vzdáleností, alternativní metody měření, napětí parametru S_8 a teoretické pokusy o modifikaci kosmologického modelu.

11.1 Formulace Hubbleova napětí

Hubbleova konstanta H_0 udává současnou expanzní rychlost vesmíru. V současné době existují dvě diametrálně odlišné metodiky jejího stanovení:

1. **Lokální přímé měření (Late-Universe probes):** Měření expanze v lokálním vesmíru ($z \lesssim 0,15$) pomocí žebříku kosmických vzdáleností. Klíčovým představitelem je tým **SH0ES** (Supernovae and H_0 for the Equation of State, Adam Riess et al. 2022), který využívá geometrické paralaxy z družice Gaia, cefeidy v blízkých galaxiích a supernovy typu Ia. Jejich finální výsledek činí:

$$H_0^{\text{SH0ES}} = 73,04 \pm 1,04 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$$

1. **Nepřímé odvození z raného vesmíru (Early-Universe probes):** Měření anizotropií CMB družicí **Planck** (2018) v kombinaci s přesným kosmologickým modelem Λ CDM. Planck přímo měří úhlový rozměr akustického zvuku na sféře posledního rozptylu $\theta_* = r_s(z_*)/D_A(z_*)$ s přesností na 0,03%. Při pevném předpokladu standardního modelu plochého Λ CDM vesmíru dává kosmologický fit hodnotu:

$$H_0^{\text{Planck}} = 67,36 \pm 0,54 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$$

Rozdíl mezi těmito dvěma fundamentálními výsledky činí:

$$\Delta H_0 \approx 5,7 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$$

Statistická divergence dosahuje:

$$\text{Signifikance} = \frac{|H_0^{\text{SH0ES}} - H_0^{\text{Planck}}|}{\sqrt{\sigma_{\text{SH0ES}}^2 + \sigma_{\text{Planck}}^2}} = \frac{73,04 - 67,36}{\sqrt{1,04^2 + 0,54^2}} \approx \frac{5,68}{1,17} \approx 5,3\sigma$$

Pravděpodobnost, že by tento rozdíl byl pouhou náhodnou statistickou fluktuací, je menší než jedna ku třem milionům ($p < 10^{-7}$). V částicové fyzice i astrofyzice překročení hranice 5σ formálně představuje kritérium pro **objev nové fyziky** za hranicemi standardního modelu.

11.2 Lokální žebřík kosmických vzdáleností

Lokální měření nevyžaduje žádné předpoklady o globálním kosmologickém modelu ani o povaze temné energie a temné hmoty. Je založeno na třístupňovém empirickém **žebříku vzdáleností** (Distance Ladder):

[Krok 1: Geometrické kotvy] -> [Krok 2: Standardní svíčky] -> [Krok 3: Hubbleův tok]
 (Paralaxy Gaia, masery) (Cefeidy, TRGB, JAGB) (Supernovy Ia)

- 1. První příčka (Geometrické kalibrátory):** Vzdálenosti určené čistou trigonometrií bez astrofyzikálního modelování. Zahrnují trigonometrické paralaxy cefeid v Mléčné dráze z astrometrické družice ESA Gaia (DR3), obíhající vodní masery v akrečním disku supermasivní černé díry v galaxii NGC 4258 ($D = 7,58 \pm 0,11$ Mpc) a zákrytové dvojhvězdy ve Velkém Magellanově mračnu (LMC).
- 2. Druhá příčka (Primární proměnné hvězdy):** Klasické cefeidy populace I pulzují radiálně v důsledku κ -mechanismu (ionizace helia). Henrietta Leavittová (1912) objevila těsný **vztah perioda-zářivost** (Leavitt Law):

$$M_V = a \log_{10}(P) + b$$

Cefeidy kalibrované v LMC a NGC 4258 jsou pozorovány Hubbleovým vesmírným dalekohledem (HST) v hostitelských galaxiích, ve kterých v moderní éře explodovala supernova typu Ia.

- 1. Třetí příčka (Supernovy typu Ia v Hubbleově toku):** Kalibrace absolutní magnitudy M_B^0 supernov Ia z hostitelských galaxií umožňuje změřit vzdálenosti stovek supernov v nezkresleném Hubbleově toku ($0,023 < z < 0,15$), kde jsou pekulární rychlosti galaxií zanedbatelné vůči kosmologické expanzi.

Hubbleova konstanta je následně získána z relace:

$$\log_{10} H_0 = \frac{M_B^0 + 5a_B + 25}{5}$$

kde a_B je úsek Hubbleova diagramu pro $z \rightarrow 0$.

Alternativní kalibrátory: TRGB a JAGB

Kritici cefeid namítali možné systematické chyby plynoucí ze závislosti periody na metalitě plynu či splývání obrazů hvězd (crowding) v hustých galaktických discích. Wendy Freedmanová a kolaborace CCHP (Carnegie-Chicago Hubble Program) proto vyvinuly nezávislou metodu **hrotu větve červených obrů** (Tip of the Red Giant Branch, TRGB).

Červení obři s degenerovaným heliovým jádrem podléhají heliovému záblesku při přesně konstantní zářivosti jádra ($M_I \approx -4,05$ mag). TRGB hvězdy se nacházejí v řídkých halách galaxií, kde nedochází k prolínání obrazů ani k prachové extinkci. Měření CCHP udávají hodnotu ležící uprostřed sporu:

$$H_0^{\text{TRGB}} = 69,8 \pm 1,7 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$$

Novější kalibrace uhlíkových hvězd asymptotické větve obrů (JAGB) i nová data z teleskopu Jamese Webba (JWST) z let 2023–2024 však potvrzují vysokou hodnotu $H_0 \approx 72 - 73$ km/s/Mpc pro cefeidy i TRGB při detailním rozlišení jednotlivých hvězd.

11.3 Nezávislé pozorovací metody

K rozhodnutí sporu slouží zcela nové, nezávislé fyzikální metody:

1. **Časově-zpožd'ovací kosmografie (TDCOSMO / HOLICOW):** Využívá silně gravitačně čočkované kvazary s proměnnou jasností. Gravitační potenciál čočkující galaxie způsobuje, že světlo v jednotlivých násobných obrazech urazí různé dráhy a dorazí k pozorovateli se zpožděním dnů až měsíců:

$$\Delta t_{ij} = \frac{D_{\Delta t}}{c} \Delta \tau_{ij}$$

kde $D_{\Delta t} \equiv (1 + z_l) \frac{D_l D_s}{D_{ls}} \propto H_0^{-1}$ je časově-zpožd'ovací vzdálenost. Analýza šesti čoček týmem HOLICOW přinesla $H_0 = 73,3_{-1,8}^{+1,7}$ km/s/Mpc, což plně podporuje lokální měření.

1. **Standardní sirény (Standard Sirens):** Detekce gravitačních vln ze splynutí binárních neutronových hvězd (BNS) pozemními interferometry LIGO a Virgo. Amplituda gravitační vlny $h(t)$ a rychlost změny frekvence $\dot{f}$ závisí pouze na chirální hmotnosti $\mathcal{M}$ a zářivé vzdálenosti D_L :

$$h \propto \frac{\mathcal{M}^{5/3} f^{2/3}}{D_L}, \quad \dot{f} \propto \mathcal{M}^{5/3} f^{11/3}$$

Splynutí GW170817 s identifikovaným elektromagnetickým protějškem (kilonova AT2017gfo v galaxii NGC 4993 při $z = 0,0097$) poskytlo přímé změření $H_0 = 70_{-8}^{+12}$ km/s/Mpc. Budoucí detekce desítek sirén sítí LIGO–Virgo–KAGRA určí H_0 s přesností na 1 % zcela bez použití žebříku vzdáleností.

11.4 Teoretická řešení: Modifikace raného vs. pozdního vesmíru

Rozpor nelze snadno vyřešit triviální systematickou chybou, neboť jak lokální žebřík, tak CMB jsou podepřeny desítkami vzájemně se kontrolujících testů (např. BAO + BBN bez CMB dává rovněž $H_0 \approx 67,5$ km/s/Mpc). Řešení vyžaduje modifikaci fyzikálního modelu:

$$H_0 \propto \frac{1}{r_d}$$

Abychom zvýšili odvozenou hodnotu H_0 z CMB z 67 na 73, musíme **zmenšit fyzikální rozměr zvukového horizontu** r_d přibližně o 7 %.

- **Raná temná energie (Early Dark Energy, EDE):** Nejpopulárnější teoretické řešení předpokládá existenci nového skalárního pole, které krátce vstoupilo do hry těsně před rekombinací ($z \sim 3500$) a přispělo přibližně 5 – 10 % k celkové hustotě energie vesmíru, načež se rychle rozpadlo ($w_{\text{EDE}} > 1/3$). Zvýšená expanzní rychlost $H(z)$ před rekombinací zkrátila čas

dostupný pro šíření akustické vlny a snížila r_d z 147 Mpc na přibližně 138 Mpc. Tím model přirozeně posouvá inferovanou hodnotu H_0 k 73 km/s/Mpc.

- **Dodatečné relativistické částice ($\Delta N_{\text{eff}} > 0$):** Hypotéza sterilních neutrin nebo temného záření. Zvyšuje expanzní rychlost, avšak naráží na limity z tlumení vysokých multipólů CMB a syntézy helia při BBN.
- **Modifikace pozdního vesmíru:** Modely proměnné temné energie s $w(z) < -1$ (fantomová energie) nebo rozpadající se temné hmoty sice dokáží zvednout H_0 , avšak narážejí na přísné geometrické limity z BAO a supernov Ia při středních rudých posuvech.

11.5 Napětí parametru S_8 (LSS Tension)

Paralelně s Hubbleovým napětím existuje v moderní kosmologii druhá, neméně znepokojivá neshoda týkající se amplitudy fluktuací hmoty v pozdním vesmíru. Měří se pomocí kombinovaného parametru S_8 :

$$S_8 \equiv \sigma_8 \sqrt{\frac{\Omega_m}{0,3}}$$

- **Slabé gravitační čočkování a shlukování galaxií (KiDS-1000, DES Y3, HSC):** Slabý stříh velkoškálové struktury systematicky naměřuje nižší hodnotu shlukování:

$$S_8^{\text{LSS}} \approx 0,76 - 0,78 \pm 0,015$$

- **Predikce z CMB (Planck 2018):** Kosmologický model extrapolovaný z raného vesmíru předpovídá výraznější shlukování:

$$S_8^{\text{Planck}} = 0,834 \pm 0,016$$

Rozpor dosahuje statistické hladiny $2,5 - 3\sigma$. Zajímavé je, že většina modelů rané temné energie (EDE) navržených pro vyřešení Hubbleova napětí napětí parametru S_8 ještě zhoršuje, což ukazuje na mimořádnou provázanost a komplexitu kosmologických pozorování.

11.6 Statistická analýza a Bayesovské srovnání měření H_0 v Pythonu

Následující skript provádí bayesovskou kombinaci nezávislých měření Hubbleovy konstanty a vizualizuje pravděpodobnostní rozdělení jednotlivých metod.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

def analyze_hubble_tension():
    # Přehled klicových měření  $H_0$  [km/s/Mpc]
    measurements = {
        'Planck CMB (2018,  $\Lambda$ CDM)': (67.36, 0.54, 'blue'),
        'ACT + WMAP ( $\Lambda$ CDM)': (67.9, 1.5, 'cyan'),
        'DESI 2024 + CMB + BAO': (67.8, 0.6, 'teal'),
        'TRGB (Freedman et al. CCHP)': (69.8, 1.7, 'orange'),
        'TDCOSMO (Lensing Time-Delay)': (73.3, 1.7, 'magenta'),
        'SH0ES (Riess et al. 2022, Cepheids)': (73.04, 1.04, 'red'),
    }

    h_grid = np.linspace(63.0, 78.0, 1000)

    fig, ax = plt.subplots(figsize=(9, 6))

    for label, (mean, std, color) in measurements.items():
        pdf = norm.pdf(h_grid, loc=mean, scale=std)
        ax.plot(h_grid, pdf, label=f'{label}:  $\{mean:.2f\} \pm \{std:.2f\}$ ',
                color=color, lw=2.0)
        ax.fill_between(h_grid, 0, pdf, color=color, alpha=0.15)

    # Zvyraznění rozporu
    ax.axvspan(67.36 - 0.54, 67.36 + 0.54, color='blue', alpha=0.25)
    ax.axvspan(73.04 - 1.04, 73.04 + 1.04, color='red', alpha=0.25)

    ax.annotate('Kosmologická predikce\n(Raný vesmír)', xy=(67.36, 0.75),
                xytext=(64.0, 0.85),
                arrowprops=dict(arrowstyle='->', lw=1.5, color='blue'),
                fontweight='bold', color='darkblue')
    ax.annotate('Přímá lokální měření\n(Pozdní vesmír)', xy=(73.04, 0.40),
                xytext=(74.2, 0.60),
                arrowprops=dict(arrowstyle='->', lw=1.5, color='red'),
                fontweight='bold', color='darkred')

    ax.annotate('$> 5\sigma$ Napětí', xy=(70.2, 0.25), xytext=(69.5, 0.35),
                fontsize=12, fontweight='bold', color='black',
                bbox=dict(boxstyle="round,pad=0.3", fc="yellow", ec="k",
                        lw=1.5, alpha=0.8))

```

```
ax.set_xlabel('Hubbleova konstanta $H_0$ [$\mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$]')
ax.set_ylabel('Hustota pravděpodobnosti $P(H_0)$')
ax.set_title('Kosmologické napětí Hubbleovy konstanty $H_0$')
ax.set_xlim(64, 77)
ax.set_ylim(0, 0.95)
ax.grid(True, alpha=0.3)
ax.legend(loc='upper right', fontsize=8.5)

plt.tight_layout()
plt.savefig('hubble_tension_comparison.png', dpi=300)
print("Graf 'hubble_tension_comparison.png' uspesne vytvoren.")

if __name__ == '__main__':
    analyze_hubble_tension()
```

Část V: Přílohy a praktické repetitorium

V závěrečné části této monografie přinášíme ucelený matematický, výpočetní a encyklopedický aparát, který slouží jako referenční příručka pro pokročilé studenty astrofyziky a vědecké pracovníky:

- **Dodatek A (Matematická odvození Friedmannových rovnic):** Detailní krok-za-krokem tenzorové odvození Christoffelových symbolů, Ricciho tenzoru, Ricciho skaláru a obou Friedmannových rovnic pro obecnou prostorovou křivost k .
- **Dodatek B (Kosmologické výpočty v Astropy a CAMB):** Praktický programátorský manuál pro práci s moderními vědeckými knihovnami v Pythonu (``astropy.cosmology``, Boltzmannovský kód ``camb`` a ``classy``), včetně plně funkčních výpočetních skriptů.
- **Dodatek C (Sbírka 15 řešených úloh):** Komplexní soubor 15 vysokoškolských výpočetních úloh pokrývajících kinematiku, termodynamiku raného vesmíru, gravitační čočkování, inflaci i kosmologická napětí, včetně kompletních analytických odvození a numerických výsledků.
- **Dodatek D (Encyklopedický glosář fyzikální kosmologie):** Rigorózní terminologický slovník s více než 50 fundamentálními hesly moderní kosmologie, definicemi fyzikálních veličin a mezinárodní terminologií.

Dodatek A: Matematická odvození Friedmannových rovnic

V tomto dodatku provedeme rigorózní a úplné diferenciálně-geometrické odvození Friedmannových rovnic přímo z Einsteinových rovnic obecné teorie relativity. Pro přehlednost budeme v tenzorových výpočtech pracovat v přirozené soustavě jednotek, kde rychlost světla $c = 1$ (v konečných vztazích rychlost světla explicitně obnovíme).

A.1 Metrický tenzor a Christoffelovy symboly

Uvažujme FLRW metriku v polárních sférických souřadnicích $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]$$

Kovariantní metrický tenzor $g_{\mu\nu}$ je diagonální s nenulovými složkami:

$$g_{00} = -1, \quad g_{rr} = \frac{a^2(t)}{1 - kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = a^2(t)r^2, \quad g_{\phi\phi} = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta$$

Kontravariantní (inverzní) metrický tenzor $g^{\mu\nu}$ má složky:

$$g^{00} = -1, \quad g^{rr} = \frac{1 - kr^2}{a^2(t)}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{a^2(t)r^2}, \quad g^{\phi\phi} = \frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta}$$

Determinant metrického tenzoru je roven:

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}) = -\frac{a^6(t)r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}$$

Christoffelovy symboly druhého druhu jsou definovány vzorcem:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$$

Vzhledem k diagonalitě metriky lze výpočet rozdělit do několika skupin:

1. Časové složky s jedním prostorovým indexem:

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{0i}^0 = 0$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_i g_{0j} + \partial_j g_{0i} - \partial_0 g_{ij}) = \frac{1}{2} (-1) (-\dot{g}_{ij}) = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij}$$

Konkrétně:

$$\Gamma_{rr}^0 = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^0 = a\dot{a}r^2$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta$$

1. Smíšené prostorovo–časové složky:

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}g^{ik}(\partial_0 g_{kj} + \partial_j g_{k0} - \partial_k g_{0j}) = \frac{1}{2}g^{ii}\dot{g}_{ij} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i$$

Tedy pro všechny diagonální prvky:

$$\Gamma_{0r}^r = \Gamma_{0\theta}^\theta = \Gamma_{0\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a}$$

1. Čistě prostorové složky: Výpočtem z prostorových derivací obdržíme nenulové prvky:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1 - kr^2}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta$$

Všechny ostatní složky Christoffelových symbolů jsou identicky rovny nule.

A.2 Složky Ricciho tenzoru a Ricciho skalár

Ricciho tenzor $R_{\mu\nu}$ je dán zúžením:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta$$

Nejprve určíme zúžený symbol:

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha = \partial_\mu \ln \sqrt{-g}$$

Pro časovou složku $\mu = 0$:

$$\Gamma_{0\alpha}^\alpha = \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{0r}^r + \Gamma_{0\theta}^\theta + \Gamma_{0\phi}^\phi = 0 + 3\frac{\dot{a}}{a} = 3\frac{\dot{a}}{a}$$

Výpočet časové složky R_{00}

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{0\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\beta$$

Protože $\Gamma_{00}^\alpha = 0$, první a třetí člen mizí:

$$R_{00} = -\partial_0 \left(3 \frac{\dot{a}}{a} \right) - \sum_i \Gamma_{0j}^i \Gamma_{0i}^j = -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2$$

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}$$

Výpočet prostorových složek R_{ij}

Z prostorové izotropie plyne, že prostorový Ricciho tenzor musí být úměrný metrickému tenzoru: $R_{ij} \propto g_{ij}$. Spočtěme složku R_{rr} :

$$R_{rr} = \partial_\alpha \Gamma_{rr}^\alpha - \partial_r \Gamma_{r\alpha}^\alpha + \Gamma_{rr}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{r\beta}^\alpha \Gamma_{r\alpha}^\beta$$

Po dosazení všech Christoffelových symbolů a pečlivém algebraickém sečtení získáme:

$$R_{rr} = \frac{1}{1 - kr^2} [a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k]$$

Srovnáním s $g_{rr} = a^2/(1 - kr^2)$ vidíme, že:

$$R_{ij} = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{k}{a^2} \right) g_{ij}$$

Výpočet Ricciho skaláru R

Ricciho skalár křivosti je dán zúžením $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi}$:

$$R = -(-3 \frac{\ddot{a}}{a}) + 3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{k}{a^2} \right)$$

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]$$

A.3 Einsteinovy rovnice a odvození Friedmannových rovnic

Einsteinovy rovnice gravitačního pole s kosmologickou konstantou znějí:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Tenzor energie a hybnosti ideální tekutiny v klidovém stavu je $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$, což dává:

$$T_{00} = \rho, \quad T_{ij} = p g_{ij}$$

1. Odvození první Friedmannovy rovnice (časová složka $\mu = 0, \nu = 0$)

Einsteinův tenzor pro časovou složku je:

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2} \left\{ 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \right\} (-1)$$

$$G_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{\dot{a}}{a} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{k}{a^2} = 3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]$$

Dosazením do Einsteinovy rovnice ($g_{00} = -1$):

$$3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right] - \Lambda = 8\pi G\rho$$

Vydělením třemi a přeskupením členů obdržíme **první Friedmannovu rovnici**:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Obnovením rychlosti světla c ($\rho \rightarrow \rho c^2, k \rightarrow kc^2, \Lambda \rightarrow \Lambda c^2$):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

2. Odvození druhé Friedmannovy rovnice (prostorové složky $\mu = i, \nu = i$)

Pro prostorové složky máme:

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right)g_{ij} - 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)g_{ij}$$

$$G_{ij} = -\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)g_{ij}$$

Einsteinova rovnice pro prostorové složky je:

$$-\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)g_{ij} + \Lambda g_{ij} = 8\pi Gp g_{ij}$$

Vydělením g_{ij} :

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -8\pi Gp$$

Z první Friedmannovy rovnice víme, že $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}$. Dosadíme tento výraz:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}\right) - \Lambda = -8\pi Gp$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi Gp - \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{2}{3}\Lambda = -\frac{8\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{2}{3}\Lambda$$

Vydělením dvěma získáváme **druhou Friedmannovu rovnici** (akcelerační rovnici):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

V plných jednotkách SI:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

A.4 Kovariantní zákon zachování a rovnice kontinuity

Jako nezávislou kontrolu odvodíme rovnici kontinuity z kovariantního zákona zachování:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} = 0$$

Uvažujme časovou složku $\nu = 0$. Vzhledem k homogenitě jsou prostorové derivace nulové ($\partial_i = 0$):

$$\partial_0 T^{00} + \Gamma_{\mu 0}^\mu T^{\mu 0} + \Gamma_{\mu i}^\mu T^{i0} + \Gamma_{00}^0 T^{00} + 2\Gamma_{0i}^0 T^{0i} + \Gamma_{ij}^0 T^{ij} = 0$$

Dosadíme $T^{00} = \rho$, $T^{ij} = pg^{ij}$, $\Gamma_{\mu 0}^\mu = 3\frac{\dot{a}}{a}$, $\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2}\dot{g}_{ij} = \frac{\dot{a}}{a}g_{ij}$:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \frac{\dot{a}}{a}g_{ij}(pg^{ij}) = 0$$

Protože $g_{ij}g^{ij} = \delta_i^i = 3$:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + 3\frac{\dot{a}}{a}p = 0$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$

V jednotkách SI ($\rho \rightarrow \rho c^2$):

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0$$

Tím je tenzorové odvození základních dynamických zákonů kosmologie kompletní.

Dodatek B: Kosmologické výpočty v Astropy a CAMB

V moderní astrofyzice jsou teoretické kosmologické výpočty a analýzy pozorovacích dat realizovány prostřednictvím standardizovaných, vysoce optimalizovaných softwarových knihoven v jazyce Python. V tomto dodatku představíme dva klíčové nástroje: knihovnu `astropy.cosmology` pro základní geometrické a kinematické výpočty a kód `camb` pro řešení Boltzmannových rovnic a výpočet anizotropií CMB a velkoškálové struktury.

B.1 Knihovna Astropy.cosmology

Modul `astropy.cosmology` je součástí základního astrofyzikálního balíčku Astropy. Poskytuje robustní objektově orientované rozhraní pro práci s FLRW modely s libovolnou kombinací hmoty, záření, prostorové křivosti a temné energie.

Vestavěné kosmologické modely

Balíček obsahuje předdefinované modely odpovídající klíčovým pozorovacím misím:

```
from astropy.cosmology import Planck18, WMAP9
```

```
<h1>Okamžitý přístup k parametrům mise Planck 2018</h1>
print(f"Hubbleova konstanta H0: {Planck18.H0}")
print(f"Hustotní parametr hmoty Om0: {Planck18.Om0}")
print(f"Baryonová hustota Ob0: {Planck18.Ob0}")
print(f"Současný věk vesmíru: {Planck18.age(0):.3f}")
```

Vytvoření vlastního kosmologického modelu

Uživatel může definovat libovolný plochý či zakřivený model pomocí specializovaných tříd:

- `FlatLambdaCDM`: Plochý vesmír s kosmologickou konstantou.
- `LambdaCDM`: Obecný vesmír s nenulovou prostorovou křivostí $\Omega_k \neq 0$.
- `FlatwCDM`: Plochý vesmír s konstantní stavovou rovnicí temné energie $w \neq -1$.
- `Flatw0wacdm`: Plochý vesmír s CPL parametrizací dynamické temné energie $w(a) = w_0 + w_a(1 - a)$.

```

from astropy.cosmology import FlatLambdaCDM, Flatw0waCDM
import astropy.units as u

<h1>Definice standardního modelu</h1>
cosmo = FlatLambdaCDM(H0=70.0 * u.km / u.s / u.Mpc, Om0=0.3, Tcmb0=2.7255 *
u.K)

<h1>Model s dynamickou temnou energií</h1>
cosmo_cpl = Flatw0waCDM(
    H0=68.0 * u.km / u.s / u.Mpc, Om0=0.31, Ob0=0.049,
    w0=-0.9, wa=-0.3
)

```

Klíčové metody výpočtu vzdáleností a časů

Objekt kosmologie poskytuje širokou škálu fyzikálních funkcí vracejících hodnoty s explicitními jednotkami `astropy.units`:

Metoda v Pythonu	Fyzikální veličina	Matematický ekvivalent
`cosmo.comoving_distance(z)`	Radiální komovující vzdálenost	$D_C(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$
`cosmo.luminosity_distance(z)`	Zářivá vzdálenost	$D_L(z) = (1+z)D_M(z)$
`cosmo.angular_diameter_distance(z)`	Úhlová vzdálenost	$D_A(z) = D_M(z)/(1+z)$
`cosmo.distmod(z)`	Modul vzdálenosti [mag]	$\mu(z) = 5 \log_{10}(D_L/10 \text{ pc})$
`cosmo.age(z)`	Kosmický věk v rudém posuvu z	$t(z) = \int_z^\infty \frac{dz'}{(1+z')H(z')}$
`cosmo.lookback_time(z)`	Čas zpětného pohledu	$t_{\text{lookback}}(z) = t_0 - t(z)$
`cosmo.critical_density(z)`	Kritická hustota vesmíru	$\rho_{\text{crit}}(z) = \frac{3H^2(z)}{8\pi G}$

B.2 Knihovna CAMB (Code for Anisotropies in the Microwave Background)

Kód `camb` (Antony Lewis a Anthony Challinor) je celosvětovým zlatým standardem pro řešení linearizované soustavy svázaných Einsteinových a Boltzmannových rovnic popisujících evoluci fotonů, neutrin, baryonů a temné hmoty v raném vesmíru. Výpočetní jádro je napsáno v extrémně rychlém Fortranu s moderním rozhraním pro jazyk Python.

Typický pracovní postup v CAMB

1. Inicializace objektu parametrů `CAMBparams`.

2. Nastavení kosmologických parametrů (`H0`, `ombh2`, `omch2`, `ns`, `As`).
3. Konfigurace výpočtu (multipólový rozsah ℓ , výkonové spektrum hmoty $P(k)$, přenosové funkce).
4. Výpočet výsledků voláním `camb.get\_results(params)`.
5. Extrakce úhlových výkonových spekter C_ℓ nebo spektra hmoty $P(k)$.

B.3 Porovnání s knihovnou CLASS

Vedle CAMB představuje druhý nezávislý a široce využívaný nástroj kód **CLASS** (Cosmic Linear Anisotropy Solving System, Julien Lesgourgues a Thomas Tram), vyvinutý v jazyce C s Python rozhraním `classy`.

Zatímco CAMB je tradičně preferován týmem družice Planck pro bayesovské Monte Carlo fitování (CosmoMC, Cobaya), kód CLASS vyniká modulární architekturou, flexibilitou při implementaci nestandardních částicových modelů (rozpadající se temná hmota, neasociované interakce) a přímou integrací do vzorkovače Monte Python. Vzájemná shoda mezi CAMB a CLASS na úrovni 0,1 % zaručuje, že teoretické predikce pro CMB nejsou zatíženy numerickými chybami kódů.

B.4 Ukázkové vědecké skripty

Skript 1: Komplexní kosmologické výpočty v Astropy

Následující skript demonstruje pokročilou práci s `astropy.cosmology`, srovnání modelů a výpočet časů zpětného pohledu.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from astropy.cosmology import Planck18, FlatLambdaCDM
import astropy.units as u

def run_astropy_cosmology_demo():
    # Srovnání Planck 2018 s hypotetickým modelem bez temné energie (EdS)
    eds_cosmo = FlatLambdaCDM(H0=Planck18.H0, Om0=1.0)

    z_vals = np.linspace(0.01, 4.0, 200)

    # 1. Závise vzdálenosti
    d_l_planck = Planck18.luminosity_distance(z_vals).to(u.Gpc).value
    d_l_eds = eds_cosmo.luminosity_distance(z_vals).to(u.Gpc).value

    # 2. Úhlové vzdálenosti
    d_a_planck = Planck18.angular_diameter_distance(z_vals).to(u.Gpc).value
    d_a_eds = eds_cosmo.angular_diameter_distance(z_vals).to(u.Gpc).value

    # 3. Čas zpětného pohledu (lookback time)
    lb_planck = Planck18.lookback_time(z_vals).to(u.Gyr).value
    lb_eds = eds_cosmo.lookback_time(z_vals).to(u.Gyr).value

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(11, 4.8))

ax1.plot(z_vals, d_l_planck, 'b-', lw=2.2, label='$D_L$ (Planck 2018)')
ax1.plot(z_vals, d_l_eds, 'b--', lw=1.8, label='$D_L$ (EdS, $\Omega_m=1$)')
ax1.plot(z_vals, d_a_planck, 'r-', lw=2.2, label='$D_A$ (Planck 2018)')
ax1.plot(z_vals, d_a_eds, 'r--', lw=1.8, label='$D_A$ (EdS, $\Omega_m=1$)')
ax1.set_xlabel('Kosmologický rudý posuv $z$')
ax1.set_ylabel('Vzdálenost [Gpc]')
ax1.set_title('Srovnání kosmologických vzdáleností')
ax1.grid(True, alpha=0.3)
ax1.legend()

ax2.plot(z_vals, lb_planck, 'purple', lw=2.2, label='Planck 2018 ($t_0=13.8$ Gyr)')
ax2.plot(z_vals, lb_eds, 'k--', lw=1.8, label='Einstein-de Sitter ($t_0=9.3$ Gyr)')
ax2.set_xlabel('Kosmologický rudý posuv $z$')
ax2.set_ylabel('Čas zpětného pohledu [Gyr]')
ax2.set_title('Čas zpětného pohledu (Lookback Time)')

```

```
ax2.grid(True, alpha=0.3)
ax2.legend()

plt.tight_layout()
plt.savefig('astropy_cosmology_analysis.png', dpi=300)
print("Graf 'astropy_cosmology_analysis.png' uspesne vytvoren.")

if __name__ == '__main__':
    run_astropy_cosmology_demo()
```

Skript 2: Výpočet spektra anizotropií CMB a spektra hmoty v CAMB

```

"""
Ukazkový skript pro výpočet uhlového spektra CMB v CAMB.
Predpokládá nainstalovaný balíček: pip install camb
"""

def camb_computation_guide():
    code_snippet = '''
import camb
from camb import model, initialpower
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

<h1>1. Nastavení kosmologických parametrů</h1>
pars = camb.CAMBparams()
pars.set_cosmology(H0=67.4, ombh2=0.02237, omch2=0.1200, mnu=0.06, omk=0)
pars.InitPower.set_params(As=2.1e-9, ns=0.965, r=0.0)
pars.set_for_lmax(2500, lens_potential_accuracy=1)

<h1>2. Výpočet výsledku</h1>
results = camb.get_results(pars)

<h1>3. Získání uhlových výkonových spekter (lensed Cls)</h1>
powers = results.get_cmb_power_spectra(pars, CMB_unit='muK')
totCL = powers['total'] # Obsahuje [TT, EE, BB, TE]
ell = np.arange(totCL.shape[0])

<h1>Vykreslení TT a EE spektra</h1>
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(ell[2:], totCL[2:, 0], 'b-', lw=2.0, label='TT spektrum')
plt.plot(ell[2:], totCL[2:, 1], 'r-', lw=2.0, label='EE polarizace')
plt.plot(ell[2:], np.abs(totCL[2:, 3]), 'g--', lw=1.5, label='|TE| krizový
mod')
plt.xscale('log')
plt.xlabel('Multipol $\ell$')
plt.ylabel('$\ell(\ell+1)C_{\ell} / 2\pi$ [$\mu\mathrm{K}^2$]')
plt.title('Teoretické výkonové spektrum CMB z CAMB')
plt.grid(True, which='both', alpha=0.3)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.savefig('camb_cmb_spectra_output.png', dpi=300)
'''

    print("Kód pro CAMB připraven.")

```

```
if __name__ == '__main__':  
    camb_computation_guide()
```

Dodatek C: Sbírka 15 řešených výpočetních úloh

Tato sbírka obsahuje patnáct reprezentativních vysokoškolských úloh pokrývajících celou šíři moderní fyzikální kosmologie. Každá úloha obsahuje přesné fyzikální zadání, rigorózní analytické odvození, dosazení reálných kosmologických konstant a doprovodný referenční výpočet v Pythonu.

Úloha 1: Věk plochého vesmíru v modelu Λ CDM

Zadání: Odvoďte analytický vzorec pro věk plochého vesmíru ($\Omega_k = 0$) vyplněného nerelativistickou hmotou (Ω_m) a kosmologickou konstantou ($\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$). Spočtěte věk vesmíru v miliardách let pro hodnoty Planck 2018: $H_0 = 67,4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ a $\Omega_m = 0,315$. **Řešení:** Z první Friedmannovy rovnice plyne:

$$H(a) = \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda} \implies dt = \frac{da}{H_0 a \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda}} = \frac{\sqrt{a} da}{H_0 \sqrt{\Omega_m + \Omega_\Lambda a^3}}$$

Zavedeme substituci $u = a^{3/2} \implies du = \frac{3}{2} \sqrt{a} da$:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\Omega_m + \Omega_\Lambda u^2}} = \frac{2}{3H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(\Omega_m/\Omega_\Lambda) + u^2}}$$

Integrál je standardní arkushyperbolický sinus:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} \right) = \frac{2}{3H_0 \sqrt{1 - \Omega_m}} \ln \left(\sqrt{\frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m}} + \sqrt{\frac{1}{\Omega_m}} \right)$$

Numerický výpočet: Pro $\Omega_m = 0,315 \implies \Omega_\Lambda = 0,685$:

$$\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} = \sqrt{\frac{0,685}{0,315}} \approx \sqrt{2,1746} \approx 1,4747$$

$$\operatorname{arsinh}(1,4747) = \ln(1,4747 + \sqrt{1,4747^2 + 1}) \approx \ln(1,4747 + 1,7817) = \ln(3,2564) \approx 1,1806$$

Hubbleův čas: $t_H = 1/H_0 = 1/(2,184 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}) \approx 4,578 \times 10^{17} \text{ s} \approx 14,51 \text{ Gyr}$.

$$t_0 = \frac{2 \cdot 1,1806}{3 \cdot \sqrt{0,685}} \cdot 14,51 \text{ Gyr} \approx \frac{2,3612}{2,4830} \cdot 14,51 \text{ Gyr} \approx 0,9509 \cdot 14,51 \text{ Gyr} \approx 13,80 \text{ Gyr}$$

```
import numpy as np

H0 = 67.4 # km/s/Mpc
Om_m = 0.315
Om_L = 1.0 - Om_m

t_H = 1.0 / (H0 * 1e3 / 3.085677581e22) / (365.25 * 86400 * 1e9) # Gyr
t0 = (2.0 / (3.0 * np.sqrt(Om_L))) * np.arcsinh(np.sqrt(Om_L / Om_m)) * t_H
print(f"Úloha 1: Věk vesmíru t0 = {t0:.3f} Gyr")
```

Úloha 2: Přechod od zpomalené ke zrychlené expanzi

Zadání: Určete rudý posuv z_{acc} a expanzní faktor a_{acc} , při kterém došlo k inflexi expanze vesmíru (přechodu od gravitačního zpomalování ke zrychlování, $\ddot{a} = 0$). **Řešení:** Druhá Friedmannova rovnice pro prach ($p_m = 0$) a kosmologickou konstantu ($p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$) má tvar:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_m + \frac{\Lambda c^2}{3} = -\frac{H_0^2}{2}[\Omega_m a^{-3} - 2\Omega_\Lambda]$$

V okamžiku inflexe $\ddot{a} = 0$ musí být výraz v závorce roven nule:

$$\Omega_m a_{\text{acc}}^{-3} - 2\Omega_\Lambda = 0 \implies a_{\text{acc}}^3 = \frac{\Omega_m}{2\Omega_\Lambda}$$

$$a_{\text{acc}} = \left(\frac{\Omega_m}{2\Omega_\Lambda} \right)^{1/3}$$

Protože $1 + z_{\text{acc}} = 1/a_{\text{acc}}$:

$$z_{\text{acc}} = \left(\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{1/3} - 1$$

Numerický výpočet: Pro $\Omega_m = 0,315$ a $\Omega_\Lambda = 0,685$:

$$\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_m} = \frac{2 \cdot 0,685}{0,315} = \frac{1,370}{0,315} \approx 4,349$$

$$z_{\text{acc}} = (4,349)^{1/3} - 1 \approx 1,632 - 1 \approx 0,632$$

Expanzní faktor činil $a_{\text{acc}} \approx 0,613$. K akceleraci došlo přibližně před 6 miliardami let.

```
z_acc = (2.0 * Om_L / Om_m)**(1.0 / 3.0) - 1.0
print(f"Úloha 2: Inflexní rudý posuv z_acc = {z_acc:.3f}")
```

Úloha 3: Horizont částic v plochem vesmíru

Zadání: Spočítejte současný poloměr částicového horizontu (fyzikální rozměr dnes pozorovatelného vesmíru) pro plochý model Λ CDM s $\Omega_m = 0,315$ a $H_0 = 67,4 \text{ km/s/Mpc}$. **Řešení:** Komovující částicový horizont je dán integrálem:

$$\chi_p(t_0) = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{c}{H_0} \int_0^1 \frac{da}{a^2 \sqrt{\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda}} = \frac{c}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}$$

Protože dnes $a(t_0) = 1$, fyzikální poloměr $R_p = \chi_p$.

Numerický výpočet: Numerická integrace dává hodnotu bezrozměrného integrálu $I \approx 3,209$:

$$R_p = \frac{c}{H_0} \cdot 3,209 \approx 4448 \text{ Mpc} \cdot 3,209 \approx 14,27 \text{ Gpc} \approx 46,5 \text{ miliard světelných let}$$

```
from scipy.integrate import quad

integrand = lambda z: 1.0 / np.sqrt(0.315 * (1.0 + z)**3 + 0.685)
I, _ = quad(integrand, 0, np.inf)
c_kms = 299792.458
R_p_Gpc = (c_kms / H0 * I) / 1e3
print(f"Úloha 3: Horizont částic R_p = {R_p_Gpc:.2f} Gpc ({R_p_Gpc*3.26156:.1f} Gly)")
```

Úloha 4: Úhlový rozměr a minimum úhlové vzdálenosti

Zadání: Mějme galaxii o pevném fyzikálním průměru $D = 30 \text{ kpc}$. Spočítejte její pozorovaný úhlový rozměr θ [obloukových vteřin] při rudém posuvu $z = 0,1$, $z = 1,6$ a $z = 4,0$. **Řešení:** Úhlový rozměr je $\theta = D/D_A(z)$, kde $D_A(z) = D_C(z)/(1+z)$. Pro model Planck 2018:

- Při $z = 0,1$: $D_C \approx 433 \text{ Mpc} \implies D_A \approx 394 \text{ Mpc}$.

$$\theta = \frac{0,030 \text{ Mpc}}{394 \text{ Mpc}} \approx 7,61 \times 10^{-5} \text{ rad} \approx 15,7''$$

- Při $z = 1,6$ (maximum D_A): $D_C \approx 4680 \text{ Mpc} \implies D_A \approx 1800 \text{ Mpc}$.

$$\theta = \frac{0,030 \text{ Mpc}}{1800 \text{ Mpc}} \approx 1,67 \times 10^{-5} \text{ rad} \approx 3,44''$$

- Při $z = 4,0$: $D_C \approx 7400 \text{ Mpc} \implies D_A \approx 1480 \text{ Mpc}$.

$$\theta = \frac{0,030 \text{ Mpc}}{1480 \text{ Mpc}} \approx 2,03 \times 10^{-5} \text{ rad} \approx 4,18''$$

Galaxie při $z = 4,0$ se na obloze jeví větší než identická galaxie při $z = 1,6$.

Úloha 5: Tolmanův test povrchové jasnosti

Zadání: Dokažte, jak závisí bolometrická plošná jasnost astronomického zdroje (povrchová jasnost $I \equiv F/\Delta\Omega$) na rudém posuvu z v expandujícím vesmíru (tzv. Tolmanův test). **Řešení:** Bolometrický zářivý tok ze zdroje o zářivosti L je $F = L/(4\pi D_L^2)$. Pozorovaný prostorový úhel zdroje o ploše A je $\Delta\Omega = A/D_A^2$. Plošná jasnost je tedy:

$$I = \frac{F}{\Delta\Omega} = \frac{L/(4\pi D_L^2)}{A/D_A^2} = \frac{L}{4\pi A} \left(\frac{D_A}{D_L} \right)^2$$

Z Etheringtonova teorému reciprocity platí $D_L = (1+z)^2 D_A \implies \frac{D_A}{D_L} = (1+z)^{-2}$. Dosazením obdržíme:

$$I(z) = I_0(1+z)^{-4}$$

Plošná jasnost klesá s dramatickou čtvrtou mocninou $(1+z)^4$. V neexpandujícím statickém vesmíru s unaveným světlem (tired light) by klesala pouze jako $(1+z)^{-1}$. Pozorování galaxií ve vysokých z potvrdila pokles $(1+z)^{-4}$ a vyvrátila modely unaveného světla.

Úloha 6: Teplota reliktního záření v čase rekombinace

Zadání: Zjistěte teplotu CMB v epoše rekombinace ($z_* = 1090$) a maximální vlnovou délku $\lambda_{\max}$ Planckova vyzařování, víte-li, že dnešní teplota činí $T_0 = 2,7255$ K. **Řešení:** Protože vlnové délky všech fotonů se natahují úměrně s expanzním faktorem ($\lambda \propto a = (1+z)^{-1}$), frekvence klesá jako $\nu \propto (1+z)$. Z invariance Planckova rozdělení plyne:

$$T(z) = T_0(1+z)$$

Pro $z_* = 1090$:

$$T(z_*) = 2,7255 \text{ K} \cdot (1 + 1090) = 2,7255 \cdot 1091 \approx 2973,5 \text{ K}$$

Z Wienova posunovacího zákona ($\lambda_{\max} T = b$, kde $b \approx 2,8978 \times 10^{-3} \text{ m K}$):

$$\lambda_{\max} = \frac{2,8978 \times 10^{-3} \text{ m K}}{2973,5 \text{ K}} \approx 9,745 \times 10^{-7} \text{ m} = 974,5 \text{ nm}$$

Záření bylo emitováno v blízkém infračerveném oboru s červenavě žlutým viditelným odstínem.

Úloha 7: Freeze-out poměr neutronů k protonům

Zadání: Za předpokladu, že slabé interakce zamrzají při $k_B T_{\text{freeze}} = 0,80 \text{ MeV}$, spočítejte rovnovážný poměr číselných hustot n_n/n_p . Rozdíl hmotností neutronu a protonu je $\Delta mc^2 = 1,293 \text{ MeV}$.

Řešení: V termodynamické rovnováze je poměr dán Boltzmannovým faktorem:

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \exp\left(-\frac{\Delta mc^2}{k_B T_{\text{freeze}}}\right) = \exp\left(-\frac{1,293 \text{ MeV}}{0,80 \text{ MeV}}\right) = \exp(-1,61625) \approx 0,1986 \approx \frac{1}{5,03}$$

Při zahrnutí přesnějších korekcí na Coulombův rozptyl a zahřívání plazmatu klesá hodnota na $n/p \approx 1/6 \approx 0,167$.

Úloha 8: Hmotnostní podíl helia-4 s rozpadem neutronů

Zadání: Poměr (n/p) při freeze-outu byl $1/6$. BBN začala po prodlevě $\Delta t = 240$ s v důsledku deuteriového hrdla. Poločas rozpadu neutronu je $\tau_n = 879,4$ s. Spočtete finální podíl Y_p . **Řešení:** Během prodlevy Δt poklesne počet neutronů volným beta-rozpadem:

$$n_n(\Delta t) = n_{n,0} e^{-\Delta t/\tau_n}$$

Každý rozpadlý neutron vytvoří proton: $n_p(\Delta t) = n_{p,0} + n_{n,0}(1 - e^{-\Delta t/\tau_n})$. Faktor rozpadu:

$$e^{-240/879,4} = e^{-0,2729} \approx 0,7612$$

Nový poměr:

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{BBN}} = \frac{(1/6) \cdot 0,7612}{1 + (1/6) \cdot (1 - 0,7612)} = \frac{0,12687}{1 + 0,0398} = \frac{0,12687}{1,0398} \approx 0,1220 \approx \frac{1}{8,2}$$

Hmotnostní podíl helia-4:

$$Y_p = \frac{2(n/p)_{\text{BBN}}}{1 + (n/p)_{\text{BBN}}} = \frac{2 \cdot 0,1220}{1 + 0,1220} = \frac{0,2440}{1,1220} \approx 0,2175$$

Při započtení přesné kinetické reakční sítě dosahuje $Y_p = 0,245$.

Úloha 9: Sahaova rovnice a teplota rekombinace

Zadání: Pomocí Sahaovy rovnice odhadněte teplotu, při které stupeň ionizace vodíku klesl na $x_e = 0,5$. Baryonová hustota je určena poměrem $\eta_b = 6 \times 10^{-10}$. **Řešení:** Sahaova rovnice pro

$$x_e = 0,5 \implies \frac{x_e^2}{1-x_e} = \frac{0,25}{0,5} = 0,5:$$

$$\frac{0,5}{n_b} = \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\epsilon_0/k_B T}$$

Číselná hustota baryonů je $n_b = \eta_b n_\gamma = \eta_b \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3$. Dosazením a transcendentním řešením pro $\epsilon_0 = 13,6$ eV získáváme:

$$k_B T_{\text{rec}} \approx 0,32 \text{ eV} \implies T_{\text{rec}} \approx 3700 \text{ K}$$

Díky nerovnovážnému Peeblesovu zpoždění nastává reálná rekombinace při $T \approx 3000$ K.

Úloha 10: Jeansova hmotnost před a po rekombinaci

Zadání: Spočítejte poměr Jeansovy hmotnosti baryonů těsně před rekombinací ($c_{s1} \approx c/\sqrt{3}$) a těsně po rekombinaci ($T_2 \approx 3000$ K, $c_{s2} = \sqrt{5k_B T/3m_p}$). **Řešení:** Jeansova hmotnost je $M_J \propto c_s^3/\rho^{1/2}$. Protože hustota ρ se při rekombinaci skokově nemění:

$$\frac{M_{J,\text{před}}}{M_{J,\text{po}}} = \left(\frac{c_{s1}}{c_{s2}} \right)^3$$

Rychlost zvuku před rekombinací: $c_{s1} \approx 3 \times 10^8 / \sqrt{3} \approx 1,73 \times 10^8$ m/s. Rychlost zvuku po rekombinaci:

$$c_{s2} = \sqrt{\frac{5 \cdot 1,38 \times 10^{-23} \cdot 3000}{3 \cdot 1,67 \times 10^{-27}}} = \sqrt{\frac{2,07 \times 10^{-19}}{5,01 \times 10^{-27}}} = \sqrt{4,13 \times 10^7} \approx 6427 \text{ m/s} \approx 6,4 \text{ km/s}$$

Poměr rychlostí zvuku:

$$\frac{c_{s1}}{c_{s2}} = \frac{1,73 \times 10^8}{6427} \approx 26\,900$$

Poměr Jeansových hmotností:

$$\frac{M_{J,\text{před}}}{M_{J,\text{po}}} \approx (26\,900)^3 \approx 1,95 \times 10^{13}$$

Jeansova hmotnost padá o více než 13 řádů, $z \sim 10^{17} M_\odot$ na $\sim 10^4 - 10^5 M_\odot$.

Úloha 11: Einsteinův poloměr v kupě galaxií

Zadání: Kupa galaxií o celkové hmotnosti $M = 10^{15} M_\odot$ leží při úhlové vzdálenosti $D_l = 1000$ Mpc. Zdroj (galaktický oblouk) leží v $D_s = 2000$ Mpc a $D_{ls} = 1200$ Mpc. Určete Einsteinův poloměr θ_E v obloukových vteřinách. **Řešení:** Einsteinův poloměr:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_l D_s}}$$

Gravitační poloměr: $r_g = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \cdot 10^{15} \cdot 1,989 \times 10^{30}}{(3 \times 10^8)^2} \approx 2,95 \times 10^{18} \text{ m} \approx 95,6 \text{ pc}$.

$$\theta_E^2 = \frac{2r_g D_{ls}}{D_l D_s} = \frac{2 \cdot 95,6 \text{ pc} \cdot 1200 \text{ Mpc}}{1000 \text{ Mpc} \cdot 2000 \text{ Mpc}} = \frac{229\,440 \text{ pc}}{2 \times 10^6 \text{ Mpc}} = 1,147 \times 10^{-7} \text{ rad}^2$$

$$\theta_E = \sqrt{1,147 \times 10^{-7}} \approx 3,387 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

V obloukových vteřinách:

$$\theta_E = 3,387 \times 10^{-4} \cdot \frac{180 \cdot 3600}{\pi} \approx 69,9'' \approx 70''$$

Úloha 12: Časové zpoždění gravitační čočky a stanovení H_0

Zadání: Dva obrazy gravitačně čočkováného kvazaru vykazují časovou prodlevu $\Delta t = 25,0$ dne. Z modelování gravitačního potenciálu čočky známe geometrický člen Fermatova potenciálu $\Delta\phi = 0,15 \text{ rad}^2$. Určete časově-zpožďovací vzdálenost $D_{\Delta t}$ a hodnotu H_0 . **Řešení:** Časové zpoždění je dáno vzorcem:

$$\Delta t = \frac{D_{\Delta t}}{c} \Delta\phi \implies D_{\Delta t} = \frac{c \Delta t}{\Delta\phi}$$

$$\Delta t = 25 \cdot 86\,400 \text{ s} = 2,16 \times 10^6 \text{ s}.$$

$$D_{\Delta t} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s} \cdot 2,16 \times 10^6 \text{ s}}{0,15} = 4,32 \times 10^{15} \text{ m} \approx 4320 \text{ Mpc}$$

Protože $D_{\Delta t} \propto c/H_0$, porovnáním s bezrozměrnou integrální funkcí modelu lze přímo určit $H_0 \approx 72 \text{ km/s/Mpc}$.

Úloha 13: Úhlový rozměr akustického píku BAO

Zadání: Zvukový horizont při drag epoše činí $r_d = 147,5 \text{ Mpc}$. Spočtete úhlový rozměr $\Delta\theta_{\text{BAO}}$ na obloze pro přehlídku galaxií při středním rudém posuvu $z = 0,5$, je-li úhlová komovující vzdálenost $D_M(z = 0,5) = 1950 \text{ Mpc}$. **Řešení:** V příčném směru je úhlový rozměr dán vztahem:

$$\Delta\theta_{\text{BAO}} = \frac{r_d}{D_M(z)} = \frac{147,5 \text{ Mpc}}{1950 \text{ Mpc}} \approx 0,07564 \text{ rad}$$

Ve stupních:

$$\Delta\theta_{\text{BAO}} = 0,07564 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 4,33^\circ$$

Při $z = 0,5$ má charakteristický BAO prstenec na obloze průměr přibližně $8,7^\circ$ (zhruba sedmnáctinásobek úhlového průměru Měsíce v úplňku).

Úloha 14: E-folding inflace v kvadratickém potenciálu

Zadání: Uvažujme chaotickou inflaci s potenciálem $V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$. Spočtete hodnotu pole ϕ_{end} , při které inflace končí ($\epsilon = 1$), a počáteční hodnotu pole ϕ_N nutnou pro $N = 60$ e-foldů. Určete předpovídanou hodnotu spektrálního indexu n_s a tenzorového poměru r . **Řešení:** Derivace potenciálu: $V'(\phi) = m^2 \phi$, $V''(\phi) = m^2$. Parametry pomalého valení:

$$\epsilon = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{m^2 \phi}{\frac{1}{2} m^2 \phi^2} \right)^2 = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{2}{\phi} \right)^2 = \frac{2 M_{\text{Pl}}^2}{\phi^2}$$

$$\eta = M_{\text{Pl}}^2 \frac{m^2}{\frac{1}{2}m^2\phi^2} = \frac{2M_{\text{Pl}}^2}{\phi^2} = \epsilon$$

Konec inflace nastává pro $\epsilon = 1$:

$$\frac{2M_{\text{Pl}}^2}{\phi_{\text{end}}^2} = 1 \implies \phi_{\text{end}} = \sqrt{2}M_{\text{Pl}} \approx 1,414M_{\text{Pl}}$$

Počet e-foldů:

$$N = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_N} \frac{V}{V'} d\phi = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_N} \frac{\phi}{2} d\phi = \frac{\phi_N^2 - \phi_{\text{end}}^2}{4M_{\text{Pl}}^2}$$

Pro $N = 60$:

$$\phi_N^2 = 4NM_{\text{Pl}}^2 + \phi_{\text{end}}^2 = (4 \cdot 60 + 2)M_{\text{Pl}}^2 = 242M_{\text{Pl}}^2 \implies \phi_{60} = \sqrt{242}M_{\text{Pl}} \approx 15,56M_{\text{Pl}}$$

Předpovědi pro pozorovací veličiny:

$$\epsilon_{60} = \frac{2}{242} = \frac{1}{121} \approx 0,00826$$

$$n_s = 1 + 2\eta - 6\epsilon = 1 - 4\epsilon_{60} = 1 - \frac{4}{121} \approx 1 - 0,0331 = 0,9669$$

$$r = 16\epsilon_{60} = \frac{16}{121} \approx 0,132$$

Předpověď $r \approx 0,13$ je v ostrém rozporu se současným limitem BICEP/Planck ($r < 0,036$), což tento jednoduchý kvadratický model experimentálně vylučuje.

Úloha 15: CPL temná energie a osud vesmíru

Zadání: Uvažujme model temné energie s CPL stavovou rovnicí $w(a) = w_0 + w_a(1 - a)$. Analyzujte budoucí asymptotický vývoj expanze pro $a \rightarrow \infty$ pro případ: a) $w_0 = -0,9$, $w_a = -0,3$, b)

$w_0 = -1,1$, $w_a = -0,2$. **Řešení:** V CPL parametrizaci je hustota temné energie:

$$\rho_{\text{DE}}(a) = \rho_{\text{DE},0} a^{-3(1+w_0+w_a)} \exp(-3w_a(1-a)) = \rho_{\text{DE},0} e^{-3w_a} a^{-3(1+w_0+w_a)} e^{3w_a a}$$

Pro $a \rightarrow \infty$ dominuje exponenciální člen $\exp(3w_a a)$:

- **Případ a)** ($w_a = -0,3 < 0$): Exponenciála klesá k nule: $\exp(3 \cdot (-0,3)a) = \exp(-0,9a) \rightarrow 0$. Hustota temné energie v budoucnu zcela vyprchá ($\rho_{\text{DE}} \rightarrow 0$). Zrychlená expanze ustane a vesmír přejde do zpomalené expanze řízené zbytkovou hmotou.
- **Případ b)** ($w_0 = -1,1 < -1$, $w_a = -0,2$): Ačkoliv je w_0 fantomové, $w_a < 0$ opět vede k asymptotickému potlačení pro velké a . Pokud by však $w_a > 0$ nebo konstantní $w < -1$, pak by $\rho_{\text{DE}} \rightarrow \infty$, což by vedlo k divergenci expanzního zrychlení $\ddot{a} \rightarrow \infty$ a destrukci prostoročasu ve Velkém rozervání (Big Rip) v konečném kosmickém čase:

$$t_{\text{rip}} - t_0 \approx \frac{2}{3|1+w|H_0\sqrt{\Omega_{\text{DE}}}}$$

Dodatek D: Encyklopedický glosář fyzikální kosmologie

Tento glosář přináší ucelený soupis klíčových pojmů, rovnic, fyzikálních konstant a pozorovacích veličin moderní fyzikální kosmologie.

Akustický horizont (Sound horizon)

Maximální komovující vzdálenost, kterou mohla zvuková vlna urazit v baryon-fotonovém plazmatu od počátku vesmíru do okamžiku zamrznutí baryonů (drag epocha, $z_d \approx 1060$):

$$r_d = \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz \approx 147,1 \text{ Mpc}$$

Představuje základní standardní pravítko pro baryonové akustické oscilace (BAO).

Alcockův–Paczyňského test

Geometrický test kosmologického modelu navržený v roce 1979. Využívá skutečnosti, že sféricky symetrické objekty nebo izotropní statistické korelace (jako BAO) se při přepočtu úhlů a rudých posuvů jeví deformované do elipsoidu, pokud je předpokládán nesprávný kosmologický model. Parametr deformace je $F_{AP}(z) \equiv D_M(z)H(z)/c$.

Baryonová asymetrie vesmíru (Baryogenesis)

Pozorovaný fundamentální přebytek hmoty nad antihmotou ve vesmíru vyjádřený poměrem baryonů k fotonům $\eta_b \equiv n_b/n_\gamma \approx 6 \times 10^{-10}$. Podle Sacharovových podmínek (1967) vyžaduje vznik asymetrie porušení baryonového čísla, porušení symetrií C a CP a existenci procesů mimo termodynamickou rovnováhu.

Baryonové akustické oscilace (BAO)

Pravidelné periodické fluktuace v prostorové distribuci baryonů (a následně galaxií) způsobené akustickými vlnami v raném plazmatu před rekombinací. V korelační funkci galaxií $\xi(s)$ se projevují jako izolovaný pík při komovující vzdálenosti $s \approx 100 h^{-1} \text{ Mpc}$.

B-módy polarizace (B-modes)

Zkrutová (divergenceless) složka polarizačního pole reliktního záření s lichou prostorovou paritou. Primordiální B-módy na velkých úhlových škálách ($\ell < 100$) mohou být generovány výhradně tenzorovými perturbacemi (gravitačními vlnami z kosmické inflace). Na malých škálách vznikají sekundárně čochkováním E-módů.

Chandrasekharova mez

Maximální teoretická hmotnost nerotujícího bílého trpaslíka podporovaného tlakem degenerovaného elektronového plynu:

$$M_{\text{Ch}} \approx 1,44 M_{\odot}$$

Překročení této meze akrecí v binárním systému vede k termonukleárnímu kolapsu a vzniku supernovy typu Ia.

Chladná temná hmota (Cold Dark Matter, CDM)

Hypotetická forma neznámé hmoty tvořící přibližně 26,5 % celkové hustoty vesmíru. Přívlastek *chladná* značí, že částice byly v epoše rovnosti hmoty a záření nerelativistické ($v \ll c$), což umožnilo hierarchický růst struktur od malých hal k velkým kupám (bottom-up scénář).

Christoffelovy symboly

Koeficienty afinní konexe $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ popisující zakřivení a paralelní přenos vektorů v pseudoriemannovském prostoročasu. Jsou přímo odvozeny z prvních derivací metrického tenzoru $g_{\mu\nu}$.

CPL parametrizace

Dvouparametrická fenomenologická reprezentace proměnné stavové rovnice temné energie navržená Chevallierem, Polarskim (2001) a Linderem (2003):

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a) = w_0 + w_a \frac{z}{1 + z}$$

Částicový horizont (Particle horizon)

Maximální komovující vzdálenost, ze které mohl světelný signál dorazit k pozorovateli od počátku vesmíru ($t = 0$):

$$\chi_p(t) = \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')}$$

Definuje hranici dnes kauzálně pozorovatelného vesmíru ($R_p \approx 46,5$ miliard světelných let).

Čas zpětného pohledu (Lookback time)

Doba, kterou světlo vyslané objektem při rudém posuvu z potřebovalo k dosažení pozorovatele v současném čase t_0 :

$$t_{\text{lookback}}(z) = t_0 - t(z) = \int_0^z \frac{dz'}{(1 + z')H(z')}$$

Časově-zpožd'ovací kosmografie

Metoda měření Hubbleovy konstanty H_0 založená na silném gravitačním čočkování proměnných zdrojů (kvazarů, supernov). Relativní časová prodleva Δt_{ij} mezi násobnými obrazy přímo určuje časově-zpožd'ovací vzdálenost $D_{\Delta t} \propto H_0^{-1}$.

Deuteriové úzké hrdlo (Deuterium bottleneck)

Fyzikální jev během primordiální nukleosyntézy (BBN). Ačkoliv byla vazbová energie deuteria $B_D = 2,22$ MeV vyšší než teplota plazmatu ($T \sim 1$ MeV), obrovský přebytek fotonů nad baryony ($\eta_b \sim 10^{-9}$) bránil akumulaci deuteria až do poklesu teploty na $T \approx 0,08$ MeV ($t \approx 200 - 300$ s).

E-folding (Počet e-foldů)

Bezrozměrná míra nafouknutí vesmíru během kosmické inflace definovaná jako přirozený logaritmus poměru expanzních faktorů:

$$N \equiv \ln \left(\frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{init}}} \right)$$

K vyřešení problému horizontu a plochosti je vyžadováno $N \gtrsim 50 - 60$.

Einsteinův tenzor

Symetrický tenzor druhého řádu $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ vystupující na levé straně Einsteinových rovnic gravitačního pole. Z Bianchiho identit automaticky splňuje $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$.

Einsteinův poloměr

Charakteristický úhlový poloměr symetrického prstence vznikajícího při dokonalém osovém zarovnání pozorovatele, gravitační čočky a zdroje:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_l D_s}}$$

E-módy polarizace (E-modes)

Gradientová složka lineární polarizace CMB se sudou paritou generovaná Thomsonovým rozptylem na primordiálních skalárních (hustotních) perturbacích.

Etheringtonův teorém reciprocity

Univerzální geometrický vztah spojující zářivou vzdálenost D_L a úhlovou vzdálenost D_A v libovolném prostoročasu se zachováním počtu fotonů:

$$D_L(z) = (1+z)^2 D_A(z)$$

FLRW metrika

Exaktní řešení Einsteinových rovnic pro homogenní a izotropní prostoročas:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

kde $k \in \{-1, 0, +1\}$ značí prostorové zakřivení.

Freeze-out (Zamrznutí interakcí)

Okamžik v termální historii expandujícího vesmíru, kdy rychlost srážek či reakcí částic $\Gamma = n\langle\sigma v\rangle$ poklesne pod rychlost expanze prostoru danou Hubbleovým parametrem H . V tomto bodě částice opouštějí termodynamickou rovnováhu a jejich počet v komovujícím objemu zamrzá.

Friedmannovy rovnice

Základní diferenciální rovnice kosmologické dynamiky odvozené z Einsteinových rovnic pole pro FLRW metriku:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Gravitační čočkování

Ohyb světelných paprsků v gravitačním poli hmotných těles. Dělí se na silné čočkování (vznik násobných obrazů a Einsteinových oblouků při konvergenci $\kappa \geq 1$), slabé čočkování (koherentní statistická deformace elipticit pozadí) a mikročočkování (časové zjasnění hvězd při průchodu kompaktního tělesa).

Harrisonovo–Zeldovičovo spektrum

Teoretické primordiální spektrum poruch hustoty, které je striktně škálově invariantní ($n_s = 1$). Experimentální data mise Planck toto spektrum vyloučila ve prospěch red-tilted spektra ($n_s \approx 0,965$).

Horizont událostí (Event horizon)

Maximální komovující vzdálenost, kterou může světelný signál vyslaný v čase t urazit v nekonečném budoucím čase ($t \rightarrow \infty$):

$$\chi_e(t) = \int_t^\infty \frac{c dt'}{a(t')}$$

Vesmíry se zrychlenou expanzí mají konečný kosmologický horizont událostí.

Hubbleova konstanta (H_0)

Současná hodnota expanzní rychlosti vesmíru měřená v jednotkách $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$. Představuje rychlost vzdalování galaxií ve vzdálenosti jednoho megaparseku.

Hubbleovo napětí (H_0 tension)

Statisticky signifikantní rozpor ($> 5\sigma$) mezi přímým lokálním měřením expanzní rychlosti týmem SHOES ($H_0 \approx 73,0 \text{ km/s/Mpc}$) a predikcí standardního modelu ΛCDM fitovaného na anizotropie CMB misí Planck ($H_0 \approx 67,4 \text{ km/s/Mpc}$).

Hustotní parametr (Ω)

Bezrozměrný poměr skutečné hustoty energie dané složky k současné kritické hustotě vesmíru:

$$\Omega_i \equiv \rho_i / \rho_{\text{crit}}.$$

Inflaton

Hypotetické skalární pole $\phi(t)$ s potenciálem $V(\phi)$, jehož vakuová potenciální energie poháněla kvazi-exponenciální kosmickou inflaci v raném vesmíru.

Integrovaný Sachsův–Wolfeův jev (ISW)

Změna energie fotonů CMB způsobená průchodem časově proměnnými gravitačními potenciálovými jámami ($\dot{\Phi} \neq 0$). Pozdní ISW jev je přímým důkazem vlivu temné energie při $z < 1$.

Jeansova hmotnost (M_J)

Minimální hmotnost plynného oblaku nutná k tomu, aby gravitační přitažlivost převážila nad hydrostatickým tlakem a došlo ke gravitačnímu kolapsu:

$$M_J = \frac{\pi^{5/2}}{6G^{3/2}} \frac{c_s^3}{\bar{\rho}^{1/2}}$$

Kosmologický princip

Základní postulát moderní kosmologie tvrdící, že vesmír je na dostatečně velkých prostorových škálách ($> 100 \text{ Mpc}$) prostorově homogenní (všechna místa jsou rovnocenná) a izotropní (žádný směr není preferovaný).

Kritická hustota (ρ_{crit})

Průměrná hustota energie nutná k tomu, aby byl vesmír prostorově plochý ($k = 0$):

$$\rho_{\text{crit}}(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

Současná hodnota činí $\rho_{\text{crit},0} \approx 8,5 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$.

Kvintesence (Quintessence)

Model dynamické temné energie založený na pomalu se vyvíjejícím reálném skalárním poli se stavovou rovnicí $-1 \leq w_Q \leq 1$.

Landyho–Szalayův estimátor

Minimálně-rozptylový statistický estimátor dvojbodové prostorové korelační funkce galaxií eliminující systematické chyby z okrajů zorného pole:

$$\hat{\xi}(s) = \frac{DD(s) - 2DR(s) + RR(s)}{RR(s)}$$

Mészárosův jev

Logaritmické potlačení gravitačního růstu poruch chladné temné hmoty na subhorizontových škálách v epoše dominance záření ($\delta \propto \ln a$).

Modul vzdálenosti (μ)

Rozdíl mezi zdánlivou (m) a absolutní (M) magnitudou definovaný prostřednictvím zářivé vzdálenosti D_L :

$$\mu \equiv m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L}{10 \text{ pc}} \right)$$

NFW profil

Univerzální profil radiální hustoty halo temné hmoty odvozený Navarrem, Frenkem a Whitem:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2}$$

Peeblesův model rekombinace

Nerovnovážný tříhladinový kinetický model zachytu elektronů na protony zohledňující zpoždění způsobené optickou tloušťkou čáry Lyman- α a zakázaným dvoufotonovým přechodem $2s \rightarrow 1s$.

Prvotní nukleosyntéza (BBN)

Syntéza nejlehčích chemických prvků (^4He , D , ^3He , ^7Li) v prvních třech minutách po velkém třesku při teplotách $T \sim 0,8 - 0,08 \text{ MeV}$.

Rekombinace

Epocha v historii vesmíru ($z \approx 1100$, $t \approx 380\,000 \text{ let}$), kdy teplota plazmatu klesla pod 3000 K , což umožnilo vznik stabilních neutrálních atomů vodíku a uvolnění reliktního záření.

Reliktní mikrovlnné záření (CMB)

Záření černého tělesa o současné teplotě $T_0 = 2,7255 \pm 0,0006$ K vyplňující izotropně celý vesmír, které představuje pozůstatek horkého raného vesmíru uvolněný při rekombinaci.

Ricciho tenzor a skalár

Tenzor $R_{\mu\nu}$ a skalár $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ vznikající kontrakcí čtyřindexového Riemannova tenzoru křivosti. Popisují změnu objemu geodetických koulí v zakřiveném prostoročasu.

Sachsův–Wolfeův jev

Primární mechanismus vzniku velkoúhlových teplotních anizotropií CMB způsobený gravitačním rudým posuvem fotonů unikajících z primordiálních gravitačních potenciálových jam:

$$\Delta T/T = \frac{1}{3} \Phi/c^2.$$

Sahaova ionizační rovnice

Termodynamická rovnice popisující rovnovážný stupeň ionizace plynu v závislosti na teplotě, hustotě a ionizačním potenciálu za předpokladu dokonalé lokální statistické rovnováhy.

Sféra posledního rozptylu (Last Scattering Surface, LSS)

Úzká prostoročasová slupka při rudém posuvu $z_* \approx 1090$, v níž fotony CMB naposledy podlehl Thomsonovu rozptylu na volných elektronech.

Silkův damping (Difúzní tlumení)

Exponenciální potlačení teplotních anizotropií CMB a fluktuací hustoty na malých prostorových škálách ($\ell \gtrsim 1000$) způsobené difúzí fotonů a konečnou střední volnou dráhou během rekombinace.

Skalární spektrální index (n_s)

Parametr charakterizující sklon primordiálního výkonového spektra skalárních perturbací: $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \propto k^{n_s-1}$. Hodnota $n_s < 1$ značí mírný pokles amplitudy na malých škálách (tzv. red tilt).

Standardní pravítko

Astronomický objekt nebo fyzikální struktura o přesně známém fyzikálním rozměru (např. zvukový horizont r_d), jehož pozorovaný úhlový rozměr $\Delta\theta$ přímo určuje úhlovou vzdálenost D_A .

Standardní siréna

Kompaktní binární systém vyzařující gravitační vlny (např. splynutí dvou neutronových hvězd), jehož tvar signálu umožňuje přímé určení absolutní zářivé vzdálenosti D_L bez použití žebříku vzdáleností.

Standardní svíčka

Astronomický zdroj o známém vnitřním zářivém výkonu L (např. supernovy typu Ia nebo cefeidy), jehož naměřený zářivý tok F přímo určuje zářivou vzdálenost $D_L = \sqrt{L/4\pi F}$.

Škála S_8 napětí

Statistický nesoulad ($2 - 3\sigma$) mezi amplitudou shlukování hmoty $S_8 \equiv \sigma_8 \sqrt{\Omega_m/0,3}$ měřenou přehlídkami slabého gravitačního čočkování v pozdním vesmíru ($S_8 \approx 0,77$) a vyšší teoretickou hodnotou predikovanou misí Planck z raného vesmíru ($S_8 \approx 0,83$).

Temná energie

Záhadná složka vesmíru se záporným tlakem tvořící přibližně 68,5 % celkové hustoty energie, která způsobuje současnou zrychlenou expanzi prostoročasu.

Thomsonův rozptyl

Elastický rozptyl nízkoenergetických fotonů na volných nabitých částicích (především elektronech) s účinným průřezem $\sigma_T \approx 6,652 \times 10^{-29} \text{ m}^2$.

Úhlová vzdálenost (D_A)

Vzdálenost definovaná poměrem fyzikálního rozměru objektu k jeho pozorovanému úhlovému rozměru: $D_A = \Delta\ell/\Delta\theta$. V plochem vesmíru platí $D_A = D_C/(1+z)$.

Viriálový teorém

Statistický zákon pro gravitačně vázané systémy v rovnováze svazující střední kinetickou energii K a potenciální energii U :

$$2\langle K \rangle + \langle U \rangle = 0$$

Výkonové spektrum hmoty ($P(k)$)

Statistická míra prostorových fluktuací hustoty hmoty ve Fourierově prostoru definovaná jako

$$\langle \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* \rangle = (2\pi)^3 P(k) \delta_D(\vec{k} - \vec{k}').$$

Zářivá vzdálenost (D_L)

Vzdálenost odvozená ze zákona inverzních čtverců pro naměřený zářivý tok: $D_L = \sqrt{L/4\pi F}$. V expandujícím vesmíru platí $D_L = (1+z)D_C = (1+z)^2 D_A$.

Zrychlená expanze vesmíru

Stav, kdy druhá časová derivace expanzního faktoru je kladná ($\ddot{a} > 0$), což nastává při dominanci substance se záporným tlakem splňujícím $w < -1/3$.