

Astronomická optika a konstrukce observatoří

Teorie optických aberací, adaptivní optika a interferometrie

AUTOR

David Pěkník

OBSAH

Úvod a předmluva: Světlo jako posel z hlubin vesmíru	4
--	---

ČÁST I: GEOMETRICKÁ OPTIKA A ABERACE

Kapitola 1	Fermatův princip a paraxiální optika	8
1.1	Fermatův princip a variační formulace optiky	8
1.2	Paraxiální aproximace a maticový formalismus	9
1.4	Lagrangeův-Helmholtzův invariant a zachování etendue	11
Kapitola 2	Teorie aberací 3. řádu podle Seidela	15
2.1	Eikonál a vlnová aberace	15
2.2	Pět primárních Seidelových aberací	16
2.3	Chromatické aberace centrovaných refrakčních soustav	17
Kapitola 3	Zernikeovy polynomy a analýza vlnoplochy	21
3.1	Ortogonalní báze na jednotkovém disku	21
3.2	Nollův indexační systém a klasifikace optických módů	22
3.3	Rozptyl vlnoplochy a Maréchalova aproximace Strehlova čísla	23
3.4	Vědecký simulační kód v Pythonu: Zernikeova syntéza a Strehl	24

ČÁST II: ZRCADLOVÉ A KATADIOPTRICKÉ SOUSTAVY

Kapitola 4	Dvozcadlové teleskopy Cassegrain, Ritchey-Chrétien, Dall-Kirkham	28
4.1	Matematika rotačních kuželosečkových ploch	28
4.2	Paraxiální geometrie dvoucadlových soustav	29
4.3	Srovnávací analýza klasických konfigurací	29
4.4	Vědecký simulační kód v Pythonu: Návrh teleskopu Ritchey-Chrétien	31
Kapitola 5	Třizrcadlové anastigmaty TMA pro velkoúhlé přehlídky LSST a Roman	34
5.2	Architektura Korschova a Paul-Bakerova systému	34
5.3	Simonyi Survey Telescope (LSST) a etendue	35
Kapitola 6	Katadioptrické systémy Schmidt, Maksutov, Klevcov	38
6.2	Schmidtova komora a Schmidt-Cassegrain (SCT)	38
6.3	Maksutovova soustava a Klevcovův systém	39

ČÁST III: ATMOSFÉRA, DIFRAKCE A VLNOVÁ OPTIKA

Kapitola 7	Difrakční limit a Airyho disk	45
7.2	Odvození profilu Airyho disku pomocí Besselových funkcí	45
7.5	Vliv centrálního stínění a difrakčních ramen pavouka	48
Kapitola 8	Kolmogorovův model turbulence a Friedův parametr r_0	50
8.2	Fluktuace indexu lomu a Friedův koherentní parametr r_0	50
8.4	Časové a úhlové koherentní škály: τ_0 a θ_0	52
Kapitola 9	Speckle interferometrie a Lucky Imaging	57
9.2	Labeyrieho speckle interferometrie	58
9.3	Technika šťastného zobrazování a algoritmus Shift-and-Add	59

ČÁST IV: ADAPTIVNÍ OPTIKA A INTERFEROMETRIE

Kapitola 10	Adaptivní optika: senzory, zrcadla a laserové hvězdy	63
10.2	Shack-Hartmannův senzor a deformovatelná zrcadla	64
10.5	Laserové vodící hvězdy (LGS) a tomografické AO systémy	65
Kapitola 11	Optická a infračervená interferometrie	70
11.2	Van Cittert-Zernikeův teorém a viditelnost proužků	70
11.4	Rovina (u, v), uzávěrová fáze, VLT a CHARA Array	72

ČÁST V: PŘÍLOHY A VÝPOČETNÍ ZÁZEMÍ

Dodatek A	Odvození Seidelových koeficientů	78
------------------	---	-----------

Dodatek B	Optické simulace v Pythonu (POPPY a Ray-tracing)	82
Dodatek C	Sbírka 15 řešených úloh z astronomické optiky	88
Dodatek D	Encyklopedický glosář astronomické optiky	99

Úvod a předmluva: Architektura astronomických teleskopů

 ZAJÍMAVOST

Předmluva autora Astronomická optika představuje syntézu fundamentální teoretické fyziky, vlnové a geometrické optiky, precizního strojírenství, materiálového inženýrství a moderní výpočetní techniky. Cílem této monografie je poskytnout ucelený, matematicky rigorózní a prakticky orientovaný výklad teorie optických soustav moderních observatoří – od základů Fermatova principu a Seidelových aberací až po nejmodernější systémy adaptivní optiky a dálkové optické interferometrie.

0.1 Světlo jako posel z hlubin vesmíru

Prakticky veškeré naše poznání o vesmíru za hranicemi bezprostředního dosahu meziplanetárních sond pochází ze zkoumání elektromagnetického záření emitovaného, rozptýleného nebo absorbovaného kosmickými objekty. Teleskop není pouhým zvětšovacím přístrojem v laickém slova smyslu; je to především **sběrač fotonů** (light bucket) a **vlnoplochový transformátor**, jehož primární úlohou je:

1. **Maximalizovat sběrnou plochu** $A = \frac{\pi}{4} D^2$, neboť zářivý tok dopadající z hvězdných zdrojů klesá se čtvercem vzdálenosti podle vztahu:
- $$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$
1. **Minimalizovat difrakční limit úhlového rozlišení** $\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$, což umožňuje prostorově separovat těsné binární systémy, morfologii vzdálených galaxií či detekovat exoplanety v bezprostřední blízkosti jejich mateřských hvězd.
1. **Zachovat fázovou koherenci a tvar vlnoplochy** s přesností na zlomky vlnové délky napříč celým zorným polem i přes turbulentní atmosféru Země a gravitační či teplotní deformace nosných konstrukcí.

Tabulka 0.1 přehledně shrnuje evoluci průměrů primárních apertur od Galileova refraktoru až po nastupující generaci extrémně velkých teleskopů (ELT).

Přístroj / Observatoř	Rok zprovoznění	Průměr apertury D [m]	Optická konfigurace	Primární vědecký cíl
Galileův refraktor	1609	0,037	Galileův spojka-rozptylka	Lunární krátery, měsíce Jupiteru
Newtonův reflektor	1668	0,05	Parabolické zrcadlo + diagonál	Eliminace chromatické aberrace
Lord Rosse (Leviathan)	1845	1,83	Zrcadlo ze zvonoviny (speculum)	Spirálová struktura mlhoviny (M51)
Mount Wilson (Hooker)	1917	2,54	Paraboloid Cassegrain / Coude	Expanze vesmíru (Edwin Hubble)

Přístroj / Observatoř	Rok zprovoznění	Průměr apertury D [m]	Optická konfigurace	Primární vědecký cíl
Palomar (Hale)	1948	5,08	Pyrex monolit Cassegrain	Kosmologická škála, kvasary
VLT (ESO Paranal)	1998	8,20 (4x)	Aktivní Ritchey–Chrétien	Exoplanety, jádro Mléčné dráhy
JWST (L2)	2021	6,50	Segmentovaný třízrcadlový anastigmát (TMA)	První galaxie, atmosféry exoplanet
Vera C. Rubin (LSST)	2025	8,40 (efekt. 6,7)	Modifikovaný Paul–Baker TMA	Přehledka dynamického vesmíru
ELT (ESO Cerro Armazones)	~2028	39,3	5zrcadlová adaptivní anastigmatická	Přímé zobrazování terestrických exoplanet

0.2 Časové a prostorové škály optických aberací

Zobrazovací proces v astronomickém dalekohledu je ovlivněn celým spektrem poruch a odchylek vlnoplochy, které lze klasifikovat podle jejich časové stability a prostorové charakteristiky:

- **Statické vnitřní aberace optiky:** Odchytky způsobené teoretickým návrhem kuželosečkových ploch (sférická vada, koma, astigmatismus, sklenutí pole) a zbytkovými chybami broušení a leštění skla (high-spatial-frequency figure errors). Tyto vady jsou časově invariantní a analyzují se pomocí Seidelovy teorie a Zernikeových polynomů.
- **Kvazistatické deformace (gravitační a termální):** Působením změn gravitačního vektoru při naklánění tubusu dalekohledu a gradientů teploty v průběhu pozorovací noci dochází k prohýbání zrcadel a dilatacím nosného tubusu (typická časová škála 10^1 až 10^3 s). Tyto jevy kompenzuje **aktivní optika** (Active Optics) pomocí mechanických piezo- a pneumatických aktuátorů pod primárním zrcadlem.
- **Dynamické atmosférické aberace (seeing):** Turbulentní víry v zemské atmosféře způsobují mikroskopické fluktuace indexu lomu vzduchu s časovou škálou Greenwoodova času $\tau_0 \approx 1$ až 10 ms. Tyto aberace způsobují rozpad Airyho disku na dynamické skvrnkové pole (speckles) a vyžadují **adaptivní optiku** (Adaptive Optics) s pracovní smyčkou v řádu kilohertzů (1000 Hz).

0.3 Metodologie moderní optické instrumentace

V moderní astronomické praxi již nelze oddělovat teoretický optický návrh od numerických simulací šíření vlnoplochy a algoritmického zpracování dat. Současný optický inženýr a astrofyzik kombinuje:

- **Ray-tracing:** Trasování paprsků podle Snellova zákona a zákonů odrazu pro určení trajektorií fotonů, spot diagramů a Seidelových aberací v geometrické aproximaci $\lambda \rightarrow 0$.
- **Difrakční vlnovou optiku:** Šíření vlnoplochy pomocí Fraunhoferovy a Fresnelovy difrakce, reprezentované dvourozměrnou Fourierovou transformací komplexní amplitudové transmittance apertury:

$$U(u, v) = \frac{1}{\lambda f} \iint P(x, y) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (ux + vy) \right] dx dy$$

- **Numerické simulační balíčky v Pythonu:** Knihovny jako `poppy` (Physical Optics Propagation in Python), vyvinutá ve Space Telescope Science Institute pro simulaci James Webb Space Telescope, a balíčky pro maticové trasování paprsků (`raytracing`, `batoid`).

0.4 Struktura a didaktický plán monografie

Tato kniha je koncipována jako vysokoškolská učebnice pro studenty astrofyziky a optického inženýrství i jako referenční příručka pro vědecké a technické pracovníky observatoří:

- **Část I (Geometrická optika a aberace):** Systematicky buduje matematický aparát od Fermatova principu variačního počtu přes paraxiální ABCD maticovou optiku až po rozvoj eikonálu do Seidelových aberací 3. řádu a ortogonální dekompozici vlnoplochy pomocí Zernikeových polynomů.
- **Část II (Zrcadlové a katadioptrické soustavy):** Podrobně analyzuje kuželosečkové plochy dvouzrcadlových teleskopů (Cassegrain, Ritchey–Chrétien, Dall–Kirkham), třízrcadlové anastigmaty (TMA) umožňující gigapixelová zorná pole u přehlídkových teleskopů Rubin a Roman, a katadioptrické soustavy (Schmidt, Maksutov, Klevcov).
- **Část III (Atmosféra, difrakce a vlnová optika):** Přenáší pohled do vlnové domény. Odvozuje difrakční limit kruhové apertury a vliv centrálního stínění, analyzuje Kolmogorovovu teorii atmosférické turbulence, Friedův parametr r_0 a techniky speckle interferometrie a šťastného zobrazování (Lucky Imaging).
- **Část IV (Adaptivní optika a interferometrie):** Představuje technologický vrchol současné astronomie: uzavřené zpětnovazební smyčky adaptivní optiky se senzory Shack–Hartmann, pyramidovými detektory, laserovými vodícími hvězdami (LGS) v sodíkové vrstvě mezoféry, a základy prostorové koherence a optické syntézy apertury podle van Cittert–Zernikeova teorému (VLT, CHARA).
- **Část V (Přílohy):** Přináší kompletní analytická odvození Seidelových sumačních koeficientů (Dodatek A), praktický manuál simulací v Pythonu s balíčky Ray-tracing a POPPY (Dodatek B), sbírku 15 plně řešených numerických úloh pokrývajících celou širší probírané látku (Dodatek C) a rozsáhlý encyklopedický glosář odborných pojmů (Dodatek D).

Část I: Geometrická optika a aberace

📌 ZAJÍMAVOST

Tematický přehled Části I První část této monografie formuluje rigorózní teoretické základy geometrické optiky a teorie optických aberací. Vycházíme z variačního Fermatova principu, zavádíme Hamiltonovu teorii eikonálu a maticový formalismus paraxiální optiky (ABCD matice). Následně přecházíme k Seidelově teorii primárních aberací 3. řádu a k ortogonální dekompozici fázových chyb vlnoplochy pomocí Zernikeových polynomů na jednotkovém kruhu.

Fyzikální a matematické pilíře paprskové optiky

Geometrická optika představuje asymptotickou limitu vlnové optiky pro vlnové délky blíží se k nule ($\lambda \rightarrow 0$). V tomto limitním režimu se elektromagnetické pole šíří podél jednorozměrných trajektorií – světelných paprsků –, které jsou ortogonální k plochám konstantní fáze (vlnoplochám).

Přestože reálné teleskopy podléhají difrakci, geometrická teorie aberací je nepostradatelným nástrojem pro:

1. Globální architekturu a optimalizaci tvaru optických ploch (kuželoseček a asfér vyšších řádů).
2. Analýzu šíření světelných svazků a definici zorného pole, ohniskových vzdáleností a pupil.
3. Kvantifikaci odchylek reálné vlnoplochy od ideální sférické reference.

Tato část obsahuje tři fundamentální kapitoly:

1. **Kapitola 1: Fermatův princip a paraxiální optika** Variační formulace optiky: Fermatův princip nejmenšího optického dráhového času a odvození zákonů lomu a odrazu. Paraxiální aproximace malých úhlů ($\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$). Maticový formalismus 2×2 (ABCD matice) pro centrované soustavy, kardinální body (ohniska, hlavní roviny, uzlové body), Lagrangeův-Helmholtzův invariant a zákon zachování etendue ($A\Omega$). Vědecký simulační skript v Pythonu pro trasování paraxiálních paprsků.
1. **Kapitola 2: Teorie aberací 3. řádu podle Seidela** Hamiltonův eikonál a mocninný rozvoj vlnové aberace $W(H, \rho, \theta)$. Pět Seidelových primárních aberací: sférická aberace (W_{040}), koma (W_{131}), astigmatismus (W_{222}), sklenutí pole a Petzvalova plocha (W_{220}), distorze (W_{311}). Chromatické vady centrováných refrakčních soustav: axiální a transversální chromatická aberace, Abbeovo číslo a návrh achromatických a apochromatických dubletů a tripletů.
1. **Kapitola 3: Zernikeovy polynomy a analýza vlnoplochy** Ortogonální báze na jednotkovém kruhovém disku $Z_n^m(\rho, \theta)$. Radiální polynomy $R_n^m(\rho)$, Nollovo a Fringe číslování módů. Fyzikální interpretace optických chyb: píšť, náklon (tip/tilt), defokus, astigmatismus, koma, primární sférická vada, trefoil a sférická vada vyššího řádu. Vztah mezi RMS odchylkou vlnoplochy σ_ϕ a Strehlovým číslem S prostřednictvím Maréchalovy aproximace. Dekompozice fázových map interferometrů v Pythonu.

Kapitola 1: Fermatův princip a paraxiální optika

❗ ZAJÍMAVOST

Historický kontext V roce 1662 formuloval francouzský matematik Pierre de Fermat variační princip, který sjednotil zákony šíření světla: „Světlo se mezi dvěma body šíří po takové dráze, kterou urazí za extrémní (stacionární) čas.“ Tento princip předběhl Lagrangeův a Hamiltonův variační formalismus klasické mechaniky o více než století a stal se základním kamenem moderní teoretické i aplikované optiky.

1.1 Fermatův princip a variační formulace optiky

Nechť se světelný paprsek šíří v nehomogenním a izotropním prostředí s prostorově závislým indexem lomu $n(\mathbf{r}) = \frac{c}{v(\mathbf{r})}$, kde c je fázová rychlost světla ve vakuu a $v(\mathbf{r})$ je lokální fázová rychlost v bodě $\mathbf{r}$.

Čas t potřebný k uražení dráhy podél prostorové křivky $\mathcal{C}$ spojující bod A s bodem B je dán křivkovým integrálem:

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v(\mathbf{r})} = \frac{1}{c} \int_A^B n(\mathbf{r}) ds$$

Definujeme **optickou dráhu** (Optical Path Length, OPL) jako:

$$\text{OPL} \equiv \int_A^B n(\mathbf{r}) ds$$

Fermatův princip postuluje, že skutečná trajektorie paprsku odpovídá stacionární hodnotě funkcionálu optické dráhy:

$$\delta \text{OPL} = \delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0$$

Variační podmínka implikuje, že první variace funkcionálu vymizí. Trajektorie je tedy lokálním minimem, maximem nebo inflexním bodem.

Odvození Snellova zákona lomu

Uvažujme rovinné rozhraní mezi dvěma homogenními prostředími s indexy lomu n_1 a n_2 ležící v rovině $z = 0$. Nechť bod $A = (0, y_A, z_A)$ leží v prostředí 1 ($z_A > 0$) a bod $B = (0, y_B, z_B)$ v prostředí 2 ($z_B < 0$). Bod lomu na rozhraní označme $P = (0, y, 0)$.

Celková optická dráha jako funkce souřadnice y bodu lomu je rovna:

$$\text{OPL}(y) = n_1 \sqrt{z_A^2 + (y - y_A)^2} + n_2 \sqrt{z_B^2 + (y_B - y)^2}$$

Aplikací stacionární podmínky $\frac{d\text{OPL}}{dy} = 0$ obdržíme:

$$\frac{d \text{OPL}}{dy} = n_1 \frac{y - y_A}{\sqrt{z_A^2 + (y - y_A)^2}} - n_2 \frac{y_B - y}{\sqrt{z_B^2 + (y_B - y)^2}} = 0$$

Zavedeme-li úhel dopadu θ_1 a úhel lomu θ_2 měřené vůči normále k rozhraní:

$$\sin \theta_1 = \frac{y - y_A}{\sqrt{z_A^2 + (y - y_A)^2}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{y_B - y}{\sqrt{z_B^2 + (y_B - y)^2}}$$

dostáváme rigorózní **Snellův zákon lomu**:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Pro případ odrazu (reflexe) na zrcadlovém rozhraní položíme $n_2 = -n_1$, z čehož bezprostředně plyne **zákon odrazu**: $\theta_2 = -\theta_1$.

1.2 Paraxiální aproximace a maticový formalismus 2×2

V astronomických teleskopech tvoří paprsky přicházející z hvězdných zdrojů malé úhly s optickou osou soustavy (osou z). V tzv. **paraxiální oblasti** (Gaussově optice) nahrazujeme goniometrické funkce prvními členy Taylorova rozvoje:

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \tan \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx 1$$

Paprsek v libovolné rovině $z = \text{konst.}$ je plně charakterizován dvojrozměrným sloupcovým stavovým vektorem:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$$

kde y je příčná vzdálenost paprsku od optické osy a u je paraxiální úhel sklonu paprsku (v radiánech) vzhledem k ose z . Při průchodu centrovanou optickou soustavou se stavový vektor transformuje lineárním operátorem reprezentovaným reálnou maticí 2×2 :

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Determinant této matice splňuje relaci $\det(\mathbf{M}) = AD - BC = \frac{n_1}{n_2}$, kde n_1 je index lomu vstupního prostředí a n_2 index lomu výstupního prostředí. Pokud je vstup i výstup ve vzduchu či vakuu ($n_1 = n_2 = 1$), je determinant jednotkový: $\det(\mathbf{M}) = 1$.

Fundamentální přenosové matice

1. **Translací ve volném homogenním prostředí** o tloušťce d : Paprsek letí přímočaře, výška se mění o $d \cdot u$, úhel zůstává konstantní:

$$\mathbf{T}(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Lom na sférickém rozhraní** o poloměru křivosti R (kladné R odpovídá středu křivosti vpravo od vrcholu):
Výška se při infinitesimálním přechodu nemění ($y_2 = y_1$), úhel se láme podle paraxiálního Snellova zákona
 $n_2 u_2 - n_1 u_1 = -y \frac{n_2 - n_1}{R}$:

$$\mathbf{R}_{\text{refr}}(R, n_1, n_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\Phi}{n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

kde $\Phi = \frac{n_2 - n_1}{R}$ je optická mohutnost rozhraní.

1. **Odraž na sférickém zrcadle** o poloměru křivosti R (kde pro konkávní duté zrcadlo volíme $R < 0$ a efektivní ohnisková vzdálenost je $f = -\frac{R}{2}$):

$$\mathbf{R}_{\text{refl}}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Tenká čočka** o ohniskové vzdálenosti f v prostředí o indexu lomu $n = 1$:

$$\mathbf{L}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

Celková matice optické soustavy složené z k optických prvků a mezer je součinem jednotlivých dílčích matic v obráceném pořadí, v jakém jimi paprsek prochází:

$$\mathbf{M}_{\text{tot}} = \mathbf{M}_k \cdot \mathbf{M}_{k-1} \dots \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1$$

1.3 Kardinální body optické soustavy

Libovolnou složitou centrovanou soustavu s maticí $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ lze v paraxiálním přiblížení plně popsat pomocí šesti **kardinálních bodů**:

- dvě ohniska: přední ohnisko F a zadní ohnisko F' ,
- dvě hlavní roviny: přední hlavní rovina H a zadní hlavní rovina H' ,
- dva uzlové body: přední uzlový bod N a zadní uzlový bod N' .

Vzdálenosti kardinálních bodů od první optické plochy (vstupního vrcholu V_1) a od poslední optické plochy (výstupního vrcholu V_k) jsou jednoznačně určeny prvky matice $\mathbf{M}$:

$$\text{Efektivní ohnisková vzdálenost: } f' = -\frac{1}{C}$$

$$\text{Zadní ohnisková vzdálenost (BFL, od } V_k \text{ k } F') : s_{F'} = \frac{A}{-C}$$

$$\text{Přední ohnisková vzdálenost (FFL, od } V_1 \text{ k } F) : s_F = -\frac{D}{-C} = \frac{D}{C}$$

$$\text{Poloha zadní hlavní roviny (od } V_k \text{ k } H') : s_{H'} = \frac{A - 1}{-C}$$

$$\text{Poloha přední hlavní roviny (od } V_1 \text{ k } H) : s_H = \frac{1-D}{-C} = \frac{D-1}{C}$$

Pokud se vstupní i výstupní prostředí shodují ($n_1 = n_2$), uzlové body splývají s body hlavními ($N = H$ a $N' = H'$).

1.4 Lagrangeův–Helmholtzův invariant a zachování etendue

Uvažujme dva nezávislé paraxiální paprsky procházející touž centrovanou soustavou:

1. **Okrajový paprsek** (marginal ray): vychází z osového bodu předmětu ($y = 0$) a prochází okrajem apertury se souřadnicemi (y_m, u_m) .
2. **Hlavní paprsek** (chief ray): vychází z okraje mimoosového předmětu o výšce h a prochází středem aperturní clony se souřadnicemi (y_c, u_c) .

Definujeme veličinu zvanou **Lagrangeův–Helmholtzův invariant** (též optický invariant):

$$H \equiv n(y_c u_m - y_m u_c) = \text{konst.}$$

V předmětové rovině, kde $y_m = 0$ a $y_c = h$, přechází invariant do tvaru $H = n_1 h u_m$. V obrazové rovině, kde $y'_m = 0$ a $y'_c = h'$, dostáváme $H = n_2 h' u'_m$. Z rovnosti plyne fundamentální relace pro příčné zvětšení $m \equiv \frac{h'}{h}$:

$$m = \frac{h'}{h} = \frac{n_1 u_m}{n_2 u'_m}$$

Geometrická propustnost (Etendue)

Ve třech dimenzích je optická propustnost svazku záření charakterizována veličinou **etendue** (optická propustnost či geometrický fázový objem svazku), definovanou jako:

$$G = \iint n^2 \cos \theta dA d\Omega$$

kde dA je element plochy apertury, $d\Omega$ je element prostorového úhlu svazku a θ je úhel mezi normálou k ploše a směrem šíření. Pro malý prostorový úhel a kruhovou aperturu o ploše A a zorné pole s prostorovým úhlem Ω je:

$$G \approx A \cdot \Omega = \text{konst.}$$

Podle Liouvilleova teorému hamiltonovské statistické mechaniky je fázový objem svazku fotonů v bezetrátové optické soustavě invariantem. Z toho plyne zásadní zákon pro stavbu observatoří: **Žádnou optickou soustavou nelze zvýšit měrnou zářivost (jas) svazku záření**. Pokus o zmenšení průměru obrazu nevyhnutelně vede ke zvětšení numerické apertury (kužele paprsků).

1.5 Vědecký simulační kód v Pythonu: Paraxiální ray-tracer

Následující skript demonstruje maticový výpočet paraxiálních paprsků pro klasický dvouzrcadlový teleskop typu Cassegrain s primárním zrcadlem M_1 o poloměru křivosti $R_1 = -2000 \text{ mm}$ a sekundárním zrcadlem M_2

s $R_2 = -600$ mm ve vzdálenosti $d = 700$ mm.

```
import numpy as np

def matrix_translation(d):
    """Translační matice ve volném prostoru o délce d."""
    return np.array([[1.0, float(d)],
                     [0.0, 1.0]])

def matrix_mirror(R):
    """Reflexní matice sférického zrcadla o poloměru křivosti R."""
    # Pro zrcadlo platí  $f = -R / 2$ , změna úhlu  $du = -y / f = 2 * y / R$ 
    return np.array([[1.0, 0.0],
                     [2.0 / float(R), 1.0]])

def analyze_optical_system():
    # Parametry teleskopu Cassegrain (v mm)
    R1 = -2000.0 # Poloměr primáru ( $f_1 = 1000$  mm)
    R2 = -600.0 # Poloměr sekundáru
    d = 700.0 # Vzdálenost mezi zrcadly ( $d > 0$ )

    # 1. Primární zrcadlo
    M_m1 = matrix_mirror(R1)

    # 2. Translace z M1 na M2 (dráha světla zpět k sekundáru)
    M_t1 = matrix_translation(-d)

    # 3. Sekundární zrcadlo
    M_m2 = matrix_mirror(R2)

    # Celková matice od dopadu na M1 po odraz od M2
    #  $M_{sys} = M_{m2} @ M_{t1} @ M_{m1}$ 
    M_sys = np.linalg.multi_dot([M_m2, M_t1, M_m1])

    A = M_sys[0, 0]
    B = M_sys[0, 1]
    C = M_sys[1, 0]
    D = M_sys[1, 1]

    # Efektivní ohnisková vzdálenost celé soustavy EFL
    efl = -1.0 / C

    # Zadní ohnisková vzdálenost BFL (vzdálenost ohniska od M2 podél optické osy)
    # Pro paralelní vstupní paprsek  $y = y_0$ ,  $u = 0$ :
    #  $y_{out} = A * y_0$ ,  $u_{out} = C * y_0$ 
    # Ohnisko je tam, kde  $y_{final} = y_{out} + bfl * u_{out} = 0 \Rightarrow bfl = -A / C$ 
    bfl = -A / C
```

```
# Vzdálenost ohniska za primárním zrcadlem (back focal clearance)
back_clearance = bfl - d

print("=====")
print("PARAMETRY DVOZRCADLOVÉHO TELESKOPU (CASSEGRAIN)")
print("=====")
print(f"Poloměr křivosti primárního zrcadla R1 : {R1:.1f} mm")
print(f"Poloměr křivosti sekundárního zrcadla R2: {R2:.1f} mm")
print(f"Vzdálenost zrcadel d : {d:.1f} mm")
print("-----")
print(f"Systemová matice soustavy M_sys:\n{M_sys}")
print(f"Determinant matice det(M) : {np.linalg.det(M_sys):.6f}")
print("-----")
print(f"Efektivní ohnisková vzdálenost (EFL) : {efl:.2f} mm ({efl/1000:.3f} m)")
print(f"Zadní ohnisková vzdálenost (od M2) : {bfl:.2f} mm")
print(f"Poloha ohniska za vrcholem primáru M1 : {back_clearance:.2f} mm")
print(f"Sekundární zvětšení m = EFL / f1 : {efl / (-R1 / 2.0):.2f}x")
print("=====")

if __name__ == "__main__":
    analyze_optical_system()
```

Kapitola 2: Teorie aberací 3. řádu podle Seidela

❗ ZAJÍMAVOST

Historický kontext V roce 1857 publikoval německý matematik a fyzik Philipp Ludwig von Seidel práci „*Ueber die Theorie der Fehler, mit welchen die durch optische Instrumente gesehenen Bilder behaftet sind*“, v níž poprvé rigorózně rozvinul odchylky reálných paprsků od Gaussovy paraxiální optiky do mocninných řad třetího řádu. Těchto pět klasických geometrických vad nese dodnes označení Seidelovy primární aberace.

2.1 Eikonál a vlnová aberace

V ideální optické soustavě se sférická vlnoplocha vystupující z bodového zdroje transformuje na ideální sférickou vlnoplochu (referenční sféru), která konverguje do jediného Gaussova obrazového bodu P' .

V reálných optických soustavách se vystupující vlnoplocha od referenční sféry odchyluje. Definujeme **funkci vlnové aberace** W jako optickou dráhu mezi skutečnou vlnoplochou Σ a referenční sférou Σ_0 , měřenou podél paprsku směřujícího do středu výstupní pupily:

$$W = [\text{OPL}]_{\Sigma} - [\text{OPL}]_{\Sigma_0}$$

Zavedme normalizované polární souřadnice ve výstupní pupile (ρ, θ) , kde $\rho \in [0, 1]$ je bezrozměrný radiální poloměr a θ je azimutální úhel měřený od roviny symetrie (tangenciální roviny). Polohu obrazového bodu v zorném poli charakterizujeme normalizovanou výškou pole $H \in [0, 1]$ měřenou v ose y .

Vzhledem k rotační symetrii centrované optické soustavy může funkce vlnové aberace záviset pouze na třech invariantních skalárních součinech:

$$H^2, \quad \rho^2, \quad H\rho \cos \theta$$

Mocninný rozvoj funkce $W(H, \rho, \theta)$ do řady má tvar:

$$W(H, \rho, \theta) = \sum_{j,k,m} W_{2j+2k+m, 2k+m, m} H^{2j+m} \rho^{2k+m} \cos^m \theta$$

kde $n = 2j + 2k + m$ představuje celkový řád vlnové aberace. Členy s $n = 2$ odpovídají paraxiálnímu posunu ohniska (defokus) a příčnému posunu obrazu (tilt):

$$W_2 = W_{020}\rho^2 + W_{111}H\rho \cos \theta$$

Členy čtvrtého řádu ve vlnové aberaci ($n = 4$) generují paprskové aberace 3. řádu a představují **pět Seidelových primárních aberací**:

$$W_4(H, \rho, \theta) = W_{040}\rho^4 + W_{131}H\rho^3 \cos \theta + W_{222}H^2\rho^2 \cos^2 \theta + W_{220}H^2\rho^2 + W_{311}H^3\rho \cos \theta$$

2.2 Pět primárních Seidelových aberací

Příčné odchylky dopadu paprsku v obrazové rovině $(\Delta x', \Delta y')$ od Gaussova paraxiálního bodu jsou dány gradientem vlnové aberace podle vztahů odvozených z geometrie normály k vlnoploše:

$$\Delta x' = -\frac{R}{n'} \frac{\partial W}{\partial x_p}, \quad \Delta y' = -\frac{R}{n'} \frac{\partial W}{\partial y_p}$$

kde R je poloměr referenční sféry a $(x_p, y_p) = (\rho \sin \theta, \rho \cos \theta)$ jsou kartézské souřadnice v pupile.

1. Sférická aberace ($W_{040}\rho^4$)

- **Závislost:** Je zcela nezávislá na výšce pole ($H^0 = 1$), vyskytuje se tedy i přímo na optické ose.
- **Fyzikální projev:** Okrajové zóny zrcadla či čočky lámou (nebo odrážejí) světelné paprsky silněji než centrální paraxiální zóny. Paprsky neprotínají optickou osu v jediném bodě, ale vytvářejí charakteristickou obálku zvanou **kaustika**.
- **Kruh nejmenšího rozptylu:** Vzdálenost podél osy mezi paraxiálním ohniskem a marginálním ohniskem je podélná sférická aberace $LSA \propto \rho^2$. V rovině ležící ve třech čtvrtinách vzdálenosti od paraxiálního k marginálnímu ohnisku vzniká minimální průměr rozptylové skvrny (circle of least confusion):

$$d_{\min} = \frac{1}{2} d_{\text{paraxial}}$$

2. Koma ($W_{131}H\rho^3 \cos \theta$)

- **Závislost:** Roste lineárně se vzdáleností od optické osy (H^1) a kubicky s poloměrem pupily (ρ^3).
- **Fyzikální projev:** Různé prstencové zóny pupily zobrazují bodový mimoosový zdroj jako sérii vzájemně posunutých kružnic o poloměru úměrném ρ^2 , jejichž středy se vzdalují od paraxiálního bodu úměrně ρ^2 . Výsledný obrazec má tvar kapky či komety s vrcholovým úhlem přesně 60° .
- Rozlišujeme sagitální komu (Coma_s) a tangenciální komu (Coma_t), přičemž platí fundamentální poměr:

$$\text{Coma}_t = 3 \text{Coma}_s$$

3. Astigmatismus ($W_{222}H^2\rho^2 \cos^2 \theta$)

- **Závislost:** Roste kvadraticky s výškou pole (H^2) a kvadraticky s pupilou (ρ^2).
- **Fyzikální projev:** Vlnoplocha získává toroidní zakřivení. Paprsky v tangenciální rovině (rovině obsahující optickou osu a hlavní paprsek) konvergují do tangenciální ohniskové linie T , zatímco paprsky v sagitální rovině (kolmé na tangenciální) konvergují do sagitální ohniskové linie S .
- Mezi oběma liniemi se nachází kruhový obrazec nejmenšího rozptylu. Podélný astigmatismus je rozdíl poloh $\Delta z_{\text{ast}} = z'_T - z'_S \propto H^2$.

4. Sklenutí pole a Petzvalova plocha ($W_{220}H^2\rho^2$)

- **Závislost:** Roste kvadraticky s polem (H^2) i pupilou (ρ^2), je rotačně symetrické kolem hlavního paprsku.
- **Fyzikální projev:** I při úplném odstranění astigmatismu ($W_{222} = 0$) neleží ostrý obraz na rovinném detektoru, nýbrž na zakřivené ploše zvané **Petzvalova plocha**. Poloměr křivosti Petzvalovy plochy R_P pro soustavu k tenkých čoček závisí výhradně na jejich optických mohutnostech Φ_i a indexech lomu n_i :

$$\frac{1}{R_P} = - \sum_{i=1}^k \frac{\Phi_i}{n_i}$$

Pro zrcadlové soustavy ($n_i = -1$) o poloměru křivosti R_i se vztah redukuje na:

$$\frac{1}{R_P} = 2 \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^i}{R_i}$$

Tento jev způsobuje rozostření okrajů zorného pole na moderních plochých CCD a CMOS senzorech, což vyžaduje použití optických rovnačů pole (field flatteners).

5. Distorze ($W_{311} H^3 \rho \cos \theta$)

- **Závislost:** Roste kubicky s výškou pole (H^3) a lineárně s pupilou (ρ).
- **Fyzikální projev:** Distorze neovlivňuje ostrost zobrazení bodu (svazek zůstává homocentrický), ale způsobuje nelineární příčné posunutí obrazového bodu, čímž deformuje geometrii pole.
- Pokud příčné zvětšení m klesá se vzdáleností od osy ($W_{311} < 0$), vzniká **soudkovitá distorze** (barrel distortion). Pokud zvětšení roste ($W_{311} > 0$), vzniká **poduškovitá distorze** (pincushion distortion).

2.3 Chromatické aberace centrovaných refrakčních soustav

Protože index lomu optických skel klesá s rostoucí vlnovou délkou podle Sellmeierovy či Cauchyho disperzní formule:

$$n(\lambda) \approx A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

mají čočky pro modré světlo kratší ohniskovou vzdálenost než pro světlo červené.

Disperzní schopnost optického materiálu se kvantifikuje bezrozměrným **Abbeovým číslem** V_d , definovaným pomocí Fraunhoferových spektrálních čar ($d = 587,56 \text{ nm}$, $F = 486,13 \text{ nm}$, $C = 656,27 \text{ nm}$):

$$V_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$$

Vyšší hodnota V_d značí nižší disperzi materiálu (např. korunové sklo BK7 má $V_d \approx 64$, zatímco těžké flintové sklo SF11 má $V_d \approx 25$).

Podmínka achromatismu pro tenký dublet

Uvažujme tenký kontaktní dublet složený ze dvou čoček o mohutnostech $\Phi_1 = \frac{1}{f_1}$ a $\Phi_2 = \frac{1}{f_2}$. Celková mohutnost je $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Požadavek rovnosti ohniskových vzdáleností pro vlnové délky F a C vede k variační podmínce:

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{\Phi_1}{V_1} + \frac{\Phi_2}{V_2} = 0$$

Řešením soustavy rovnic obdržíme předpis pro mohutnosti jednotlivých elementů:

$$\Phi_1 = \Phi \frac{V_1}{V_1 - V_2}, \quad \Phi_2 = -\Phi \frac{V_2}{V_1 - V_2}$$

Protože $V_1 \neq V_2$, musí mít jedna z čoček kladnou a druhá zápornou mohutnost (např. spojka z korunového skla a rozptylka z flintového skla). Zbytková chromatická vada mezi sjednoceným ohniskem F , C a ohniskem d se nazývá **sekundární spektrum**. K jeho eliminaci se využívají apochromatické triplety z fluoridových krystalů (CaF_2) a speciálních nízkorozptylových skel (ED/SD).

2.4 Vědecký simulační kód v Pythonu: Výpočet transversálních vad

Skript modeluje transversální paprskové aberace (Ray Fan plot) pro sférickou aberaci, komu a astigmatismus.

```
import numpy as np

def transversal_ray_aberrations(W040, W131, W222, H, num_rays=100):
    """
    Vypočte transversální odchylky paprsků v tangenciální (dy) a sagitální (dx) rovině.
    W040: koeficient sférické aberace (v mikrometrech)
    W131: koeficient komy
    W222: koeficient astigmatismu
    H : normalizovaná výška pole (0 = osa, 1 = okraj pole)
    """
    # Tangenciální řez (x_p = 0, y_p = rho)
    rho_t = np.linspace(-1.0, 1.0, num_rays)
    #  $dy_t = -\frac{d}{dy} [W040 y^4 + W131 H y^3 + W222 H^2 y^2]$ 
    dy_t = -(4.0 * W040 * rho_t**3 + 3.0 * W131 * H * rho_t**2 + 2.0 *
    W222 * H**2 * rho_t)

    # Sagitální řez (y_p = 0, x_p = rho)
    rho_s = np.linspace(-1.0, 1.0, num_rays)
    # dy_s (koma má vliv na y i pro sagitální paprsky!)
    #  $W = W040 x^4 + W131 H x^2$  ...  $dy_s = -W131 H x^2$ 
    dy_s = -(W131 * H * rho_s**2)
    dx_s = -(4.0 * W040 * rho_s**3)

    return rho_t, dy_t, rho_s, dx_s, dy_s

def run_seidel_analysis():
    # Modelové parametry objektivu f/4
    W040 = 2.5 # 2.5 um sférické vady
    W131 = 1.8 # 1.8 um komy
    W222 = 1.2 # 1.2 um astigmatismu

    print("=====")
    print("SEIDELOVA ANALÝZA ABERACÍ 3. ŘÁDU")
    print("=====")
    for H in [0.0, 0.5, 1.0]:
        rho_t, dy_t, rho_s, dx_s, dy_s = transversal_ray_aberrations(W040, W131, W222,
H)
        max_dy_t = np.max(np.abs(dy_t))
        max_dx_s = np.max(np.abs(dx_s))
        print(f"Pole H = {H:.1f}:")
        print(f" Max. tangenciální transversální chyba dy: {max_dy_t:.3f} um")
        print(f" Max. sagitální transversální chyba dx : {max_dx_s:.3f} um")
    print("=====")
```

```
if __name__ == "__main__":  
    run_seidel_analysis()
```

Kapitola 3: Zernikeovy polynomy a analýza vlnoplochy

❶ ZAJÍMAVOST

Historický kontext V roce 1934 publikoval holandský fyzik Frits Zernike v časopise *Physica* přelomovou práci věnovanou difrakční teorii fázově kontrastního mikroskopu (za což obdržel v roce 1953 Nobelovu cenu za fyziku). Jako matematický nástroj pro analýzu kruhových pupil zavedl soustavu ortogonálních polynomů, které se staly celosvětovým standardem pro popis optických vlnoploch a adaptivní optiky.

3.1 Ortogonální báze na jednotkovém disku

Zatímco Seidelovy mocninné řady nejsou na kruhové apertuře vzájemně ortogonální (např. sférická vada ρ^4 obsahuje i složku defokusu ρ^2), Frits Zernike zkonstruoval nekonečnou množinu funkcí $Z_n^m(\rho, \theta)$, které tvoří úplnou ortogonální bázi na jednotkovém kruhu $\mathcal{D} = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$.

Každou reálnou vlnoplochovou aberaci $W(\rho, \theta)$ vyjádřenou v jednotkách délky (nebo fázovou odchylku $\phi(\rho, \theta) = \frac{2\pi}{\lambda} W(\rho, \theta)$ v radiánech) lze jednoznačně rozvinout do konvergentní Zernikeovy řady:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j Z_j(\rho, \theta)$$

kde c_j jsou jednoznačně určené Zernikeovy expanzní koeficienty.

Polynomy $Z_n^m(\rho, \theta)$ se separují v polárních souřadnicích do radiální a azimutální části:

$$Z_n^m(\rho, \theta) = \begin{cases} R_n^m(\rho) \cos(m\theta) & \text{pro } m \geq 0 \\ R_n^{|m|}(\rho) \sin(|m|\theta) & \text{pro } m < 0 \end{cases}$$

kde:

- n je celočíselný **radiální řád** ($n \geq 0$),
- m je celočíselný **azimutální index** splňující $|m| \leq n$,
- rozdíl $n - |m|$ musí být nezáporné sudé číslo. Pokud je $n - |m|$ liché, je $Z_n^m(\rho, \theta) \equiv 0$.

Explicitní tvar radiálních polynomů

Radiální funkce $R_n^m(\rho)$ jsou dány vzorcem:

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \left(\frac{n+|m|}{2} - k\right)! \left(\frac{n-|m|}{2} - k\right)!} \rho^{n-2k}$$

Relace ortogonalita na jednotkovém disku má tvar:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_n^m(\rho, \theta) Z_{n'}^{m'}(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \frac{\pi(1 + \delta_{m0})}{2(n+1)} \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

Pro **ortonormální bázi** násobíme polynomy normalizačním faktorem $N_n^m = \sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m0}}}$.

3.2 Nollův indexační systém a klasifikace optických módů

Pro praktické použití v adaptivní optice a interferometrii zavedl Robert J. Noll (1976) lineární číslování $j = 1, 2, 3, \dots$, které jednoznačně mapuje dvojici (n, m) na jednorozměrný index.

Nollův systém řadí módy vzestupně podle radiálního řádu n . Pro dané n mají přednost módy s menším $|m|$, a pro nenulové m přichází sudý člen s $\cos(m\theta)$ před lichým členem se $\sin(m\theta)$.

Tabulka 3.1 uvádí prvních 15 Nollových Zernikeových módů spolu s jejich fyzikálním významem v astronomické optice.

Nollův index j	n m	Bázová funkce $Z_j(\rho, \theta)$	Fyzikální název aberace	Typický astrofyzikální původ
1	0 0	1	Píst (Piston)	Absolutní fáze svazku
2	1 1	$2\rho \cos \theta$	Náklon v ose x (Tip / X-Tilt)	Chvění obrazu (atmosférický seeing)
3	1 -1	$2\rho \sin \theta$	Náklon v ose y (Tilt / Y-Tilt)	Chvění obrazu, tracking montáže
4	2 0	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	Defokus (Defocus)	Teplotní dilatace tubusu dalekohledu
5	2 -2	$\sqrt{6}\rho^2 \sin(2\theta)$	Šikmý astigmatismus (45°)	Gravitační deformace uložení zrcadla
6	2 2	$\sqrt{6}\rho^2 \cos(2\theta)$	Primární astigmatismus ($0^\circ/90^\circ$)	Mimoosové pole, napětí v optice
7	3 -1	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \sin \theta$	Koma vertikální (Y-Coma)	Nekoliminalita primáru a sekundáru
8	3 1	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$	Koma horizontální (X-Coma)	Decenter sekundárního zrcadla
9	3 -3	$\sqrt{8}\rho^3 \sin(3\theta)$	Trojlístek (Trefoil 30°)	Tříbodové uložení primárního zrcadla
10	3 3	$\sqrt{8}\rho^3 \cos(3\theta)$	Trojlístek (Trefoil 0°)	Upínací packy mechanické buňky
11	4 0	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	Primární sférická aberace	Chybná asférická figura zrcadla
12	4 2	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos(2\theta)$	Sekundární astigmatismus	Aberace vyššího řádu v poli
13	4 -2	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \sin(2\theta)$	Sekundární astigmatismus	Šikmé zbytkové vady
14	4 4	$\sqrt{10}\rho^4 \cos(4\theta)$	Čtyřlístek (Tetrafoil)	Čtyřbodové radiální podpěry zrcadla
15	4 -4	$\sqrt{10}\rho^4 \sin(4\theta)$	Čtyřlístek (Tetrafoil)	Zbytková čtyřčetná anizotropie

3.3 Rozptyl vlnoplochy a Maréchalova aproximace Strehlova čísla

Kvalita optického obrazu závisí přímo na střední kvadratické odchylce vlnoplochy (Root Mean Square, RMS) od referenční sféry:

$$\sigma_W = \sqrt{\langle W^2 \rangle - \langle W \rangle^2}$$

kde střední hodnota přes normalizovanou aperturu o ploše π je:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathcal{D}} W(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

Díky ortonormalitě Zernikeových polynomů je rozptyl vlnoplochy dán prostým součtem čtverců expanzních koeficientů (Parsevalův teorém):

$$\sigma_W^2 = \sum_{j=2}^{\infty} c_j^2$$

Píst ($j = 1$) je konstantní fázový posun celé vlnoplochy a nepřispívá k degradaci obrazu, proto je v sumě vynechán. Podobně náklony (tilt, $j = 2, 3$) pouze posouvají těžiště obrazu bez ovlivnění jeho vnitřní ostroty.

Strehlovo číslo (S)

Strehlovo číslo (Strehl ratio) S je definováno jako poměr maximální intenzity světla v centru difrakčního obrazce reálné aberované soustavy $I(0)$ k teoretickému maximu ideální neaberované difrakční soustavy $I_0(0)$:

$$S \equiv \frac{I(0)}{I_0(0)}$$

V přiblížení malých fázových chyb ($\sigma_\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \sigma_W \ll 1$ rad) odvodil francouzský optik André Maréchal slavnou exponenciální aproximaci:

$$S \approx |\langle e^{i\phi} \rangle|^2 \approx \left| 1 - \frac{\langle \phi^2 \rangle}{2} \right|^2 \approx 1 - \sigma_\phi^2 \approx \exp(-\sigma_\phi^2)$$

Dosazením $\sigma_\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \sigma_W$ dostáváme:

$$S \approx \exp \left[- \left(\frac{2\pi}{\lambda} \sigma_W \right)^2 \right]$$

Rayleighovo kritérium $\lambda/4$

Lord Rayleigh postuloval, že optická soustava je prakticky prostá vad (**difrakčně limitovaná**), pokud maximální rozdíl mezi nejvyšším a nejnižším bodem vlnoplochy (Peak-to-Valley, P-V) nepřekročí čtvrtinu vlnové délky:

$$\Delta W_{P-V} \leq \frac{\lambda}{4}$$

Pro čistou sférickou vadu (Z_{11}) odpovídá P-V hodnota $\frac{\lambda}{4}$ hodnotě $\text{RMS} = \frac{\lambda}{14\sqrt{5}} \approx \frac{\lambda}{31,3}$, což dosazením do Maréchalova vztahu dává:

$$S \approx 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{31,3} \right)^2 = 1 - 0,040 = 0,80$$

V moderní astronomii se proto každá optická soustava či adaptivní systém se Strehlovým číslem $S \geq 0,80$ považuje za difrakčně limitovanou.

3.4 Vědecký simulační kód v Pythonu: Zernikeova syntéza a Strehlovo číslo

Skript syntetizuje 2D fázovou mapu zadaných Zernikeových módů a vypočte přesné Strehlovo číslo a RMS chybu.

```
import numpy as np

def zernike_radial(n, m, rho):
    """Výpočet radiálního polynomu  $R_n^m(\rho)$ ."""
    m = abs(m)
    R = np.zeros_like(rho, dtype=float)
    if (n - m) % 2 != 0:
        return R
    k_max = (n - m) // 2
    for k in range(k_max + 1):
        num = ((-1)**k) * np.math.factorial(n - k)
        den = (np.math.factorial(k) *
              np.math.factorial((n + m) // 2 - k) *
              np.math.factorial((n - m) // 2 - k))
        R += (num / den) * (rho**(n - 2 * k))
    return R

def compute_strehl_from_zernike(coefficients_nm, wavelength_nm=500.0, grid_size=256):
    """
    Syntetizuje vlnoplochu z Nollových Zernikeových koeficientů a určí Strehl.
    coefficients_nm: slovník {(n, m): koeficient_v_nm}
    """
    x = np.linspace(-1.0, 1.0, grid_size)
    y = np.linspace(-1.0, 1.0, grid_size)
    X, Y = np.meshgrid(x, y)
    RHO = np.sqrt(X**2 + Y**2)
    THETA = np.arctan2(Y, X)

    pupil_mask = RHO <= 1.0
    W = np.zeros((grid_size, grid_size), dtype=float)

    for (n, m), c_val in coefficients_nm.items():
        R = zernike_radial(n, m, RHO)
        if m >= 0:
            Z = R * np.cos(m * THETA)
        else:
            Z = R * np.sin(abs(m) * THETA)
        W[pupil_mask] += c_val * Z[pupil_mask]

    # Výpočet RMS na pupile
    valid_W = W[pupil_mask]
    rms_opd_nm = np.std(valid_W)
    sigma_phi = (2.0 * np.pi * rms_opd_nm) / wavelength_nm
    strehl_marechal = np.exp(-sigma_phi**2)

    return rms_opd_nm, strehl_marechal
```

```
if __name__ == "__main__":
    # Příklad zbytkových vad teleskopu (v nanometrech)
    # n=2, m=0: defokus 25 nm; n=3, m=1: koma 30 nm; n=4, m=0: sférická 20 nm
    test_coeffs = {
        (2, 0): 25.0,
        (3, 1): 30.0,
        (4, 0): 20.0
    }
    wl = 550.0 # zelené světlo 550 nm
    rms, S = compute_strehl_from_zernike(test_coeffs, wavelength_nm=wl)

    print("=====")
    print("ANALÝZA VLNOPLOCHY POMOCÍ ZERNIKEOVÝCH POLYNOMŮ")
    print("=====")
    print(f"Vlnová délka (lambda)          : {wl:.1f} nm")
    print(f"Výsledná RMS chyba vlnoplochy   : {rms:.2f} nm (lambda / {wl/rms:.1f})")
    print(f"Strehlovo číslo (Maréchal)        : {S:.4f} ({S*100:.1f} %)")
    if S >= 0.80:
        print("Status: Soustava je DIFRAKČNĚ LIMITOVANÁ (Strehl >= 0.80)")
    else:
        print("Status: Soustava je limitována geometrickými aberacemi")
    print("=====")
```

Část II: Zrcadlové a katadioptrické soustavy

📌 ZAJÍMAVOST

Tematický přehled Části II Druhá část monografie se zaměřuje na konstrukci moderních astronomických dalekohledů založených na zrcadlových a smíšených (katadioptrických) optických soustavách. Zkoumáme geometrii rotačních kuželoseček (paraboloid, hyperboloid, elipsoid), analyzujeme klasické dvouzrcadlové konfigurace, pokročilé třízrcadlové anastigmaty (TMA) schopné pokrýt více než třístupňová zorná pole a katadioptrické systémy korigované tenkými či tlustými menisky a asférickými deskami.

Od odrazných ploch k velkouhlým přehlídkám oblohy

Čočkové objektivy (refraktory) narazily na přelomu 19. a 20. století na nepřekonatelné fyzikální meze:

1. **Absorpce a chromatická disperze:** Skleněné čočky silně absorbují ultrafialové a infračervené záření a vykazují zbytkové sekundární a terciární spektrum.
2. **Gravitační průhyb (sagging):** Čočku lze mechanicky podepřít pouze na jejím obvodu, což při průměrech nad 1 metr (např. 1,02m refraktor na observatoři Yerkes z roku 1897) vede k nepřijatelnému gravitačnímu prohýbání vlastní vahou.
3. **Objemová nehomogenita:** Výroba desítek tun optického skla bez vnitřních bublin, napětí a fluktuací indexu lomu je technicky nemožná.

Zrcadla naproti tomu odrážejí záření na tenké povrchové reflexní vrstvě (hliník, stříbro, zlato). Tělo zrcadla může být vyrobeno ze sklokeramických materiálů s nulovou tepelnou roztažností (Zerodur, ULE, Astro-Sital) nebo z lehkého berylia a může být po celé zadní ploše podepřeno stovkami pneumatických a elektromechanických aktuátorů.

Tato část obsahuje tři specializované kapitoly:

1. **Kapitola 4: Dvouzrcadlové teleskopy Cassegrain, Ritchey–Chrétien, Dall–Kirkham** Matematika kuželosečkových ploch, definice Schwarzschildovy konické konstanty $\kappa = -e^2$. Srovnávací Seidelova analýza klasického Cassegrainu, aplanatické soustavy Ritchey–Chrétien (HST, VLT, Keck) a systému Dall–Kirkham. Výhody Gregoryho soustavy s konkávním sekundárem pro solární teleskopy (DKIST) a moderní korigované systémy CDK s rovnačem pole.
1. **Kapitola 5: Třízrcadlové anastigmaty TMA pro velkouhlé přehlídky LSST a Roman** Třízrcadlové konfigurace schopné současně eliminovat sférickou aberaci, komu i astigmatismus ($S_I = S_{II} = S_{III} = 0$). Paul-Bakerova konstrukce a Korschova geometrie. Detailní rozbor optické architektury Vera C. Rubin Observatory (Simonyi Survey Telescope LSST) s unikátním monolitickým zrcadlem M1/M3 o průměru 8,4 metru, zorným polem $3,5^\circ$ a kamerou o 3,2 miliardách pixelů. Vesmírné observatoře JWST a Nancy Grace Roman Space Telescope.
1. **Kapitola 6: Katadioptrické systémy Schmidt, Maksutov, Klevcov** Spojení sférických zrcadel s refrakčními korekčními členy. Schmidtova komora s asférickou korekční deskou čtvrtého řádu umístěnou ve středu křivosti. Maksutovova soustava se silně zakřiveným koncentrickým meniskem. Klevcovův inovativní subapertruní korektor s Manginovým zrcadlem v otevřeném tubusu.

Kapitola 4: Dvozcadlové teleskopy Cassegrain, Ritchey–Chrétien, Dall–Kirkham

❗ ZAJÍMAVOST

Historický kontext V roce 1672 navrhl francouzský kněz a sochař Laurent Cassegrain dvozcadlovou soustavu kombinující konkávní primární a konvexní sekundární zrcadlo, která dramaticky zkrátila délku tubusu dalekohledu. O dvě a půl století později (1910–1927) George Willis Ritchey a Henri Chrétien revolučním způsobem zobecnili tuto koncepci: opustili striktní požadavek na parabolické primární zrcadlo a ukázali, že volbou dvou asférických hyperboloidů lze současně eliminovat sférickou aberaci i komu.

4.1 Matematika rotačních kuželosečkových ploch

Většina moderních astronomických zrcadel využívá plochy vzniklé rotací kuželosečky kolem optické osy z . Válcově symetrický profil plochy $z(r)$ s vrcholem v počátku souřadnic $(0, 0, 0)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ je radiální vzdálenost od osy, je dán implicitní rovnicí:

$$r^2 - 2Rz + (1 + \kappa)z^2 = 0$$

kde R je vrcholový poloměr křivosti ($c = \frac{1}{R}$ je vrcholová křivost) a κ je **Schwarzschildova konická konstanta** související s geometrickou numerickou excentricitou kuželosečky e vztahem:

$$\kappa = -e^2$$

Explicitní řešení pro průhyb plochy (sagitta, zkráceně sag) má tvar:

$$z(r) = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + \kappa)c^2r^2}} = \frac{r^2}{2R} + (1 + \kappa)\frac{r^4}{8R^3} + (1 + \kappa)^2\frac{r^6}{16R^5} + \dots$$

Geometrický typ plochy je jednoznačně určen hodnotou konické konstanty κ :

- $\kappa > 0$ ($e^2 < 0$, ryze imaginární excentricita): **Zploštělý sféroid** (oblate spheroid),
- $\kappa = 0$ ($e = 0$): **Koule** (sphere),
- $-1 < \kappa < 0$ ($0 < e < 1$): **Protáhlý elipsoid** (prolate ellipsoid),
- $\kappa = -1$ ($e = 1$): **Paraboloid** (paraboloid),
- $\kappa < -1$ ($e > 1$): **Hyperboloid** (hyperboloid).

Paraboloid má výjimečnou geometrickou vlastnost: svazek rovnoběžných paprsků přicházejících z nekonečna rovnoběžně s optickou osou odráží přesně bez sférické vady do jediného ohniska. Elipsoid má dvě reálná ohniska, zatímco hyperboloid má jedno reálné a jedno virtuální ohnisko.

4.2 Paraxiální geometrie dvouzrcadlových soustav

Uvažujme soustavu dvou zrcadel:

- Primární zrcadlo M_1 : průměr D_1 , vrcholový poloměr $R_1 < 0$, ohnisková vzdálenost $f_1 = -\frac{R_1}{2}$.
- Sekundární zrcadlo M_2 : vrcholový poloměr R_2 , vzdálenost od primáru d ($0 < d < f_1$).
- Celková efektivní ohnisková vzdálenost soustavy: F .
- Relativní vzdálenost zrcadel: $k \equiv \frac{d}{f_1} = 1 - \frac{\rho}{m}$.
- Sekundární zvětšení: $m \equiv \frac{F}{f_1} = \frac{s'_2}{s_2}$.
- Vzdálenost zadního ohniska od primáru: $b = s'_2 - d = \beta f_1$, kde $\beta \equiv \frac{b}{f_1}$.

Paraxiální zobrazovací rovnice dávají základní vztahy mezi konstrukčními parametry:

$$m = \frac{F}{f_1} = \frac{R_2}{R_2 + 2(f_1 - d)}$$

$$R_2 = -\frac{2f_1 m(1 - k)}{m - 1} = -\frac{2dm}{m - 1 - \beta}$$

$$d = f_1 \frac{m - \beta}{m + 1}$$

4.3 Srovnávací analýza klasických konfigurací

Volbou konických konstant primárního zrcadla κ_1 a sekundárního zrcadla κ_2 lze optimalizovat Seidelovy aberace soustavy:

- S_I : koeficient primární sférické aberace,
- S_{II} : koeficient primární komy,
- S_{III} : koeficient primárního astigmatismu.

1. Klasický Cassegrain

- **Optická konfigurace:** Primární zrcadlo je rotační paraboloid ($\kappa_1 = -1$), sekundární zrcadlo je konvexní hyperboloid ($\kappa_2 < -1$).
- Konická konstanta sekundáru je přesně určena požadavkem na eliminaci sférické vady na ose ($S_I = 0$):

$$\kappa_2 = -\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2$$

- **Vlastnosti:** Dokonalé zobrazení na ose ($S_I = 0$). Mimo osu se však projevuje silná koma ($S_{II} \neq 0$), která je co do úhlové velikosti identická s komou ekvivalentního parabolického newtonovského zrcadla o ohniskové vzdálenosti F :

$$\theta_{\text{koma}} = \frac{3\theta_{\text{pole}}}{16(F/D)^2}$$

Užitečné zorné pole je typicky omezeno na několik úhlových minut.

2. Soustava Ritchey–Chrétien (aplanát)

- **Optická konfigurace:** Aplanatická soustava navržena tak, aby současně splňovala podmínku nulové sférické aberace i nulové komy:

$$S_I = 0, \quad S_{II} = 0$$

- Obě zrcadla jsou asférické **hyperboloidy** ($\kappa_1 < -1, \kappa_2 < -1$). Analytické řešení pro konické konstanty odvozené z Abbéovy sinusové podmínky dává:

$$\kappa_1 = -1 - \frac{2(1 + \beta)}{m^2(m - \beta)}$$

$$\kappa_2 = -\left(\frac{m + 1}{m - 1}\right)^2 - \frac{2m(m + 1)}{(m - 1)^3(m - \beta)}$$

- **Vlastnosti:** Úplné odstranění komy vede k podstatně širšímu zornému poli (až 30' až 45' bez korektoru). Limitující zbytkovou aberací se stává **astigmatismus** (S_{III}) a silné **sklenutí pole** (Petzvalova plocha).
- **Aplikace:** Prakticky všechny vlajkové dalekohledy 20. a 21. století: - Hubble Space Telescope (HST): $D = 2,4 \text{ m}, f/24, \kappa_1 = -1,0023, \kappa_2 = -1,496$, - ESO Very Large Telescope (VLT): $4 \times D = 8,2 \text{ m}, f/15$, - W. M. Keck Observatory: $2 \times D = 10 \text{ m}$, segmentovaný primár, - Gran Telescopio Canarias (GTC): $D = 10,4 \text{ m}$.

3. Soustava Dall–Kirkham

- **Optická konfigurace:** Konstrukčně zjednodušená soustava, kde sekundární zrcadlo je vyrobena jako **přesná koule** ($\kappa_2 = 0$). Požadavek na nulovou sférickou vadu na ose ($S_I = 0$) určuje tvar primárního zrcadla jako **protáhlý elipsoid** ($-1 < \kappa_1 < 0$):

$$\kappa_1 = -1 + \frac{(m + 1)(m - 1)^2(m - \beta)}{m^3(1 + \beta)}$$

- **Vlastnosti:** Výroba a interferometrické testování sférického sekundáru je dramaticky snazší a levnější než u hyperboloidu. Daní je však silná mimoosová koma – zhruba $2,5 \times$ až $4 \times$ větší než u klasického Cassegrainu!
- **Moderní renesance (CDK – Corrected Dall–Kirkham):** Společnosti jako PlaneWave Instruments kombinují elipsoidní primár a sférický sekundár s dvoučočkovým subaperturním korektorem umístěným v zadním svazku. Korektor eliminuje komu, astigmatismus i sklenutí pole a vytváří difrakčně limitované rovinné pole o průměru až 70 mm.

4. Soustava Gregory

- **Optická konfigurace:** Využívá konkávní primární paraboloid a **konkávní sekundární elipsoid** umístěný až za primárním ohniskem ($d > f_1$).
- **Unikátní přednost:** Mezi primárním a sekundárním zrcadlem vzniká reálné mezilehlé ohnisko. Do tohoto místa lze umístit vodou chlazenou polní clonu (heat stop), která odrazí více než 95 % tepelného výkonu slunečního záření. Gregoryho uspořádání je proto dominantním standardem v moderní solární astronomii (např. 4m Daniel K. Inouye Solar Telescope DKIST na Havaji nebo Gregor na Tenerife).

Tabulka 4.1 shrnuje porovnání všech čtyř architektur.

Typ soustavy	Tvar primáru (M_1)	Tvar sekundáru (M_2)	Sférická vada (S_I)	Koma (S_{II})	Astigmatismus (S_{III})	Typické vědecké využití
Cassegrain	Paraboloid ($\kappa_1 = -1$)	Hyperboloid ($\kappa_2 < -1$)	Korigována (0)	Přítomna	Přítomen	Klasické univerzální observatoře
Ritchey-Chrétien	Hyperboloid ($\kappa_1 < -1$)	Hyperboloid ($\kappa_2 < -1$)	Korigována (0)	Korigována (0)	Přítomen (limitující)	HST, VLT, Keck, Gemini, Subaru
Dall-Kirkham	Elipsoid ($-1 < \kappa_1 < 0$)	Koule ($\kappa_2 = 0$)	Korigována (0)	Silná ($> 3\times$)	Přítomen	Planetární optika, astrofotografie (CDK)
Gregory	Paraboloid ($\kappa_1 = -1$)	Konkávní elipsoid	Korigována (0)	Přítomna	Přítomen	Solární teleskopy (DKIST), Giant Magellan

4.4 Vědecký simulační kód v Pythonu: Návrh teleskopu Ritchey-Chrétien

Skript počítá konstrukční parametry a konické konstanty pro 2,5m aplanatický teleskop Ritchey-Chrétien.

```
def design_ritchey_chretien(D1, f_number, m, back_focus_ratio):
    """
    Analytický výpočet optických parametrů a konických konstant RC teleskopu.
    D1: průměr primárního zrcadla v metrech
    f_number: celková světelnost soustavy  $N = F / D1$ 
    m: sekundární zvětšení
    back_focus_ratio:  $\beta = b / f1$  (poloha ohniska za primárem)
    """
    F = f_number * D1          # Celková ohnisková vzdálenost
    f1 = F / m                 # Ohnisková vzdálenost primáru
    R1 = -2.0 * f1             # Poloměr křivosti primáru
    beta = back_focus_ratio
    b = beta * f1              # Zadní vzdálenost ohniska od M1

    # Vzdálenost zrcadel d
    d = f1 * (m - beta) / (m + 1.0)

    # Poloměr křivosti sekundáru R2
    R2 = -2.0 * d * m / (m - 1.0 - beta)

    # Konické konstanty pro Ritchey-Chrétien
    #  $\kappa_1 = -1 - 2(1 + \beta) / (m^2 * (m - \beta))$ 
    kappa1_rc = -1.0 - (2.0 * (1.0 + beta)) / (m**2 * (m - beta))

    #  $\kappa_2 = -((m+1)/(m-1))^2 - 2\langle m \rangle / ((m-1)^3 * (m - \beta))$ 
    term_std = -((m + 1.0) / (m - 1.0))**2
    term_corr = -(2.0 * m * (m + 1.0)) / ((m - 1.0)**3 * (m - beta))
    kappa2_rc = term_std + term_corr

    # Pro srovnání: konická konstanta sekundáru klasického Cassegrainu
    kappa2_cass = term_std

    return {
        "F": F, "f1": f1, "R1": R1, "R2": R2, "d": d, "b": b,
        "kappa1_rc": kappa1_rc, "kappa2_rc": kappa2_rc,
        "kappa2_cass": kappa2_cass
    }

if __name__ == "__main__":
    # Příklad: Moderní 2,5m přehlídkový dalekohled f/8
    p = design_ritchey_chretien(D1=2.5, f_number=8.0, m=3.2, back_focus_ratio=0.35)

    print("=====")
    print("NÁVRH 2.5m TELESKOPU RITCHEY-CHRÉTIEN (f/8)")
    print("=====")
    print(f"Celková efektivní ohnisková vzdálenost F : {p['F']:.2f} m")
    print(f"Ohnisková vzdálenost primáru f1 : {p['f1']:.3f} m")
    print(f"(f/{p['f1']/2.5:.2f})")
    print(f"Poloměr křivosti primárního zrcadla R1 : {p['R1']:.3f} m")
    print(f"Poloměr křivosti sekundárního zrcadla R2: {p['R2']:.3f} m")
    print(f"Vzdálenost mezi zrcadly d : {p['d']:.3f} m")
    print(f"Zadní vysunutí ohniska b : {p['b']:.3f} m")
    print("-----")
    print("SCHWARZSCHILDovy KONICKÉ KONSTANTY:")
    print(f"    Primární zrcadlo RC (kappa1) : {p['kappa1_rc']:.5f}")
    print(f"(hyperboloid)")
```

```
print(f"    Sekundární zrcadlo RC (kappa2)          : {p['kappa2_rc']:.5f}
(hyperboloid)")
print(f"    Srovnání: Sekundár Cassegrain (kappa2): {p['kappa2_cass']:.5f}")
print("=====")
```

Kapitola 5: Třízrcadlové anastigmáty TMA pro velkoúhlé přehlídky LSST a Roman

❶ ZAJÍMAVOST

Historický kontext V roce 1935 navrhl francouzský optik Maurice Paul geniální třízrcadlovou soustavu kombinující parabolické primární zrcadlo se sférickým sekundárem a terciárem, která eliminovala komu i astigmatismus. V roce 1972 německý astrofyzik Dietrich Korsch tento koncept zobecnil zavedením mezilehlého ohniska a reálné výstupní pupily. Dnes tvoří třízrcadlové anastigmáty (Three-Mirror Anastigmat, TMA) páteř nejvýkonnějších pozemních i kosmických observatoří 21. století.

5.1 Fyzikální podstata anastigmatické korekce

Klasické dvouzrcadlové dalekohledy typu Ritchey–Chrétien mají k dispozici pouze dva nezávislé asférické parametry (κ_1, κ_2), což postačuje k současné eliminaci sférické vady a komy ($S_I = S_{II} = 0$). Na okraji zorného pole však zůstává nekorigovaný astigmatismus ($S_{III} \propto H^2$) a sklenutí Petzvalovy plochy ($S_{IV} \propto H^2$), které při úhlových vzdálenostech větších než $15'$ až $20'$ vedou k dramatické degradaci obrazu.

Zavedením třetího asférického zrcadla získává optický konstruktér:

- tři poloměry křivosti (R_1, R_2, R_3),
- dvě osové vzdálenosti (d_1, d_2),
- tři Schwarzschildovy konické konstanty ($\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$),
- asférické deformační koeficienty vyšších řádů (A_4, A_6, A_8).

Tento počet stupňů volnosti umožňuje současně anulovat všechny tři klíčové Seidelovy aberace ovlivňující ostrost bodu:

$$S_I = 0 \quad (\text{sférická vada}), \quad S_{II} = 0 \quad (\text{koma}), \quad S_{III} = 0 \quad (\text{astigmatismus})$$

Navíc lze vhodnou volbou poměru křivostí dosáhnout anulování Petzvalova zakřivení:

$$S_{IV} = \frac{1}{R_P} = 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = 0$$

Výsledkem je **anastigmatická optická soustava s přirozeně plochým ohniskovým polem**, schopná poskytovat difrakčně limitovaný obraz napříč obrovským zorným polem o průměru několika stupňů.

5.2 Architektura Korschova a Paul–Bakerova systému

1. Paul–Bakerova soustava

Původní Paulova soustava využívala parabolický primár M_1 , konvexní sférický sekundár M_2 a konkávní sférický terciár M_3 . James Baker v roce 1969 upravil parametry zrcadel tak, že zavedením mírné asféricity na sekundáru

a terciáru dosáhl dokonale plochého pole s nulovým astigmatismem. Tato konfigurace se stala základem moderních velkoúhlých přehlídek.

2. Korschova konfigurace

Korschovo uspořádání dělí zobrazovací proces do dvou funkčních stupňů:

1. První stupeň tvořený primárním zrcadlem M_1 a sekundárem M_2 vytváří **reálné mezilehlé ohnisko** (intermediate focus) za sekundárním zrcadlem.
2. Druhý stupeň tvořený terciárním zrcadlem M_3 reimaguje mezilehlé ohnisko na finální vědecký detektor a současně zobrazuje primární aperturu do **reálné výstupní pupily**.

Do roviny výstupní pupily lze umístit rovinné zrcadlo pro jemné řízení směřování (Fine Steering Mirror, FSM). Rychlým nakláněním FSM v řádu milisekund lze aktivně kompenzovat chvění svazku způsobené mikrovibracemi chladicích pump kosmické observatoře, aniž by docházelo k vnášení aberací do obrazu.



Optická architektura segmentovaného primárního zrcadla James Webb Space Telescope využívajícího třízrcadlový anastigmat TMA.

5.3 Vera C. Rubin Observatory (Simonyi Survey Telescope / LSST)

Nejvýznamnější a technologicky nejodvážnější pozemní aplikací třízrcadlového anastigmatu je dalekohled **Vera C. Rubin Observatory** (dříve LSST) umístěný na Cerro Pachón v Chile v nadmořské výšce 2663 m.

Monolitické zrcadlo M1M3

Aby bylo možné dosáhnout extrémní světelnosti $f/1,23$ při průměru primární apertury 8,4 metru bez nepřiměřeného zvětšení délky tubusu, vyvinula laboratoř Richard F. Caris Mirror Lab na University of Arizona unikátní **monolitický substrát M1M3**:

- Vnější prstenec o vnějším průměru 8,4 metru tvoří primární zrcadlo M_1 s ohniskovou vzdáleností $f_1 = 9,92$ m.
- Vnitřní zóna o průměru 5,0 metru je vybroušena přímo do středu téhož borosilikátového bloku skla E6 jako terciární zrcadlo M_3 s výrazně odlišným poloměrem křivosti a hlubokým vybráním.
- Oba optické povrchy sdílejí jediný monolitický voštinový blok skla o hmotnosti 19 tun!

Sekundární zrcadlo M2 a tříčočkový korektor

- Sekundární zrcadlo M_2 je konvexní asférický monolit ze sklokeramiky Corning ULE o průměru 3,42 metru – největší konvexní optické zrcadlo, jaké kdy lidstvo vyrobilo.
- Před ohniskovou rovinou je umístěn velký tříčočkový korektor z taveného křemene: čočka L1 má průměr 1,55 metru, L2 má průměr 1,10 metru a čočka L3 tvoří vstupní vakuové okno kryostatu kamery.

Zorné pole a gigapixelový detektor

Optická soustava generuje kruhové zorné pole o průměru $3,5^\circ$, což odpovídá ploše $\Omega \approx 9,6 \text{ deg}^2$ (zhruba 45násobek plochy Měsíce v úplňku!). Do ohniskové roviny o průměru 64 centimetrů je osazena největší astronomická digitální kamera světa:

- 189 vědeckých CCD senzorů s rozlišením 16 megapixelů (celkem **3,2 gigapixelu**),
- pixely o velikosti $10 \mu\text{m}$ odpovídají úhlovému měřítku $0,2 \text{ arcsec/pixel}$,
- čtecí doba pouhé 2 sekundy.

5.4 Kosmické aplikace: Nancy Grace Roman a JWST

Nancy Grace Roman Space Telescope (RST)

Vesmírný dalekohled NASA připravovaný ke startu v roce 2027 využívá 2,4m primární aperturu překonfigurovanou do třízrcadlového anastigmatu. Jeho primární vědecký přístroj Wide Field Instrument (WFI) disponuje zorným polem $0,28 \text{ deg}^2$, což představuje **stokrát větší plochu oblohy v jediném záběru než Hubble Space Telescope** při zachování stejného difrakčního rozlišení $0,11''$.

James Webb Space Telescope (JWST)

Architektura JWST je klasický off-axis Korsch TMA:

- M_1 : 6,5m segmentovaný elipsoid složený z 18 hexagonálních zlacených beryliových segmentů,
- M_2 : konvexní hyperboloid o průměru 0,74 m nesený skládacím trojramenným pavoukem,
- M_3 : asférický konkávní anastigmatický terciár eliminující astigmatismus,
- Ploché zrcadlo FSM pracující ve výstupní pupile s korekční frekvencí desítek hertzů.

5.5 Metrika výkonosti: Etendue a rychlost přehlídky (Survey Speed)

Pro přehlídkové teleskopy je klíčovým parametrem **etendue** (též $A\Omega$ metrika), což je součin efektivní sběrné plochy primárního zrcadla A a prostorového úhlu zorného pole Ω :

$$\text{Etendue} \equiv A \cdot \Omega \quad [\text{m}^2 \cdot \text{deg}^2]$$

Rychlost přehlídky oblohy (Survey Speed) do dané limitní magnitudy m_{lim} je přímo úměrná etendue soustavy:

$$\text{Survey Speed} \propto A \cdot \Omega \cdot \eta_{\text{opt}}$$

kde η_{opt} je celková spektrální propustnost optiky a detektoru.

```
import numpy as np

def compute_survey_metrics():
    # Parametry teleskopů: (Název, D [m], A_eff [m^2], Zorné pole [deg^2])
    telescopes = [
        ("Hubble Space Telescope (WFC3/UVIS)", 2.4, 4.0, 0.0020),
        ("James Webb Space Telescope (NIRCam)", 6.5, 25.4, 0.0027),
        ("Nancy Grace Roman Space Telescope", 2.4, 4.0, 0.2810),
        ("Vera C. Rubin Observatory (LSST)", 8.4, 35.0, 9.6000)
    ]

    print("=====")
    print("SROVNÁNÍ PŘEHLÍDKOVÉ VÝKONNOSTI A ETENDUE (A * OMEGA)")
    print("=====")
    print(f'{"Teleskop":<36} | {"A_eff [m2]":<10} | {"Pole [deg2]":<11} | {"Etendue [m2 deg2]"}')
    print("-----")

    lsst_etendue = None
    for name, D, A, Omega in telescopes:
        etendue = A * Omega
        if "Rubin" in name:
            lsst_etendue = etendue
        print(f'{"name":<36} | {"A":<10.1f} | {"Omega":<11.4f} | {"etendue":<10.3f}')

    print("-----")
    hst_etendue = 4.0 * 0.0020
    ratio = lsst_etendue / hst_etendue
    print(f"Poměr přehlídkové rychlosti Vera Rubin / HST: {ratio:.1f}x !")
    print("=====")

if __name__ == "__main__":
    compute_survey_metrics()
```

Kapitola 6: Katadioptrické systémy Schmidt, Maksutov, Klevcov

❗ ZAJÍMAVOST

Historický kontext V roce 1930 zkonstruoval estonský optik Bernhard Schmidt na observatoři v Hamburku-Bergedorfu přístroj, který způsobil revoluci v astrofotografii. Spojením sférického primárního zrcadla s tenkou asférickou korekční deskou umístěnou ve středu křivosti vytvořil soustavu s nevídanou světelností $f/1,75$ a zorným polem přesahujícím 6° , prostou komy i astigmatismu. Zrodila se katadioptrická optika.

6.1 Sférické zrcadlo jako ideální symetrický prvek

Koule je jedinou geometrickou plochou, která vykazuje dokonalou trojrozměrnou rotační symetrii kolem svého středu křivosti C . Pokud umístíme aperturní clonu (stop) do středu křivosti sférického zrcadla o poloměru R , stává se každý světelný paprsek procházející clonou z libovolného úhlu pole fakticky osovým paprskem!

V takovém uspořádání:

- **Koma je identicky nulová:** $S_{II} \equiv 0$,
- **Astigmatismus je identicky nulový:** $S_{III} \equiv 0$,
- **Distorze je identicky nulová:** $S_{311} \equiv 0$.

Jedinými vadami centrovaného sférického zrcadla se středovou clonou jsou:

1. **Sférická aberace** 3. řádu:

$$W_{040} = \frac{D^4}{64R^3} = \frac{D}{2048N^3}$$

kde $N = \frac{f}{D}$ je clonové číslo (světelnost) a $f = \frac{R}{2}$. Sférická vada roste nepřímo úměrně třetí mocnině světelnosti N^3 , což při vysokých světelnostech ($f/1,5$ až $f/2$) zcela degraduje obraz.

1. **Sklenutí pole (Petzval):** Obraz neleží na rovině, nýbrž na soustředné sférické ploše o poloměru:

$$R_P = f = \frac{R}{2}$$

Úkolem katadioptrické optiky je zavést refrakční korekční prvek, který vygeneruje přesně opačnou sférickou aberaci ($-W_{040}$), aniž by narušil nulovou komy a astigmatismus.

6.2 Schmidtova komora a Schmidt–Cassegrain (SCT)

Bernhard Schmidt vyřešil problém umístěním tenké skleněné asférické desky přímo do středu křivosti sférického zrcadla. Protože deska leží v rovině clony, procházejí jí hlavní paprsky všech úhlů pole ve středu, takže deska prakticky nevnáší komy ani astigmatismus.

Profil Schmidty korekční desky

Tloušťkový profil desky $z(r)$ musí modulovat optickou dráhu paprsku tak, aby kompenzoval dráhový rozdíl sférické aberace zrcadla:

$$z(r) = \frac{r^4 - kr_0^2 r^2}{4(n-1)R^3}$$

kde:

- r je radiální vzdálenost od osy desky,
- n je index lomu skla korekční desky,
- R je poloměr křivosti zrcadla,
- kr_0^2 je koeficient kvadratického členu (odpovídá zavedení mírné optické mohutnosti/defokusu pro minimalizaci chromatické aberace).

Optimální volba zóny nulového sklonu (kde má deska minimální tloušťku a nulovou lomivost) je:

$$r_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} y_{\max} \approx 0,866 y_{\max}$$

Tato volba rozděluje chromatickou vadu rovnoměrně a minimalizuje celkovou disperzi (tzv. **achromatická Schmidtova deska**).

Schmidt–Cassegrainův teleskop (SCT)

Schmidtova původní komora měla nevýhodu: délka tubusu se rovnala dvojnásobku ohniskové vzdálenosti ($2f = R$) a ohnisková plocha ležela uvnitř tubusu na zakřivené ploše.

Schmidt–Cassegrainův systém řeší oba problémy zavedením konvexního sekundárního zrcadla:

- Sekundární zrcadlo je často napařeno jako pokovená ploška přímo na zadní stranu Schmidty desky.
- Svazek je odražen zpět otvorem v primárním zrcadle do zadního ohniska.
- Výsledkem je extrémně kompaktní přístroj (délka tubusu pouhý zlomek ohniskové vzdálenosti) oblíbený na univerzitních observatořích i v amatérské astrofotografii (např. přístroje Celestron SCT a Meade ACF).

6.3 Maksutovova soustava: Koncentrický meniskus

V roce 1941 navrhl sovětský optik Dmitrij Dmitrijevič Maksutov (a nezávisle v Nizozemsku Albert Bouwers) nahradit náročnou sférickou Schmidty desku tlustým **sférickým meniskovým korektorem**.

Fyzikální princip menisku

Meniskus je ohraničen dvěma sférickými plochami o poloměrech R_1 a R_2 , které jsou téměř soustředné se středem křivosti zrcadla. Protože obě plochy jsou sférické:

1. Výroba a leštění je nesrovnatelně snazší a levnější než u Schmidty asféry 4. řádu.
2. Silně prohnutý záporný meniskus vykazuje velkou zápornou sférickou aberaci, která přesně ruší kladnou sférickou aberaci sférického primárního zrcadla:

$$\Delta W_{040}^{(\text{meniskus})} + W_{040}^{(\text{zrcadlo})} = 0$$

1. Protože $R_1 \approx R_2$, je celková optická mohutnost menisku blízká nule, takže vnáší jen zanedbatelnou chromatickou aberaci.

Typy Maksutovových systémů

- **Gregory–Maksutov:** Sekundární zrcadlo je realizováno jako centrální hliníková skvrna napařená přímo na vnitřní sférickou plochu menisku (R_2). Systém má minimum optických komponent a je hermeticky uzavřený.
- **Rumak–Maksutov:** Sekundární zrcadlo je samostatný optický element s poloměrem křivosti $R_3 \neq R_2$. Tento dodatečný stupeň volnosti umožňuje kompletní eliminaci komy, což vede k podstatně širšímu rovnému zornému poli.
- **Maksutov–Newton:** Sekundární zrcadlo je rovinná eliptická diagonála odklánějící svazek do boku tubusu. Vyznačuje se vynikajícím kontrastem a minimálním centrálním stíněním.

6.4 Klevcovův systém: Otevřený tubus a subapertruní korektor

Přestože jsou Schmidtovy a Maksutovovy teleskopy velmi populární, trpí dvěma závažnými nedostatky:

- **Tepelná setrvačnost uzavřeného tubusu:** Plná přední skleněná deska hermeticky uzavírá tubus. Ohřátý vzduch uvnitř vytváří konvektivní víry (tzv. tube seeing), které degradují rozlišení po celé hodiny, než se teplota vyrovná s nočním okolím.
- **Hmotnost a rosení:** U velkých průměrů ($D > 30 \text{ cm}$) je přední skleněný meniskus enormně těžký a mechanicky namáhá tubus. Navíc vnější plocha desky nekrytá rosným tubusem rychle prochladá radiačním vyzařováním a orosuje se.

V letech 1978–1980 navrhl ruský optik Jurij Andrejevič Klevcov geniální alternativu: **Klevcovův–Kaspereitův katadioptrický systém**.

Optická architektura Klevcova

1. **Otevřený tubus:** Na vstupu dalekohledu není žádná korekční deska. Vzduch v tubusu volně cirkuluje a vyrovnává teplotu během několika minut.
2. **Sférický primár:** Primární zrcadlo je jednoduchá, lehká a levná konkávní koule.
3. **Sekundární korekční jednotka:** Veškerá korekce aberací se odehrává v malé sekundární skupině o průměru pouhých cca 0,25–0,30 D : – Svazek odražený od primáru prochází tenkou meniskovou čočkou, – odráží se od zadní pokovené plochy **Manginova zrcadla** (reflexní čočky), – prochází podruhé meniskovou čočkou směrem do centrálního otvoru primárního zrcadla.

Tato kompaktní subapertruní skupina eliminuje sférickou aberaci, komu i astigmatismus. Výsledkem je lehký, tepelně okamžitě stabilní přístroj s difrakční kvalitou obrazu, komerčně vyráběný např. Novosibiřským optickým závodem (TAL-200K, TAL-250K).

Tabulka 6.1 srovnává všechny tři hlavní katadioptrické architektury.

Vlastnost / Systém	Schmidt–Cassegrain (SCT)	Maksutov–Cassegrain (MCT)	Klevcov–Cassegrain
Korekční člen	Asférická deska 4. řádu na vstupu	Tlustý sférický meniskus na vstupu	Subapertruní meniskus + Mangin
Plochy soustavy	1 asférická, 2 sférické	Všechny sférické	Všechny sférické

Vlastnost / Systém	Schmidt–Cassegrain (SCT)	Maksutov–Cassegrain (MCT)	Klevcov–Cassegrain
Konstrukce tubusu	Uzavřený	Uzavřený	Otevřený (rychlá ekvilibrace)
Mimoosová koma	Přítomna (korigována u ACF)	Korigována u Rumak designu	Korigována
Hmotnost optiky	Střední	Vysoká (masivní meniskus)	Nízká
Citlivost k rosení	Vysoká	Vysoká	Nízká (pouze sekundár)

6.5 Vědecký simulační kód v Pythonu: Profil Schmidtovy desky

Následující skript vypočte a zobrazí mikrometrový profil asférické Schmidtovy korekční desky pro teleskop o průměru 400 mm a světelnosti $f/2$.

```
import numpy as np

def schmidt_corrector_profile(aperture_diameter_mm, focal_ratio, glass_index=1.5168):
    """
    Výpočet profilu asférické Schmidtovy korekční desky.
    D: průměr apertury v mm
    N: světelnost primárního zrcadla (f/D)
    glass_index: index lomu skla (např. BK7 při 587.6 nm = 1.5168)
    """

    D = float(aperture_diameter_mm)
    y_max = D / 2.0
    f = focal_ratio * D
    R = 2.0 * f          # Poloměr křivosti sférického zrcadla
    n = glass_index

    # Zóna neutrálního sklonu pro achromatickou desku:  $r_0 = \sqrt{1.5} * y_{\max} \sim 0.866$ 
    y_max
    k_zone = 1.5

    r = np.linspace(0.0, y_max, 500)

    # Průhyb desky z(r) v milimetrech:
    #  $z(r) = (r^4 - k_{\text{zone}} * (y_{\max}^2 / 2) * r^2) / (4 * (n - 1) * R^3)$ 
    # Standardní forma:  $z(r) = (r^4 - (k * y_{\max}^2) * r^2) / (4 * (n - 1) * R^3)$ 
    # Zde k volíme tak, aby minimum nastalo v  $r_0 = 0.866 * y_{\max}$ :
    #  $dz/dr = (4 r^3 - 2 k_{\text{term}} r) = 0 \Rightarrow r_0^2 = k_{\text{term}} / 2 \Rightarrow k_{\text{term}} = 2 * r_0^2 = 2 * (1.5 / 2 * y_{\max}^2)$ 
    k_coeff = 1.5 * (y_max**2)

    numerator = r**4 - k_coeff * (r**2)
    denominator = 4.0 * (n - 1.0) * (R**3)
    z_mm = numerator / denominator
    z_um = z_mm * 1000.0 # převod na mikrometry

    # Hloubka asférické deformace P-V
    pv_depth_um = np.ptp(z_um)

    return r, z_um, pv_depth_um, R

if __name__ == "__main__":
    D_mm = 400.0
    N = 2.0
    r, z_um, pv, R = schmidt_corrector_profile(D_mm, N)

    print("=====")
    print("PARAMETRY SCHMIDTOVY KOREKČNÍ DESKY")
    print("=====")
```

```
print(f"Průměr apertury D      : {D_mm:.1f} mm")
print(f"Světelnost soustavy N   : f/{N:.1f}")
print(f"Poloměr křivosti zrcadla R : {R:.1f} mm")
print("-----")
print(f"Celková hloubka profilu (P-V): {pv:.2f} um")
print(f"Tloušťka v centru (r = 0)    : {z_um[0]:.2f} um")
print(f"Minimální tloušťka (r = r0)  : {np.min(z_um):.2f} um")
print(f"Tloušťka na okraji (r = R_ap): {z_um[-1]:.2f} um")
print("=====")
```

Část III: Atmosféra, difrakce a vlnová optika

❗ ZAJÍMAVOST

Tematický přehled Části III Třetí část monografie opouští zjednodušující rámec paprskové geometrické optiky a vstupuje do světa vlnové fyziky elektromagnetického pole. Zkoumáme fundamentální difrakční limit daný konečnou vlnovou délkou světla a vlnovou aperturou teleskopu, analyzujeme fyzikální mechanismy atmosférické turbulence v zemské atmosféře podle Kolmogorovovy teorie a studujeme metody, kterými lze bez adaptivní optiky zrekonstruovat difrakčně limitovaný obraz (speckle interferometrie a Lucky Imaging).

Od ideální vlnoplochy k turbulentnímu seeingu

V geometrické optice by dokonalé zrcadlo bez aberací soustředilo světlo z bodové hvězdy do nekonečně malého matematického bodu. Ve vlnové fyzice však vlnoplocha ohraničená kruhovou clonou pupily podléhá difrakci (ohybu světla), která rozptyluje energii do charakteristického interferenčního obrazce – **Airyho disku**.

Pro pozemní astronomické teleskopy o průměru větším než přibližně 10 až 20 centimetrů však difrakční limit představuje pouhou teoretickou mez. Světlo z vesmíru musí v závěrečných mikrosekundách své cesty proniknout zemskou atmosférou, kde se střetává s turbulentními vzdušnými masami o různých teplotách a hustotách. Tyto fluktuace indexu lomu trhají původně rovinnou vlnoplochu na nepravidelné vlnité fragmenty.

Tato část obsahuje tři provázané kapitoly:

1. **Kapitola 7: Difrakční limit a Airyho disk** Skalární teorie difrakce a Fraunhoferův ohybový integrál jako 2D Fourierova transformace apertury. Exaktní odvození profilu Airyho disku pomocí Besselovy funkce prvního druhu $J_1(x)$. Úhlový poloměr prvního temného prstence $\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$. Rayleighovo a Dawesovo kritérium úhlového rozlišení. Vliv centrálního stínění sekundárním zrcadlem a ramen pavouka na přerozdělení energie do difrakčních kroužků. Optická přenosová funkce (OTF) a modulovaný přenos kontrastu (MTF).
1. **Kapitola 8: Kolmogorovův model atmosférické turbulence a Friedův parametr r_0** Hydrodynamika turbulence: Richardsonova energetická kaskáda a Kolmogorovův zákon $k^{-5/3}$ v setrvačné suboblasti (inertial subrange). Fluktuace teploty a strukturní konstanta indexu lomu vzduchu $C_n^2(h)$ a její vertikální modely (Hufnagel-Valley). Rigorózní odvození Friedova koherentního průměru $r_0 \propto \lambda^{6/5}$. Fyzikální interpretace: seeing jako difrakce na cloně o průměru r_0 . Greenwoodův koherentní čas τ_0 , izoplanatický úhel θ_0 a vlnoplochový strukturní funkcional $D_\phi(r) = 6,88(r/r_0)^{5/3}$.
1. **Kapitola 9: Speckle interferometrie a šťastné zobrazování Lucky Imaging** Fyzika krátkých expozic ($t < \tau_0$): rozpad Airyho disku na dynamické interferenční skvrnky (speckles). Antoine Labeyrie a speckle interferometrie: Fourierovo průměrování výkonových spekter $|\hat{I}(\mathbf{u})|^2$. Znovuzískání fázové informace pomocí bispektra a trojitě korelace. Metoda šťastného zobrazování (Lucky Imaging): vysokorychlostní detektory EMCCD/sCMOS, statistika výběru nejkvalitnějších atmosférických stavů (nejlepších 1–5 % snímků), algoritmus Shift-and-Add a dosažení difrakčního limitu pozemních teleskopů o průměru 1–2,5 metru.

Kapitola 7: Difrakční limit a Airyho disk

❗ ZAJÍMAVOST

Historický kontext V roce 1835 publikoval britský královský astronom sir George Biddell Airy v pojednání pro *Cambridge Philosophical Society* exaktní matematické odvození difrakce světla na kruhové apertuře. Dokázal, že v důsledku vlnové interference se obraz bodového hvězdného zdroje v ohnisku dalekohledu nezobrazí jako geometrický bod, ale jako centrální zářivý kruhový terčik obklopený soustřednými temnými a světlými difrakčními prstenci – obrazec dnes známý jako Airyho disk.

7.1 Fraunhoferův difrakční integrál a Fourierova optika

Šíření elektromagnetického pole z výstupní pupily teleskopu do ohniskové roviny lze v rámci skalární teorie difrakce popsat Fraunhoferovou aproximací dalekého pole (far-field diffraction).

Nechť je vstupní otvor teleskopu definován v rovině pupily (x, y) komplexní aperturovou funkcí transmitance $P(x, y)$. Pro ideální kruhovou neaberovanou aperturu o průměru D bez stínění platí:

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{D}{2} \\ 0 & \text{pro } \sqrt{x^2 + y^2} > \frac{D}{2} \end{cases}$$

Komplexní amplituda elektrického pole $U(u, v)$ v ohniskové rovině ve vzdálenosti f od pupily je dána dvourozměrnou **Fourierovou transformací** aperturové funkce:

$$U(u, v) = \frac{1}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (ux + vy) \right] dx dy$$

kde (u, v) jsou prostorové souřadnice v ohniskové rovině a λ je vlnová délka záření. Zavedeme-li bezrozměrné úhlové souřadnice na obloze $(\theta_x, \theta_y) = \left(\frac{u}{f}, \frac{v}{f} \right)$, přechází integrál do tvaru:

$$U(\theta_x, \theta_y) = \frac{1}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (\theta_x x + \theta_y y) \right] dx dy$$

7.2 Odvození profilu Airyho disku pomocí Besselových funkcí

Díky kruhové symetrii apertury je výhodné přejít k polárním souřadnicím:

- V rovině pupily: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, element plochy $dx dy = r dr d\phi$, kde $r \in [0, D/2]$ a $\phi \in [0, 2\pi)$.
- V ohniskové rovině: $\theta_x = \theta \cos \psi$, $\theta_y = \theta \sin \psi$, kde $\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}$ je radiální úhel od optické osy.

Skalární součin v exponentu je:

$$\theta_x x + \theta_y y = r\theta(\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) = r\theta \cos(\phi - \psi)$$

Dosažením do Fraunhoferova integrálu obdržíme:

$$U(\theta) = \frac{1}{i\lambda f} \int_0^{D/2} r dr \int_0^{2\pi} \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} r \theta \cos(\phi - \psi) \right] d\phi$$

Integrál přes azimutální úhel ϕ je integrální reprezentací **Besselovy funkce prvního druhu nultého řádu** J_0 :

$$\int_0^{2\pi} \exp [-iz \cos(\phi - \psi)] d\phi = 2\pi J_0(z)$$

kde $z = \frac{2\pi r \theta}{\lambda}$. Komplexní amplituda je tedy:

$$U(\theta) = \frac{2\pi}{i\lambda f} \int_0^{D/2} J_0 \left(\frac{2\pi \theta}{\lambda} r \right) r dr$$

Využijeme diferenciální identitu pro Besselovy funkce: $\frac{d}{dz} [z J_1(z)] = z J_0(z)$, což po integraci dává:

$$\int_0^a z J_0(z) dz = a J_1(a)$$

Zavedeme substituci $z = \frac{2\pi \theta}{\lambda} r$, odkud $r dr = \left(\frac{\lambda}{2\pi \theta} \right)^2 z dz$. Horní mez integrace je:

$$v \equiv \frac{\pi D \theta}{\lambda}$$

Integrál přechází na:

$$U(\theta) = \frac{2\pi}{i\lambda f} \left(\frac{\lambda}{2\pi \theta} \right)^2 \int_0^v z J_0(z) dz = \frac{2\pi}{i\lambda f} \left(\frac{\lambda}{2\pi \theta} \right)^2 v J_1(v) = \frac{\pi D^2}{4i\lambda f} \left[\frac{2J_1(v)}{v} \right]$$

Intenzitní profil (Point Spread Function, PSF)

Výsledná intenzita $I(\theta) = |U(\theta)|^2$ je:

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{2J_1(v)}{v} \right]^2 = I_0 \left[\frac{2J_1 \left(\frac{\pi D \theta}{\lambda} \right)}{\frac{\pi D \theta}{\lambda}} \right]^2$$

kde $I_0 = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2} I_{\text{in}}$ je osová špičková intenzita ($v \rightarrow 0$, přičemž $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{2J_1(v)}{v} = 1$) a $A = \frac{\pi}{4} D^2$ je geometrická plocha apertury.

7.3 Difrakční minima a rozdělení energie (Encircled Energy)

Nulové hodnoty intenzity $I(\theta) = 0$ odpovídají kořenům Besselovy funkce $J_1(v) = 0$ (s výjimkou $v = 0$).

1. **První temný prstenec (hranice Airyho disku):** První kořen nastává pro:

$$v_1 = \frac{\pi D \theta_1}{\lambda} \approx 3,831706$$

Odtud plyne fundamentální vzorec pro **úhlový poloměr Airyho disku**:

$$\theta_1 = \frac{3,831706}{\pi} \frac{\lambda}{D} \approx 1,21966 \frac{\lambda}{D} \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

1. **Další difrakční prstence:** - Druhé minimum (2. temný kroužek): $v_2 \approx 7,0156 \Rightarrow \theta_2 \approx 2,233 \frac{\lambda}{D}$, - Třetí minimum (3. temný kroužek): $v_3 \approx 10,1735 \Rightarrow \theta_3 \approx 3,238 \frac{\lambda}{D}$.

Relativní intenzita sekundárních difrakčních maxim vzhledem k centrálnímu píku:

- 1. světlý prstenec ($v \approx 5,136$): $I_1/I_0 = 0,0175$ (1,75 %),
- 2. světlý prstenec ($v \approx 8,417$): $I_2/I_0 = 0,0042$ (0,42 %),
- 3. světlý prstenec ($v \approx 11,62$): $I_3/I_0 = 0,0016$ (0,16 %).

Obklopená energie (Encircled Energy, EE)

Frakce celkového zářivého toku obsažená uvnitř kruhu o úhlovém poloměru θ je dána analytickým integrálem:

$$EE(v) = 1 - J_0^2(v) - J_1^2(v)$$

Pro první temný kroužek ($v_1 = 3,8317$) dostáváme:

$$EE(v_1) = 1 - J_0^2(3,8317) - 0 \approx 1 - (-0,40276)^2 \approx 1 - 0,1622 = 0,8378 \approx 83,8 \%$$

To znamená, že přesně 83,8 % **veškeré světelné energie** hvězdy je soustředěno uvnitř centrálního Airyho terčíku. Zbývajících 16,2 % energie je rozptýleno do vnějších difrakčních kroužků.

7.4 Kriteria úhlového rozlišení

V astronomické praxi se pro posouzení schopnosti přístroje rozlišit dvě blízké bodové složky stejné jasnosti používá několik konvencí:

1. **Rayleighovo kritérium (1879):** Dva bodové zdroje jsou považovány za právě rozlišené, pokud hlavní maximum difrakčního obrazce prvního zdroje splyne s prvním minimum difrakčního obrazce druhého zdroje:

$$\theta_{\text{Rayleigh}} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Pokles intenzity v sedle mezi oběma maximy činí přesně 19 % ($I_{\text{dip}} \approx 0,81 I_{\text{max}}$), což je pro lidské oko i digitální detektor snadno prokazatelné.

1. **Dawesův empirický limit:** Britský astronom William Rutter Dawes na základě tisíců vizuálních pozorování těsných dvojhvězd malými refraktory stanovil empirické pravidlo pro mezní rozlišení ve viditelném oboru ($\lambda \approx 550 \text{ nm}$):

$$\theta''_{\text{Dawes}} = \frac{116}{D_{\text{mm}}}$$

Dawesův limit je zhruba o 18 % těsnější než Rayleighovo kritérium ($\theta_{\text{Dawes}} \approx 1,02 \frac{\lambda}{D}$), protože trénované oko detekuje i mírné protažení centrálního disku.

1. **Sparrowovo kritérium:** Teoretická mez rozlišitelnosti, při níž zcela vymizí sedlo a druhá derivace celkového profilu intenzity uprostřed se stane nulovou ($\frac{d^2 I}{d\theta^2} = 0$):

$$\theta_{\text{Sparrow}} \approx 0,94 \frac{\lambda}{D}$$

7.5 Vliv centrálního stínění a difrakčních ramen pavouka

U zrcadlových dalekohledů je primární zrcadlo zčásti stíněno sekundárním zrcadlem o průměru $d_{\text{sec}} = \epsilon D$, kde $\epsilon \in [0,15, 0,45]$ je lineární faktor centrální obstrukce.

Aperturová transmitance je rozdílem dvou soustředných kruhů: $P_{\epsilon}(r) = P_D(r) - P_{\epsilon D}(r)$. Z linearity Fourierovy transformace je výsledná difrakční amplituda:

$$U_{\epsilon}(v) \propto \frac{2J_1(v)}{v} - \epsilon^2 \frac{2J_1(\epsilon v)}{\epsilon v}$$

Fyzikální důsledky centrálního stínění:

- Zúžení centrálního píku:** Šířka centrálního maxima v poloviční výšce (FWHM) se mírně zmenšuje (např. pro $\epsilon = 0,33$ klesá poloměr prvního minima z $1,22 \frac{\lambda}{D}$ na $1,10 \frac{\lambda}{D}$).
- Výrazný přesun energie do difrakčních prstenců:** Podíl energie v centrálním disku klesá z 83,8 % na méně než 65 %! Intenzita prvního difrakčního prstence vzroste z původních 1,75 % na více než 5 % až 7 % centrálního píku.
- Pokles modulace kontrastu (MTF):** Na nízkých a středních prostorových frekvencích dochází k znatelnému poklesu kontrastu, což degraduje pozorování jemných planetárních detailů (např. oblačné pásy Jupiteru či Saturnu).

Difrakční ramena držáku (Spider Diffraction Spikes)

Čtyři tenká radiální ramena nesoucí sekundární zrcadlo působí jako difrakční štěrby. Podle Babinetova principu generují v ohniskové rovině kolmé difrakční paprsky (spikes) o intenzitě úměrné čtverci tloušťky ramen. Čtyřramenný držák vytváří 4 difrakční paprsky, zatímco třiramenný držák generuje 6 paprsků (vzhledem k chybějící středové symetrii).

7.6 Vědecký simulační kód v Pythonu: Airyho disk a stínění

```
import numpy as np
from scipy.special import j1, j0

def airy_profile(v, epsilon=0.0):
    """
    Vypočte relativní intenzitu difrakčního obrazce pro obstrukci epsilon.
     $v = \pi * D * \theta / \lambda$ 
    """
    # Ošetření nuly
    v_safe = np.where(v == 0.0, 1e-12, v)

    term1 = 2.0 * j1(v_safe) / v_safe
    term2 = epsilon**2 * (2.0 * j1(epsilon * v_safe) / (epsilon * v_safe))

    amp = (term1 - term2) / (1.0 - epsilon**2)
    return amp**2

def encircled_energy(v):
    """Obklopená energie pro neobstruovanou kruhovou aperturu."""
    return 1.0 - j0(v)**2 - j1(v)**2

if __name__ == "__main__":
    v_vals = np.linspace(0.0, 12.0, 1000)

    # Výpočet pro volnou aperturu (eps = 0.0) a typický Cassegrain (eps = 0.33)
    I_clear = airy_profile(v_vals, epsilon=0.0)
    I_obsured = airy_profile(v_vals, epsilon=0.33)

    print("=====")
    print("ANALÝZA DIFRAKČNÍHO LIMITU A CENTRÁLNÍHO STÍNĚNÍ")
    print("=====")
    print("Parametr  $v = \pi * D * \theta / \lambda$ ")
    print("Teoretické první minimum (volná apertura):  $v = 3.8317$ ")
    print(f"Intenzita v prvním sekundárním maximu (volná): {np.max(I_clear[v_vals > 4.0])*100:.2f} %")
    print(f"Intenzita v prvním maximu (obstrukce 33 %): {np.max(I_obsured[v_vals > 4.0])*100:.2f} %")
    print("-----")
    print(f"Obklopená energie v Airyho disku ( $v = 3.83$ ): {encircled_energy(3.8317)*100:.2f} %")
    print("=====")
```

Kapitola 8: Kolmogorovův model atmosférické turbulence a Friedův parametr r_0

❗ ZAJÍMAVOST

Historický kontext V roce 1941 publikoval sovětský matematik Andrej Nikolajevič Kolmogorov fundamentální statistickou teorii plně vyvinuté hydrodynamické turbulence. O čtvrt století později (1966) aplikoval americký fyzik David L. Fried Kolmogorovy zákony na šíření optických vlnoploch v zemské atmosféře a zavedl univerzální parametr r_0 , který navždy změnil chápání atmosférického seeingu a položil teoretický základ adaptivní optiky.

8.1 Fyzika atmosférické turbulence a Kolmogorovova kaskáda

Zemská atmosféra je neustále zahřívána slunečním zářením absorbovaným povrchem a dynamicky promíchávána větry. Vznikající proudění má vysoké Reynoldsovo číslo ($Re = \frac{vL}{\nu} \gg 10^5$), což vede k turbulentnímu režimu.

Lewis Fry Richardson a Andrej Kolmogorov popsali turbulenci jako **hierarchickou kaskádu vírů**:

- Vnější škála turbulence (L_0 , Outer Scale):** Kinetická energie je vnášena do atmosféry na velkých prostorových měřítkách (střih větru, konvekce) o rozměrech typicky $L_0 \approx 10$ až 100 metrů.
- Setrvačná suboblast (Inertial Subrange):** Víry o rozměru r v intervalu $l_0 \ll r \ll L_0$ jsou nestabilní a bez energetických ztrát se rozpadají na menší a menší víry. V tomto režimu je turbulence homogenní a izotropní.
- Vnitřní škála turbulence (l_0 , Inner Scale):** Na mikroskopických měřítkách $l_0 \approx 1$ až 10 milimetrů začíná dominovat molekulární viskozita vzduchu, která disipuje kinetickou energii vírů přímo v teplo.

Kolmogorovův zákon postuluje, že v setrvačné suboblasti závisí statistické vlastnosti rychlostního pole výhradně na měrné disipační rychlosti energie ϵ . Strukturní funkce rychlosti $D_v(r) = \langle |\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 \rangle$ se řídí slavným zákonem dvou třetin:

$$D_v(r) = C_v^2 r^{2/3}$$

8.2 Fluktuace teploty a strukturní konstanta indexu lomu $C_n^2(h)$

Turbulentní víry mechanicky promíchávají vzdušné masy o různých teplotách. Index lomu suchého vzduchu n závisí na tlaku P [hPa] a absolutní teplotě T [K] podle **Gladstoneovy–Daleovy relace**:

$$n - 1 \approx 77,6 \times 10^{-6} \frac{P}{T}$$

Protože fluktuace tlaku se v turbulentním plynu vyrovnávají rychlostí zvuku téměř okamžitě, jsou mikrofluktuace indexu lomu δn způsobeny téměř výhradně lokálními teplotními gradienty δT :

$$\delta n \approx -77,6 \times 10^{-6} \frac{P}{T^2} \delta T$$

Strukturní funkce indexu lomu $D_n(r)$ v trojrozměrném prostoru splňuje Kolmogorovův mocninný zákon:

$$D_n(r) = \langle [n(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - n(\mathbf{x})]^2 \rangle = C_n^2 r^{2/3}$$

kde C_n^2 je **strukturní konstanta indexu lomu** [$\text{m}^{-2/3}$]. Veličina C_n^2 charakterizuje intenzitu optické turbulence v dané výšce h nad terénem:

- U zemského povrchu v přízemní mezní vrstvě (Boundary Layer, $h < 500 \text{ m}$): $C_n^2 \approx 10^{-13}$ až $10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ (silná turbulence způsobená ohřevem půdy).
- Ve volné troposféře ($h \approx 2$ až 8 km): $C_n^2 \approx 10^{-16}$ až $10^{-17} \text{ m}^{-2/3}$ (velmi klidné vrstvy).
- V oblasti tropopauzy a tryskového proudění (Jet Stream, $h \approx 10$ až 13 km): C_n^2 lokálně stoupá na $10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ v důsledku silného vertikálního střihu větru.

Jedním z nejčastěji používaných analytických modelů pro vysokohorské observatoře je **Hufnagelův-Valleyův model** ($HV_{5/7}$):

$$C_n^2(h) = 5,94 \times 10^{-53} \left(\frac{v_{\text{wind}}}{27} \right)^2 h^{10} e^{-h/1000} + 2,7 \times 10^{-16} e^{-h/1500} + A e^{-h/100}$$

8.3 Friedův koherentní parametr r_0

Světelná vlna z hvězdy vstupuje do atmosféry jako dokonale rovinná vlnoplocha. Po průchodu sloupcem turbulentního vzduchu o výšce H pod zenitovým úhlem γ získá náhodnou prostorovou fázovou fluktuaci $\phi(\mathbf{x}) = k \int \delta n(\mathbf{x}, z) dz$.

David L. Fried (1966) odvodil prostorovou **fázovou strukturní funkci** $D_\phi(r)$ na rovině apertury:

$$D_\phi(r) \equiv \langle |\phi(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \phi(\mathbf{x})|^2 \rangle = 2,914 k^2 (\sec \gamma) r^{5/3} \int_0^\infty C_n^2(h) dh$$

kde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ je vlnové číslo a $\sec \gamma = \frac{1}{\cos \gamma}$ zohledňuje prodloužení optické dráhy v atmosféře při odklonu od zenitu.

Fried definoval **koherentní průměr turbulence** r_0 (Friedův parametr) tak, aby fázový rozptyl napříč kruhovou clonou o průměru r_0 byl roven přesně $1,0299 \text{ rad}^2 \approx 1 \text{ rad}^2$:

$$D_\phi(r) \equiv 6,88 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{5/3}$$

Srovnáním obou výrazů obdržíme fundamentální definici:

$$r_0 = \left[0,423 k^2 (\sec \gamma) \int_0^\infty C_n^2(h) dh \right]^{-3/5} = \left[0,423 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^\infty C_n^2(h) dh \right]^{-3/5}$$

Vytknutím vlnové délky λ dostáváme klíčovou škálovací závislost Friedova parametru:

$$r_0(\lambda, \gamma) \propto \lambda^{6/5} (\cos \gamma)^{3/5}$$

Fyzikální interpretace Friedova parametru:

1. Pro malý dalekohled s průměrem apertury $D < r_0$ je vlnoplocha na apertuře téměř rovinná (pouze se náhodně naklání). Teleskop dosahuje svého teoretického difrakčního limitu $\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$.
2. Pro velký dalekohled s $D \gg r_0$ je apertury pokryta stovkami až tisíci vzájemně nekoherentních buněk o průměru r_0 . Rozlišení přístroje se nezlepšuje s rostoucím D , ale zůstává uzamčeno na hodnotě:

$$\theta_{\text{seeing}} \approx 0,976 \frac{\lambda}{r_0} \propto \lambda^{-1/5}$$

Pro vynikající vysokohorskou observatoř (Paranal, Mauna Kea, La Palma) je typická hodnota ve viditelném oboru ($\lambda = 500 \text{ nm}$) v zenitu $r_0 \approx 15$ až 20 cm , což odpovídá seeingu:

$$\theta_{\text{seeing}} \approx \frac{5 \times 10^{-7} \text{ m}}{0,17 \text{ m}} \text{ rad} \approx 2,94 \times 10^{-6} \text{ rad} \approx 0,6''$$

8.4 Časové a úhlové koherentní škály: τ_0 a θ_0

Atmosférické víry se nad teleskopem pohybují rychlostí větru $v(h)$. Podle Taylorovy hypotézy „zamrzlé turbulence“ (frozen turbulence hypothesis) se turbulentní profil při rychlém průletu nemění, nýbrž je unášen horizontálním větrem.

1. Greenwoodův koherentní čas (τ_0)

Darryl Greenwood (1977) definoval časovou škálu, po jejímž uplynutí se fáze vlnoplochy změní o 1 rad :

$$\tau_0 \equiv 0,314 \frac{r_0}{\bar{v}} \propto \lambda^{6/5}$$

kde $\bar{v}$ je vážená rychlost větru napříč atmosférou:

$$\bar{v} = \left[\frac{\int_0^\infty C_n^2(h) v(h)^{5/3} dh}{\int_0^\infty C_n^2(h) dh} \right]^{3/5}$$

Pro $\lambda = 500 \text{ nm}$, $r_0 = 15 \text{ cm}$ a $\bar{v} = 15 \text{ m/s}$ je $\tau_0 \approx 3 \text{ ms}$. To určuje frekvenci práce adaptivní optiky: systém musí měřit a korigovat vlnoplochu frekvencí $f \approx \frac{1}{\tau_0} \geq 500$ až 1000 Hz !

2. Izoplanatický úhel (θ_0)

Při pozorování dvou hvězd separovaných úhlem θ procházejí jejich světelné svazky ve výšce h navzájem posunutými zónami atmosféry o vzdálenost $\Delta x = h\theta$. **Izoplanatický úhel** θ_0 je definován jako maximální úhlová vzdálenost, pro niž je fázový rozdíl mezi oběma svazky menší než 1 rad^2 :

$$\theta_0 \equiv 0,314 \frac{r_0}{\bar{h}} \propto \lambda^{6/5}$$

kde $\bar{h}$ je efektivní vážená výška turbulence:

$$\bar{h} = \left[\frac{\int_0^\infty C_n^2(h) h^{5/3} dh}{\int_0^\infty C_n^2(h) dh} \right]^{3/5}$$

Ve viditelném oboru je θ_0 pouhé 2" až 3", v blízké infračervené oblasti (K -pásmo, 2,2 μm) však vzrůstá na 15" až 20".

8.5 Vědecký simulační kód v Pythonu: Závislost parametrů seeingu na vlnové

délce

```
import numpy as np

def atmospheric_seeing_parameters(r0_500nm_cm=15.0, wind_speed_ms=15.0,
altitude_eff_km=5.0):
    """
    Výpočet škálování r0, seeingu, Greenwoodova času a izoplanatického úhlu pro různé
    spektrální pásma.
    """
    bands = [
        ("U (Ultrafialové)", 365.0),
        ("V (Viditelné)", 550.0),
        ("R (Červené)", 650.0),
        ("J (Infračervené)", 1250.0),
        ("H (Infračervené)", 1650.0),
        ("K (Infračervené)", 2200.0),
        ("L (Střední IR)", 3500.0)
    ]

    r0_ref_m = (r0_500nm_cm / 100.0)
    lambda_ref_m = 500e-9

    print("=====")
    print("ŠKÁLOVÁNÍ ATMOSFÉRICKÉHO SEEINGU NAPŘÍČ SPEKTREM (Kolmogorovův model)")
    print(f"Reference: r0(500 nm) = {r0_500nm_cm:.1f} cm | v_wind = {wind_speed_ms:.1f} m/s | h_eff = {altitude_eff_km:.1f} km")
    print("=====")
    print(f"{'Spektrální pásmo':<20} | {'Lambda [nm]':<11} | {'r0 [cm]':<8} | {'Seeing ["]':<10} | {'tau0 [ms]':<9} | {'theta0 ["]':<10}")
    print("-----")

    for name, wl_nm in bands:
        wl_m = wl_nm * 1e-9
        # r0 ~ lambda^(6/5)
        r0 = r0_ref_m * (wl_m / lambda_ref_m)**(1.2)
        # Seeing FWHM ~ 0.976 * lambda / r0
        seeing_rad = 0.976 * wl_m / r0
        seeing_arcsec = seeing_rad * (180.0 / np.pi) * 3600.0
        # Greenwoodův čas tau0 = 0.314 * r0 / v
        tau0_ms = (0.314 * r0 / wind_speed_ms) * 1000.0
        # Izoplanatický úhel theta0 = 0.314 * r0 / h
        theta0_rad = 0.314 * r0 / (altitude_eff_km * 1000.0)
        theta0_arcsec = theta0_rad * (180.0 / np.pi) * 3600.0

        print(f"{name:<20} | {wl_nm:<11.0f} | {r0*100:<8.2f} | {seeing_arcsec:<10.3f} | {tau0_ms:<9.2f} | {theta0_arcsec:<8.2f}")
```

```
print("=====")

if __name__ == "__main__":
    atmospheric_seeing_parameters()
```

Kapitola 9: Speckle interferometrie a šťastné zobrazování Lucky Imaging

❶ ZAJÍMAVOST

Historický kontext V roce 1970 publikoval francouzský astronom Antoine Labeyrie v časopise *Astronomy & Astrophysics* epochální článek, v němž prokázal, že krátké expozice pořízené velkým teleskopem obsahují nedegradovanou difrakční informaci zakódovanou v jemných interferenčních skvrnkách (speckles). O osm let později (1978) spočetl David L. Fried statistickou pravděpodobnost, že atmosféra nad dalekohledem na krátký okamžik zcela „utichne“, což dalo vzniknout moderní technice šťastného zobrazování (Lucky Imaging).

9.1 Fyzika krátkých expozic: Od seeingového kotouče ke specklům

Pozorujeme-li hvězdu velkým dalekohledem ($D \gg r_0$) v konvenčním režimu s dlouhou expozicí ($t_{\text{exp}} \gg \tau_0$, typicky desítky sekund až minuty), prochází světlo tisíce nezávislých stavů turbulentní atmosféry. Jednotlivé náhodně se posouvající fázové poruchy se vzájemně překrývají a integrují do rozmazaného gaussovského **seeingového kotouče** o úhlové šířce:

$$\theta_{\text{seeing}} \approx \frac{\lambda}{r_0}$$

Zkrátíme-li však expoziční čas pod Greenwoodův koherentní čas ($t_{\text{exp}} \leq \tau_0 \approx 5$ až 20 ms), atmosféra pro daný snímek doslova „zamrzne“. Vlnoplocha dopadající na aperturu teleskopu je v tomto okamžiku zvlhna, ale stacionární.

Aperturu o průměru D si můžeme představit jako mozaiku složenou z přibližně:

$$N_{\text{sub}} \approx \left(\frac{D}{r_0} \right)^2$$

vzájemně nekoherentních koherentních domén o průměru r_0 . Světelné vlny z těchto subapertur spolu v ohniskové rovině interferují a vytvářejí komplexní granulární interferenční obrazec tvořený desítkami až stovkami jasných bodových skvrnek – **specklů** (obr. 9.1).

Každá jednotlivá skvrnka má úhlový rozměr odpovídající **teoretickému difrakčnímu limitu celého teleskopu**:

$$\theta_{\text{speckle}} \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Zatímco celá obálka skvrnkového pole má rozměr seeingu (λ/r_0), uvnitř každého jednotlivého specklu je plně zachována difrakční informace odpovídající plnému průměru D !

9.2 Labeyrieho speckle interferometrie

Antoine Labeyrie si uvědomil, že přestože je prostorové rozložení specklů náhodné a při prostém sčítání intenzit snímků $\sum I_k$ se vysokofrekvenční informace zprůměruje do rozmazané seeingové skvrny, ve Fourierově doméně lze difrakční informaci zachovat.

Zavedeme prostorovou frekvenci $\mathbf{u} = (u, v)$ na obloze. Fourierův obraz k -tého krátkoexpozičního snímku $i_k(\mathbf{x})$ je dán konvolučním teorémem:

$$\hat{I}_k(\mathbf{u}) = \hat{O}(\mathbf{u}) \cdot \hat{S}_k(\mathbf{u})$$

kde $\hat{O}(\mathbf{u})$ je Fourierova transformace skutečného intenzitního rozložení pozorovaného astronomického objektu a $\hat{S}_k(\mathbf{u})$ je okamžitá optická přenosová funkce soustavy atmosféra–teleskop.

Pokud spočteme Fourierovo **výkonové spektrum** (Power Spectrum) a zprůměrujeme jej přes soubor M nezávislých expozic ($M \approx 10^3$ až 10^5), dostáváme:

$$\langle |\hat{I}(\mathbf{u})|^2 \rangle = |\hat{O}(\mathbf{u})|^2 \cdot \langle |\hat{S}(\mathbf{u})|^2 \rangle$$

Veličina $\langle |\hat{S}(\mathbf{u})|^2 \rangle$ se nazývá **speckle přenosová funkce** (Speckle Transfer Function, STF). Zásadním objevem bylo zjištění, že zatímco konvenční dlouhoexpoziční přenosová funkce klesá k nule již na seeingové frekvenci $u_{\text{seeing}} \approx \frac{r_0}{\lambda}$, speckle přenosová funkce zůstává nenulová až k absolutnímu difrakčnímu limitu apertury:

$$u_{\text{diff}} = \frac{D}{\lambda}$$

Aplikace na těsné binární hvězdy

Je-li pozorovaným objektem těsná dvojhvězda se složkami o úhlové separaci $\Delta\theta$ a poměru jasností r , její Fourierův obraz je modulován kosinoidou:

$$|\hat{O}(\mathbf{u})|^2 \propto 1 + \frac{2r}{1+r^2} \cos(2\pi\mathbf{u} \cdot \Delta\theta)$$

Ve Fourierově spektru $\langle |\hat{I}(\mathbf{u})|^2 \rangle$ vznikají charakteristické rovnoběžné interferenční proužky. Z jejich periody a orientace lze určit úhlovou vzdálenost složek $\Delta\theta$ a poziční úhel s přesností na zlomky milivteřiny (např. separaci $0,02''$ na 4m dalekohledu).

Fázový problém a bispektrální analýza

Labeyrieho metoda dává pouze absolutní hodnotu Fourierovy transformace $|\hat{O}(\mathbf{u})|$, nikoliv její fázi $\arg[\hat{O}(\mathbf{u})]$ (fázový problém Fourierovy optiky). Pro plnou rekonstrukci nesymetrických 2D obrazů vyvinuli Gerd Weigelt a Peter Nisenson metodu **speckle maskování** (trojitá korelace a bispektra). Definujeme bispektrum jako součin tří prostorových frekvencí tvořících uzavřený trojúhelník $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$:

$$B(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \langle \hat{I}(\mathbf{u}_1) \hat{I}(\mathbf{u}_2) \hat{I}^*(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \rangle$$

Fáze bispektra (tzv. uzávěrová fáze) je imunní vůči atmosférickým fázovým posunům a umožňuje rekurzivní rekonstrukci skutečné fáze objektu.

9.3 Technika šťastného zobrazování (Lucky Imaging)

Zatímco speckle interferometrie vyžaduje náročnou inverzní Fourierovu matematickou rekonstrukci, metoda **šťastného zobrazování** (Lucky Imaging) představuje přímou a elegantní cestu k difrakčnímu limitu v reálném čase.

Friedova statistika klidné atmosféry

David L. Fried (1978) položil fundamentální otázku: *Jaká je pravděpodobnost P_{lucky} , že se v daném zlomku sekundy náhodně stane, že v celém sloupci atmosféry nad aperturou o průměru D nevzniknou žádné významné fázové poruchy (tj. fázový rozptyl napříč celou aperturou nepřekročí $\sigma_\phi^2 \leq 1 \text{ rad}^2$)?*

Pro Kolmogorovovu turbulenci odvodil Fried exponenciální vztah:

$$P_{\text{lucky}} \approx 5,6 \exp \left[-0,1557 \left(\frac{D}{r_0} \right)^2 \right]$$

Tato rovnice ukazuje dramatickou závislost na bezrozměrném poměru apertury k Friedovu parametru D/r_0 :

- Pro $D/r_0 = 1$: $P_{\text{lucky}} \approx 4,8$ (vlnoplocha je téměř neustále difrakčně čistá),
- Pro $D/r_0 = 3$: $P_{\text{lucky}} \approx 5,6 \exp(-1,40) \approx 1,38 \Rightarrow \approx 25 \%$,
- Pro $D/r_0 = 5$: $P_{\text{lucky}} \approx 5,6 \exp(-3,89) \approx 0,114 \Rightarrow \approx 11 \%$,
- Pro $D/r_0 = 7$: $P_{\text{lucky}} \approx 5,6 \exp(-7,63) \approx 0,0027 \Rightarrow \approx 0,27 \%$,
- Pro $D/r_0 \geq 10$: $P_{\text{lucky}} \rightarrow 10^{-7}$ (pro obří dalekohledy $D \geq 8 \text{ m}$ je šance na náhodně čistou atmosféru prakticky nulová).

Z toho plyne klíčový závěr: Pro dalekohledy středních průměrů ($D \approx 1$ až $2,5$ metru) na kvalitních vysokohorských stanicích ($r_0 \approx 20 \text{ cm} \Rightarrow D/r_0 \approx 5$ až 10) je několik procent pořízených snímků téměř dokonale difrakčně limitovaných!

9.4 Hardwarová realizace a algoritmus Shift-and-Add

Rozvoj Lucky Imaging byl v 90. letech limitován čtecím šumem klasických CCD senzorů (5 až $10 e^-$), který při krátkých expozicích (15 ms) zcela přehlušil slabý signál hvězd.

Zlom nastal s vynálezem **EMCCD detektorů** (Electron-Multiplying CCD) a moderních vědeckých **sCMOS** senzorů:

- Lavinové násobení náboje v multiplikačním registru ještě před čtecím zesilovačem efektivně redukuje efektivní čtecí šum pod $0,1 e^-$ při snímkovací frekvenci 30 až 100 Hz !

Algoritmus zpracování Lucky Imaging:

1. **Akvizice:** Nasnímání velkého datového souboru (např. $50\,000$ snímků s expozicí 15 ms).
2. **Kvalitativní třídění (Frame Selection):** Každý snímek je analyzován a je mu přiřazena hodnota ostrosti – typicky špičková intenzita (Strehl ratio) nejjasnějšího pixelu referenční hvězdy uvnitř izoplanatického pole.
3. **Výběr nejlepších („šťastných“) snímků:** Vybere se předem stanovený zlomek nejostřejších snímků – typicky nejlepších 1% , 5% nebo 10% .

4. **Zarovnání a sečtení (Shift-and-Add):** Místo prostého průměrování celých snímků algoritmus lokalizuje polohu nejjasnějšího specklu na referenční hvězdě s subpixelovou přesností, posune celý snímek tak, aby tyto nejostřejší píky přesně splynuly, a provede vážený součet.

Výsledkem je složený obraz s ostrým centrálním difrakčním jádrem o velikosti teoretického limitu $\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$ a Strehlovým číslem $S \approx 0,20$ až $0,40$, obklopeným nízkým seeingovým halo. Na 2,5m dalekohledu NOT na La Palmě dosahuje přístroj AstraLux rozlišení $0,05''$ ve viditelném světle, což plně konkuruje Hubbleovu vesmírnému teleskopu.

9.5 Vědecký simulační kód v Pythonu: Friedova pravděpodobnost a Lucky Imaging

```
import numpy as np

def fried_lucky_probability(D_over_r0_array):
    """
    Výpočet Friedovy pravděpodobnosti klidné vlnoplochy P_lucky pro pole poměrů D / r0.
    P_lucky ~ 5.6 * exp(-0.1557 * (D / r0)^2)
    """
    prob = 5.6 * np.exp(-0.1557 * (D_over_r0_array**2))
    # Pravděpodobnost nemůže přesáhnout 100 %
    prob = np.clip(prob, 0.0, 1.0)
    return prob

def simulate_shift_and_add():
    print("=====")
    print("STATISTIKA ŠŤASTNÉHO ZOBRAZOVÁNÍ (LUCKY IMAGING - Friedův model)")
    print("=====")
    print(f"{'D / r0':<10} | {'Pravděpodobnost P_lucky':<25} | {'Počet snímků na 1 ostrý'}")
    print("-----")

    ratios = np.array([1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 10.0, 12.0])
    probs = fried_lucky_probability(ratios)

    for r, p in zip(ratios, probs):
        if p > 0.0:
            n_frames = int(np.round(1.0 / p))
            p_str = f"{p*100:.3f} %"
            n_str = f"~ {n_frames:,} snímků"
        else:
            p_str = "< 1e-6 %"
            n_str = "Neměřitelně mnoho"
        print(f"{'r':<10.1f} | {'p':<25} | {'n':<25}")

    print("=====")
    print("Závěr: Lucky Imaging je vysoce efektivní pro pozemní dalekohledy s D/r0 <= 6.")
    print("=====")

if __name__ == "__main__":
    simulate_shift_and_add()
```

Část IV: Adaptivní optika a interferometrie

❗ ZAJÍMAVOST

Tematický přehled Části IV Čtvrtá část monografie reprezentuje absolutní technologický vrchol moderní pozemní astronomie. Zabývá se aktivní fázovou kontrolou optických vlnoploch v reálném čase (adaptivní optika) a metodami prostorové koherence a syntézy apertury na interferometrických bázích stovek metrů (optická a infračervená interferometrie). Tyto systémy umožňují zkoumat horizonty černých děr, povrchy vzdálených hvězd a atmosféry exoplanet s úhlovým rozlišením v řádu milivteřin.

Překonání limitů pozemské astronomie

Po celá staletí platilo nepřekročitelné pravidlo: sebevětší pozemní dalekohled nemůže ve viditelném světle překročit úhlové rozlišení přibližně $0,5''$ až $1''$ dané atmosférickou turbulencí. V posledních třech desetiletích však dvě komplementární technologie toto paradigma definitivně prolomily:

1. **Adaptivní optika (Adaptive Optics, AO):** Měří okamžité zkreslení přicházející vlnoplochy vlnoplochovým senzorem (Shack–Hartmann, pyramidový senzor) a v uzavřené zpětnovazební smyčce o frekvenci přes 1000 Hz mechanicky deformuje povrch tenkého zrcadla (deformable mirror) pomocí piezoelektrických či elektromagnetických aktuátorů. Tím je fázová chyba atmosféry v reálném čase zcela vymazána a dalekohled o průměru 8 až 39 metrů dosahuje svého plného difrakčního limitu $\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$.
1. **Optická interferometrie dlouhých bází (Long–Baseline Optical Interferometry):** Fyzicky kombinuje světelné svazky z několika vzájemně vzdálených dalekohledů a měří prostorovou koherenci pole. Podle van Cittert–Zernikeova teorému je komplexní koherenční stupeň μ_{12} roven dvourozměrné Fourierově transformaci prostorového rozložení jasu zdroje. Syntézou apertury na bázích stovek metrů (VLTI na Paranal, CHARA na Mount Wilsonu) dosahuje rozlišení až $0,0005''$ ($0,5\text{ mas}$).

Tato část obsahuje dvě stěžejní kapitoly:

1. **Kapitola 10: Adaptivní optika: Shack–Hartmannovy senzory, deformovatelná zrcadla a laserové vodící hvězdy LGS** Architektura uzavřené zpětnovazební smyčky AO. Princip Shack–Hartmannova senzoru mikročoček a výpočet gradientů centroidu. Pyramidový vlnoplochový senzor. Typy deformovatelných zrcadel: piezoelektrické, piezokeramické, MEMS a adaptivní sekundární zrcadla (VLT DSM). Rekonstrukce vlnoplochy v reálném čase (RTC). Problém referenčních zdrojů: přirozené vodící hvězdy (NGS) a umělé laserové hvězdy (LGS) v sodíkové vrstvě mezoféry (výška 90 km, 589 nm). Jev kuželového efektu (focal anisoplanatism), tomografická adaptivní optika (LTAO, GLAO) a multikonjugovaná adaptivní optika (MCAO).
1. **Kapitola 11: Optická a infračervená interferometrie: van Cittert–Zernikeův teorém, VLTI a CHARA** Klasická koherence záření: prostorová a časová koherence, Michelsonův hvězdný interferometr. Rigorózní odvození van Cittert–Zernikeova teorému. Rovina prostorových frekvencí (u, v) a pokrytí apertury rotací Země. Atmosférický fázový šum a uzávěrová fáze (closure phase) pro eliminaci chyb. Přední světové interferometrické observatoře: ESO Very Large Telescope Interferometer (VLTI) a CHARA Array. Astrofyzikální aplikace: přímé měření úhlových průměrů hvězd, protoplanetární disky a obíhající hvězdy kolem supermasivní černé díry Sgr A*.

Kapitola 10: Adaptivní optika: Shack–Hartmannovy senzory, deformovatelná zrcadla a laserové vodící hvězdy LGS

❗ ZAJÍMAVOST

Historický kontext V roce 1953 navrhl americký astronom Horace W. Babcock v časopise *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* myšlenku kompenzovat atmosférické zkreslení v reálném čase pomocí elektrostatičticky deformovatelného zrcadla. Technologie té doby však neumožňovala realizaci. Teprve v 70. a 80. letech vedl vojenský výzkum optického sledování družic (Strategic Defense Initiative) k sestrojení prvních funkčních systémů adaptivní optiky, které byly v 90. letech odtajněny a integrovány na observatoře ESO a Keck.

10.1 Architektura uzavřené smyčky adaptivní optiky

Základním cílem adaptivní optiky (Adaptive Optics, AO) je měřit a kompenzovat dynamické fázové poruchy vlnoplochy $\phi(\mathbf{x}, t)$ v reálném čase s takovou přesností, aby výsledné Strehlovo číslo dosáhlo hodnot $S \geq 0,60$ až $0,90$.

Typický systém adaptivní optiky pracuje v **uzavřené zpětnovazební smyčce** (closed-loop) a sestává ze čtyř klíčových subsystémů:

1. **Rychlé korekční zrcadlo náklonu (Tip–Tilt Mirror, TTM):** Odstraňuje globální náklon vlnoplochy (módy Z_2 a Z_3), který nese více než 87 % celkové disperze fázových chyb Kolmogorovy turbulence.
2. **Deformovatelné zrcadlo (Deformable Mirror, DM):** Optický element s proměnným profilem povrchu korigující fázové aberace vyšších řádů (defokus, koma, astigmatismus a vysoké prostorové frekvence).
3. **Dichroické dělicí zrcadlo (Dichroic Beamsplitter):** Odděluje světelný svazek podle vlnové délky – např. viditelné světlo ($\lambda < 0,9 \mu\text{m}$) směřuje do vlnoplochového senzoru, zatímco infračervené světlo ($\lambda > 1 \mu\text{m}$) pokračuje do vědecké kamery či spektrografu.
4. **Vlnoplochový senzor (Wavefront Sensor, WFS):** Měří okamžité prostorové gradienty vlnoplochy.
5. **Počítač v reálném čase (Real–Time Controller, RTC):** Vysoce výkonný výpočetní systém s maticovými GPU či FPGA procesory, který v milisekundových intervalech přepočítává naměřené signály ze senzoru na řídicí napětí jednotlivých aktuátorů deformovatelného zrcadla.

Celková časová odezva smyčky τ_{loop} musí splňovat podmínku:

$$\tau_{\text{loop}} \leq \tau_0$$

kde τ_0 je Greenwoodův koherentní čas atmosféry (1 až 5 ms). Zpoždění smyčky zahrnuje integrační dobu senzoru, čtecí čas detektoru, výpočetní latenci RTC a mechanickou odezvu aktuátorů.

10.2 Shack–Hartmannův vlnoplochový senzor

Většina optických detektorů registruje pouze intenzitu světla $I = |E|^2$, nikoliv jeho fázi ϕ . Vlnoplochový senzor musí převést neviditelné fázové odchylky na měřitelné prostorové posuny intenzity.

Shack–Hartmannův senzor (vyvinutý Rolandem Shackem a Benem Platem v roce 1971 na bázi Hartmannova testu) využívá dvourozměrnou matici mikročoček (lenslet array) umístěnou v rovině konjugované s výstupní pupilou dalekohledu:

- Průměr každé mikročočky d_{sub} je volen tak, aby byl menší nebo roven Friedovu parametru ($d_{\text{sub}} \leq r_0$). Vlnoplochu dopadající na jednotlivou mikročočku lze proto považovat za lokálně rovinnou s konstantním sklonem (α_x, α_y) .
- Každá mikročočka o ohniskové vzdálenosti f_L vytvoří v ohniskové rovině na CCD/CMOS senzoru difrakční bodový obraz.

Vztah mezi sklonem vlnoplochy a posunem těžiště

Při příchodu ideální rovinné vlnoplochy vytvoří mikročočky pravidelnou ortogonální mřížku referenčních bodů (x_0, y_0) . Při zvlněné vlnoploše se lokální fázový gradient promítne jako úhlový náklon paprsku:

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \alpha_y = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y}$$

Tento náklon způsobí posun těžiště difrakční skvrny $(\Delta x, \Delta y)$ oproti referenční poloze:

$$\Delta x = f_L \alpha_x = f_L \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \Delta y = f_L \alpha_y = f_L \frac{\partial W}{\partial y}$$

Poloha těžiště skvrny (centroidu) je počítána algoritmem středu tíže (Center of Gravity, CoG):

$$x_c = \frac{\sum_{i,j} x_i I_{i,j}}{\sum_{i,j} I_{i,j}}, \quad y_c = \frac{\sum_{i,j} y_j I_{i,j}}{\sum_{i,j} I_{i,j}}$$

kde $I_{i,j}$ je intenzita pixelu se souřadnicemi (x_i, y_j) .

Pyramidový vlnoplochový senzor

Alternativou navrženou Robertem Ragazzonim (1996) je **pyramidový senzor**, kde do ohniskové roviny dopadá svazek na čtyřbokou skleněnou mikrojehtanovou pyramidu. Ta rozdělí světlo do čtyř směrů a následná čočka vytvoří čtyři obrazy výstupní pupily. Srovnáním intenzit mezi těmito čtyřmi pupilami lze rekonstruovat fázové sklony s vyšší citlivostí a dynamickým rozsahem než u Shack–Hartmanna.

10.3 Architektura deformovatelných zrcadel

Deformovatelné zrcadlo (Deformable Mirror, DM) fyzicky moduluje optickou dráhu odraženého světla podle vztahu:

$$\Delta \text{OPD}(x, y) = 2 h(x, y)$$

kde $h(x, y)$ je lokální mechanický zdvih povrchu zrcadla (faktor 2 plyne z odrazu světla).

Podle konstrukčního principu rozlišujeme:

1. **Piezelektrická zrcadla s kontinuální čelní deskou (Continuous-facesheet DM):** Tenká skleněná či sklokeramická membrána o tloušťce 1 až 2 mm je ze zadní strany podepřena maticí piezelektrických aktuátorů (PZT). Typický zdvih činí $\pm 5 \mu\text{m}$ s rezonanční frekvencí jednotek kilohertzů.
2. **MEMS deformovatelná zrcadla:** Využívají mikromechanické technologie na křemíkovém čipu. Tisíce miniaturních elektrostatických aktuátorů ovládají mikromembránu na ploše pouhých několika centimetrů čtverečních (např. přístroj SPHERE na VLT využívá MEMS zrcadlo se 1377 aktuátory).
3. **Adaptivní sekundární zrcadla (Adaptive Secondary Mirrors, ASM):** Nejvýkonnější koncepce současnosti aplikovaná na VLT (UT4) a LBT. Sekundární zrcadlo dalekohledu o průměru 1,1 metru je vyrobeno jako extrémně tenká skořepina ze Zeroduru o tloušťce pouhých 1,1 mm. Skořepina se bezdotykově vznáší na magnetickém polštáři tvořeném **1170 elektromagnetickými cívkami** (voice coils) s referenčním tělesem z materiálu Zerodur. Výhodou je eliminace jakýchkoliv dodatečných reflexních ploch v optické dráze.

10.4 Matematická rekonstrukce vlnoplochy (RTC)

Proces rekonstrukce spojuje naměřené posuny centroidů se silami či napětími aktuátorů.

Označme $\mathbf{s}$ sloupcový vektor všech naměřených posunů (slopes) ze senzoru (pro N_{sub} subapertur má vektor délku $2N_{\text{sub}}$) a $\mathbf{a}$ vektor řídicích napětí pro M_{act} aktuátorů. V lineární aproximaci platí:

$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \mathbf{a}$$

kde $\mathbf{D}$ je **interakční matice** (Interaction Matrix) soustavy o rozměrech $2N_{\text{sub}} \times M_{\text{act}}$, která se experimentálně kalibruje postupným buzením jednotlivých aktuátorů.

Úkolem RTC je v každém časovém kroku vyřešit inverzní úlohu a najít vektor řízení $\mathbf{a}$ pro daný okamžitý vektor $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{R} \mathbf{s}$$

kde $\mathbf{R}$ je **rekonstrukční matice**. Protože je matice $\mathbf{D}$ obecně obdélníková a může obsahovat nefyzikální či šumové módy (např. píšť a waffle-mód), provádí se inverze pomocí **singulárního rozkladu** (Singular Value Decomposition, SVD):

$$\mathbf{D} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \implies \mathbf{R} = \mathbf{D}^+ = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{U}^T$$

kde $\mathbf{\Sigma}^+$ obsahuje převrácené hodnoty singulárních čísel, přičemž nulová či extrémně malá singulární čísla (šum) jsou vyfiltrována.

10.5 Laserové vodící hvězdy (LGS) a tomografické systémy

Problém referenčního zdroje (Sky Coverage)

Pro měření fázových poruch vyžaduje vlnoplochový senzor jasnou referenční hvězdu (Natural Guide Star, NGS) o zdánlivé jasnosti $V \leq 12$ až 14 mag ležící uvnitř izoplanatického úhlu ($\theta \leq \theta_0 \approx 10''$ až $20''$ v infračerveném oboru). Pravděpodobnost, že se v takto těsné blízkosti náhodného vědeckého cíle nachází dostatečně jasná hvězda, je na celé obloze nižší než 1 %!



Čtyři laserové paprsky 4LGSF na jednotkovém dalekohledu Yepun (UT4) observatoře ESO VLT na Cerro Paranal v Chile excitující sodíkovou vrstvu v mezoféře.

Fyzika sodíkových laserových hvězd (Sodium LGS)

K vyřešení tohoto problému vyvinuli astronomové umělou **laserovou vodící hvězdu** (Laser Guide Star, LGS). Na observatoři VLT (přístroj 4LGSF) se do atmosféry vysílají čtyři vysoce výkonné pevnolátkové laserové paprsky o výkonu 22 W každý:

- Vlnová délka laseru je přesně naladěna na atomární rezonanční přechod sodíku D_{2a} ($\lambda = 589,159 \text{ nm}$).
- Paprsek prochází troposférou a stratosférou a ve výšce $h \approx 90$ až 100 km nad zemským povrchem vstupuje do **mezoférické sodíkové vrstvy** (vznikající neustálým odpařováním mikrometeoritů).
- Excitované atomy sodíku rezonančně fluoreskují a vytvářejí zářící bodový zdroj o průměru několika decimetrů. Zpětně rozptýlené světlo slouží vlnoplochovým sensorům jako umělá referenční hvězda o jasnosti ekvivalentní $V \approx 9$ až 11 mag dostupná v libovolném směru na obloze!

Fyzikální limity LGS:

1. **Tip-tilt neurčitost:** Laserový paprsek prochází cestou vzhůru turbulentní atmosférou, kde se náhodně vychyluje, a při cestě dolů podléhá stejnému vychýlení. LGS proto nemůže poskytnout informaci o absolutním náklonu vlnoplochy (chvění obrazu). K tomu je stále zapotřebí slabá přirozená hvězda (stačí však jasnost $V \approx 18$ až 19 mag , což zvyšuje pokrytí oblohy na více než 85 %).
2. **Kuželový efekt (Focal Anisoplanatism):** LGS se nachází v konečné výšce $H \approx 90 \text{ km}$. Světelné paprsky konvergují k dalekohledu ve tvaru kužele, nikoliv válce z nekonečna. Na okrajích velké apertury ($D \geq 8 \text{ m}$) proto paprsky neprocházejí stejným sloupcem turbulence jako světlo ze vzdálené hvězdy.

Pokročilá tomografická adaptivní optika

Pro překonání kuželového efektu a rozšíření korigovaného zorného pole využívají nejmodernější dalekohledy (VLT, ELT) vícečetné lasery a tomografické rekonstrukce:

- **LTAO (Laser Tomography AO):** Více laserů sonduje atmosférický válec nad dalekohledem a tomografický algoritmus rekonstruuje trojrozměrné rozložení turbulence $C_n^2(h)$.

- **MCAO (Multi-Conjugate Adaptive Optics):** Systém využívá několik deformovatelných zrcadel, z nichž každé je opticky konjugováno do jiné výšky atmosféry (např. zrcadlo DM1 na terén 0 km, DM2 do výšky 4 km a DM3 do výšky 12 km). Korigované zorné pole se rozšiřuje z původních 15'' na více než 2' (přístroje GeMS na Gemini South a MAD na VLT).
-

10.6 Vědecký simulační kód v Pythonu: Shack–Hartmannův rekonstruktor

```
import numpy as np

def simulate_shack_hartmann():
    """
        Simulace Shack-Hartmannova senzoru se 4x4 subaperturami a rekonstrukce náklonů
        vlnoplochy.
    """
    grid_n = 4
    sub_pitch_m = 0.5 # velikost subapertury 0.5 m (celkový průměr dalekohledu 2.0 m)
    f_lenslet_m = 0.05 # ohnisková vzdálenost mikročoček 50 mm

    # Model zadané vlnoplochy: náklon v ose x + mírný defokus
    #  $W(x, y) = a_x * x + a_{def} * (x^2 + y^2)$ 
    a_tilt_x = 2.5e-6 # náklon 2.5 um/m
    a_defocus = 1.2e-6 # defokus

    # Souřadnice středů mikročoček
    x_coords = np.linspace(-0.75, 0.75, grid_n)
    y_coords = np.linspace(-0.75, 0.75, grid_n)

    slopes_x = []
    slopes_y = []

    print("=====")
    print("SIMULACE SHACK-HARTMANNOVA VLNOPLOCHOVÉHO SENZORU (4x4 subapertury)")
    print("=====")
    print(f'{"Subapertury (i, j)":<20} | {"x [m]":<7} | {"y [m]":<7} | {"Posun dx [um]":<15} | {"Posun dy [um]"}')
    print("-----")

    for i, xi in enumerate(x_coords):
        for j, yj in enumerate(y_coords):
            # Gradient vlnoplochy dW/dx, dW/dy v bodě (xi, yj)
            grad_x = a_tilt_x + 2.0 * a_defocus * xi
            grad_y = 2.0 * a_defocus * yj

            # Posun ohniskové skvrny na detektoru: dx = f * grad_x
            dx_um = f_lenslet_m * grad_x * 1e6
            dy_um = f_lenslet_m * grad_y * 1e6

            slopes_x.append(dx_um)
            slopes_y.append(dy_um)

            if (i in [0, 3]) and (j in [0, 3]):
                print(f"Subaperture ({i}, {j}) | {xi:<7.2f} | {yj:<7.2f} | {dx_um:<15.3f} | {dy_um:<15.3f}")
```

```
print("-----")
print(f"Celkem změřeno gradientů (slopes): {len(slopes_x)*2} (2 x 16 parametrů)")
print(f"Střední posun v ose X (Tilt složka): {np.mean(slopes_x):.3f} um")
print("=====")

if __name__ == "__main__":
    simulate_shack_hartmann()
```

Kapitola 11: Optická a infračervená interferometrie: van Cittert–Zernikeův teorém, VLTi a CHARA

❗ ZAJÍMAVOST

Historický kontext V roce 1920 použili Albert A. Michelson a Francis G. Pease na 100palcovém Hookerově teleskopu na Mount Wilsonu šestimetrový interferometrický nosník se zrcadly a provedli první přímé měření úhlového průměru jiné hvězdy než Slunce: červeného veleobra Betelgeuse v Orionu ($\theta = 0,047''$). Dnešní optické interferometry spojují samostatné teleskopy na bázích stovek metrů a dosahují rozlišení pod jednu milivteřinu.

11.1 Koherence elektromagnetického pole

Klasická teorie koherence zkoumá statistickou korelaci mezi fluktuacemi elektromagnetického pole v různých bodech prostoru a v různých časových okamžicích.

Rozlišujeme dvě základní formy koherence:

1. **Časová koherence (Temporal Coherence):** Vyjadřuje míru korelace pole v témže prostorovém bodě mezi dvěma časovými okamžiky oddělenými zpožděním τ . Koherenční doba τ_c a koherenční délka l_c jsou svázány se spektrální šířkou $\Delta\lambda$ vyzařování vztahem:

$$l_c = c\tau_c \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

Pro úzkopásmový laser je l_c v řádu metrů až kilometrů, avšak pro astronomické širokopásmové filtry ($\Delta\lambda/\lambda \approx 0,15$) je koherenční délka pouhých několik mikrometrů ($l_c \approx 5$ až $15 \mu\text{m}$)! Všechny optické dráhy paprsků z různých teleskopů interferometru proto musí být vyrovnány pomocí pohyblivých zpožďovacích linek s přesností na desítky nanometrů.

1. **Prostorová koherence (Spatial Coherence):** Měří vzájemnou fázovou korelaci mezi dvěma prostorovými body $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ v témže časovém okamžiku ($\tau = 0$). Přestože jednotlivé atomy na povrchu hvězdy emitují světlo zcela nezávisle a nekorelovaně (spontánní emise), při šíření do velké vzdálenosti získává vlnoplocha v souladu se statistickou fyzikou vysoký stupeň prostorové koherence.

11.2 Van Cittert–Zernikeův teorém

Vztah mezi prostorovým rozložením jasu kosmického zdroje a prostorovou koherencí záření formulovali nizozemští fyzici Pieter Hendrik van Cittert (1934) a Frits Zernike (1938).

Uvažujme plošný, prostorově nekoherentní kvazimonochromatický zdroj na nebeské sféře ve velké vzdálenosti R . Úhlové souřadnice bodů na zdroji označme směrovými kosiny $\sigma = (\alpha, \beta)$ a rozložení intenzity jasu zdroje $I(\alpha, \beta)$.

Nechť dva přijímací teleskopy umístěné v rovině kolmé ke směru ke zdroji v bodech $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ vymezují vektor prostorové báze:

$$\mathbf{B} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (B_x, B_y)$$

Definujeme vzájemnou koherenční funkci Γ_{12} elektrických polí $E_1(t)$ a $E_2(t)$:

$$\Gamma_{12} = \langle E_1(t) E_2^*(t) \rangle = \iint_{\text{zdroj}} I(\alpha, \beta) \frac{e^{-ikR_1}}{R_1} \frac{e^{ikR_2}}{R_2} d\alpha d\beta$$

kde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Rozdíl geometrických vzdáleností od zdroje k oběma teleskopům lze v paraxiálním přiblížení zapsat jako:

$$R_1 - R_2 \approx \alpha B_x + \beta B_y$$

Zavedeme bezrozměrné prostorové frekvence (u, v) vyjádřené v jednotkách vlnové délky:

$$u \equiv \frac{B_x}{\lambda}, \quad v \equiv \frac{B_y}{\lambda}$$

Normalizovaný **komplexní stupeň koherence** (komplexní viditelnost, Complex Visibility) $\mathcal{V}(u, v)$ má tvar:

$$\mathcal{V}(u, v) \equiv \frac{\Gamma_{12}}{\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}} = \frac{\iint I(\alpha, \beta) \exp[-i2\pi(u\alpha + v\beta)] d\alpha d\beta}{\iint I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}$$

Tato fundamentální rovnost představuje **van Cittert–Zernikeův teorém**: *Komplexní viditelnost interferenčních proužků změřená na bázi (B_x, B_y) je rovna dvourozměrné Fourierově transformaci normalizovaného prostorového rozložení intenzity jasu zdroje $I(\alpha, \beta)$ na prostorových frekvencích $(u, v) = (B_x/\lambda, B_y/\lambda)$.*

11.3 Viditelnost proužků a model rovnoměrného disku

Interferometr spojuje světlo z obou teleskopů a vytváří na detektoru interferenční proužky s intenzitou:

$$I(\delta) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\mathcal{V}| \cos(2\pi \frac{\delta}{\lambda} + \arg \mathcal{V})$$

kde δ je rozdíl optické dráhy.

Klasická **Michelsonova viditelnost proužků** (kontrast) V je definována jako:

$$V \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\mathcal{V}|$$

Analytický model rovnoměrně zářícího hvězdného disku

Předpokládejme, že hvězda je sféricky symetrický rovnoměrný disk (Uniform Disk, UD) o úhlovém průměru θ_{UD} . Vzhledem k rotační symetrii závisí viditelnost pouze na velikosti báze $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$ a Fourierova transformace přechází v Hankelovu transformaci:

$$\mathcal{V}(B) = \frac{2J_1(\pi B \theta_{\text{UD}} / \lambda)}{\pi B \theta_{\text{UD}} / \lambda}$$

kde J_1 je Besselova funkce 1. druhu.

První nula funkce nastává pro:

$$\frac{\pi B_0 \theta_{UD}}{\lambda} \approx 3,8317 \implies \theta_{UD} \approx 1,22 \frac{\lambda}{B_0}$$

Změřením závislosti viditelnosti $V(B)$ na délce báze a určením nulového bodu B_0 lze přímo určit **úhlový průměr hvězdy** s přesností na zlomky procent!

11.4 Rovina (u, v) a uzávěrová fáze (Closure Phase)

Protože teleskopy jsou pevně ukotveny k rotující Zemi, vektor báze promítнутý na nebeskou sféru opisuje v průběhu noci eliptickou křivku v rovině prostorových frekvencí (u, v) (tzv. Earth Rotation Aperture Synthesis). Kombinací několika teleskopů na různých bázích lze postupně pokrýt podstatnou část (u, v) roviny a inverzní Fourierovou transformací rekonstruovat dvourozměrný obraz objektu.

Atmosférický fázový šum a uzávěrová fáze

Atmosférická turbulence vnáší do dráhy každého teleskopu i náhodnou fázovou chybu $\psi_i(t)$. Naměřená fáze interferenčních proužků Φ_{ij} mezi teleskopy i a j se skládá ze skutečné fáze objektu ϕ_{ij} a atmosférické chyby:

$$\Phi_{ij} = \phi_{ij} + \psi_i - \psi_j$$

Protože atmosférické posuny ψ_i kolísají v řádu milisekund o celé radiány, skutečná fáze ϕ_{ij} je znehodnocena.

V roce 1958 navrhl britský radioastronom R. C. Jennison geniální řešení: **uzávěrovou fázi** (Closure Phase) pro trojici teleskopů 1, 2 a 3:

$$\Phi_{\text{closure}} \equiv \Phi_{12} + \Phi_{23} + \Phi_{31}$$

Dosazením fázových složek:

$$\Phi_{\text{closure}} = (\phi_{12} + \psi_1 - \psi_2) + (\phi_{23} + \psi_2 - \psi_3) + (\phi_{31} + \psi_3 - \psi_1) = \phi_{12} + \phi_{23} + \phi_{31}$$

Všechny atmosférické a přístrojové fázové chyby ψ_1, ψ_2, ψ_3 se přesně algebraicky vyruší! Uzávěrová fáze je invariantní vůči chybám atmosféry a umožňuje spolehlivou obrazovou rekonstrukci nesymetrických zdrojů (hvězdné skvrny, akreční toky, asymetrické obálky).

11.5 Světové observatoře: VLTI a CHARA Array

1. ESO Very Large Telescope Interferometer (VLTI)

VLTI na observatoři Cerro Paranal v Chile tvoří absolutní špičku světové infračervené interferometrie:

- Kombinuje buď čtyři hlavní dalekohledy Unit Telescopes (UTs, $D = 8,2 \text{ m}$), nebo čtyři pomocné pohyblivé dalekohledy Auxiliary Telescopes (ATs, $D = 1,8 \text{ m}$) s délkou bází od 8 metrů do **202 metrů**.
- Podzemní tunely o délce 130 metrů obsahují vozíky zpoždovacích linek (Delay Lines) pohybující se po magnetických drahách s přesností na nanometry.
- **Přístroj GRAVITY**: čtyřteleskopový svazkový kombinátor v pásmu K ($2,2 \mu\text{m}$) vybavený adaptivní optikou a sledovačem proužků (fringe tracker). Dosahuje astrometrické přesnosti $10 \mu\text{as}$ ($0,000010''$)! Pomocí GRAVITY změřil Reinhard Genzel a jeho tým oběžné dráhy hvězd (S2) v bezprostřední blízkosti

supermasivní černé díry Sagittarius A* v centru naší Galaxie, ověřil gravitační rudý posuv a Schwarzschildovu precesi obecné teorie relativity (Nobelova cena za fyziku 2020).

- **Přístroj MATISSE:** první čtyřsvazkový spektro-interferometr pracující ve středním infračerveném pásmu (3 až $13\ \mu\text{m}$, pásma L , M , N), určený k mapování vnitřních zón protoplanetárních disků a prachových torů aktivních galaktických jader (AGN).

2. CHARA Array (Mount Wilson Observatory)

Interferometr CHARA (Center for High Angular Resolution Astronomy) provozovaný Georgia State University v Kalifornii:

- Sestává ze šesti 1m dalekohledů uspořádaných do písmene Y na Mount Wilsonu.
- Nejdelší interferometrická báze činí **331 metrů**.
- Pracuje v optickém a blízkém infračerveném oboru ($0,5$ až $2,4\ \mu\text{m}$) a dosahuje bezkonkurenčního úhlového rozlišení až $0,0002''$ ($0,2\ \text{mas}$)!
- Tým CHARA poprvé přímo zobrazil deformovaný rotační tvar rychle rotujících hvězd (Altair, Vega), gravitační ztemnění (von Zeipelův teorém) a obíhající materiál v zákrytovém systému Epsilon Aurigae.

11.6 Vědecký simulační kód v Pythonu: Křivka viditelnosti a měření průměru

hvězdy

```
import numpy as np
from scipy.special import j1

def uniform_disk_visibility(baseline_m, angular_diameter_mas, wavelength_um=2.2):
    """
    Výpočet viditelnosti proužků V(B) pro model rovnoměrného hvězdného disku.
    baseline_m: pole délek bází v metrech
    angular_diameter_mas: úhlový průměr hvězdy v milivteřinách (mas)
    wavelength_um: vlnová délka v mikrometrech
    """
    # Převod úhlu z mas na radiány
    theta_rad = (angular_diameter_mas * 1e-3) * (np.pi / (180.0 * 3600.0))
    wl_m = wavelength_um * 1e-6

    # Bezrozměrný argument:  $x = \pi * B * \theta / \lambda$ 
    x = np.pi * baseline_m * theta_rad / wl_m
    x_safe = np.where(x == 0.0, 1e-12, x)

    # Viditelnost  $V = |2 * J_1(x) / x|$ 
    V = np.abs(2.0 * j1(x_safe) / x_safe)
    return V, x

def analyze_vlti_observation():
    # Model hvězdy typu K-obr: theta = 3.0 mas
    theta_mas = 3.0
    wl_um = 2.2 # K-pásmo (VLT GRAVITY)

    # Řada bází VLT od 10 do 200 metrů
    baselines = np.linspace(1.0, 220.0, 500)
    V, x = uniform_disk_visibility(baselines, theta_mas, wl_um)

    # První nula nastává v  $x = 3.8317$ :  $B_0 = 1.22 * \lambda / \theta$ 
    theta_rad = (theta_mas * 1e-3) * (np.pi / (180.0 * 3600.0))
    b0_m = 1.21966 * (wl_um * 1e-6) / theta_rad

    print("=====")
    print("SIMULACE INTERFEROMETRICKÉHO MĚŘENÍ PRŮMĚRU HVĚZDY (VLT - K-pásmo 2.2 um)")
    print("=====")
    print(f"Modelový úhlový průměr hvězdy : {theta_mas:.2f} mas ({theta_mas*1e-3:.5f}°)")
    print(f"Vlnová délka pozorování : {wl_um:.1f} um")
    print(f"Teoretická nulová báze (B0) : {b0_m:.2f} metrů")
    print("-----")
    print(f"{'Báze B [m]':<12} | {'Viditelnost V':<15} | {'Stav interferogramu'}")
    print("-----")
```

```
sample_baselines = [20.0, 60.0, 100.0, b0_m, 170.0, 200.0]
for b in sample_baselines:
    v_val, _ = uniform_disk_visibility(np.array([b]), theta_mas, wl_um)
    v = v_val[0]
    if abs(b - b0_m) < 1.0:
        status = "PRVNÍ NULOVÝ BOD (V = 0) - určení průměru"
    elif b < b0_m:
        status = "Hlavní difrakční lalok"
    else:
        status = "Sekundární difrakční lalok"
    print(f"{b:<12.1f} | {v:<15.4f} | {status}")

print("=====")

if __name__ == "__main__":
    analyze_vlti_observation()
```

Část V: Přílohy a vědecký aparát

📌 ZAJÍMAVOST

Tematický přehled Části V Závěrečná část monografie poskytuje rigorózní matematický aparát, praktické programátorské nástroje, sbírku patnácti plně řešených numerických úloh a komplexní encyklopedický glosář. Slouží studentům i vědeckým pracovníkům jako referenční manuál pro pokročilé optické výpočty a laboratorní i observatorní praxi.

Struktura příloh a doplňkových materiálů

Tato část obsahuje čtyři rozsáhlé dodatky:

1. **Dodatek A: Odvození Seidelových koeficientů** Detailní matematické odvození rozvoje eikonálu a Seidelových sumačních formulí pro centrovanou optickou soustavu sférických a asférických ploch. Trasování paraxiálního okrajového a hlavního paprsku. Explicitní vzorce pro Seidelovy sumy $S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV}, S_V$ a asférické příspěvky závislé na Schwarzschildově konické konstantě κ .
1. **Dodatek B: Optické simulace v Pythonu s balíčky Ray-tracing a POPPY** Praktický programátorský manuál pro modelování astronomických optických soustav v prostředí Python. Výpočet vlnové difrakce pomocí balíčku `poppy` (Physical Optics Propagation in Python, vyvinutého pro JWST ve Space Telescope Science Institute) a implementace maticového trasování paprsků.
1. **Dodatek C: Sbíрка 15 řešených úloh** Patnáct reprezentativních výpočetních úloh pokrývajících celou šíři astronomické optiky: od návrhu achromatického dubletu přes aplanatické parametry Ritchey-Chrétienova teleskopu, výpočet Strehlova čísla a seeingového limitu až po Shack-Hartmannovy senzory a interferometrii VLTI. Všechny úlohy obsahují detailní postup odvození, dosažení konstant i numerické výsledky.
1. **Dodatek D: Encyklopedický glosář** Abecedně řazený heslář klíčových odborných pojmů z geometrické optiky, vlnové teorie, optického inženýrství, adaptivní optiky a interferometrie s přesnými definicemi a fyzikálními vztahy.

Dodatek A: Odvození Seidelových koeficientů

❗ ZAJÍMAVOST

Úvod k dodatku V tomto dodatku provádíme rigorózní matematické odvození Seidelových sumačních formulí pro centrovanou optickou soustavu tvořenou obecnými asférickými kuželosečkovými plochami. Ukážeme, jak lze pomocí paraxiálního trasování pouhých dvou paprsků (okrajového a hlavního) přesně určit všech pět primárních aberací celé soustavy.

A.1 Trasování paraxiálních paprsků a refrakční invarianty

Uvažujme centrovanou optickou soustavu složenou z k optických ploch. Každá plocha $j \in \{1, \dots, k\}$ má vrcholový poloměr křivosti R_j (křivost $c_j = \frac{1}{R_j}$), Schwarzschildovu konickou konstantu κ_j a odděluje prostředí s indexem lomu n_j (před plochou) a n'_j (za plochou). Osová vzdálenost k následující ploše je d_j .

Soustavou trasujeme dva paraxiální paprsky:

1. **Okrajový paprsek (Marginal Ray):** Vychází z osového bodu předmětu ($y_0 = 0$) a na ploše j má výšku y_j a sklon za plochou u'_j .
2. **Hlavní paprsek (Chief Ray):** Vychází z okraje předmětu, prochází středem aperturní clony (kde $\bar{y}_{\text{stop}} = 0$) a na ploše j má výšku $\bar{y}_j$ a sklon za plochou $\bar{u}'_j$.

Na každém rozhraní definujeme paraxiální úhly dopadu měřené vůči normále k ploše:

$$i_j = c_j y_j + u_j, \quad \bar{i}_j = c_j \bar{y}_j + \bar{u}_j$$

Paraxiální Snellův zákon $n_j i_j = n'_j i'_j$ definuje **Abbéův refrakční invariant** okrajového paprsku A_j a hlavního paprsku $\bar{A}_j$:

$$A_j \equiv n_j i_j = n'_j i'_j = n_j (c_j y_j + u_j)$$

$$\bar{A}_j \equiv n_j \bar{i}_j = n'_j \bar{i}'_j = n_j (c_j \bar{y}_j + \bar{u}_j)$$

Zákony paraxiálního přenosu mezi plochami j a $j + 1$ jsou dány vztahy:

$$y_{j+1} = y_j + d_j u'_j, \quad \bar{y}_{j+1} = \bar{y}_j + d_j \bar{u}'_j$$

$$u'_j - u_j = -\frac{A_j}{n'_j} \Delta_j \left(\frac{1}{n} \right) \cdot n_j = -y_j c_j \frac{n'_j - n_j}{n'_j}$$

kde operátor $\Delta_j(X) \equiv X'_j - X_j$ označuje skok veličiny X na ploše j .

Lagrangeův–Helmholtzův invariant soustavy

Kombinací obou paprsků dostáváme veličinu invariantní podél celé optické soustavy napříč všemi plochami i mezerami:

$$H = n_j(\bar{y}_j u_j - y_j \bar{u}_j) = n'_j(\bar{y}_j u'_j - y_j \bar{u}'_j) = \text{konst.}$$

Veličina H je přímo úměrná velikosti zorného pole a světelnosti soustavy.

A.2 Sférický příspěvek k Seidelovým sumám

Pro čistě sférické plochy ($\kappa_j = 0$) odvodil Seidel explicitní vztahy pro příspěvky jednotlivých ploch k aberacím vlnoplochy.

Definujeme základní veličinu pro sférickou vadu na ploše j :

$$S_{I,j}^{(0)} = -A_j^2 y_j \Delta_j \left(\frac{u}{n} \right) = -A_j^2 y_j \left(\frac{u'_j}{n'_j} - \frac{u_j}{n_j} \right)$$

Příspěvky k ostatním čtyřem Seidelovým aberacím lze vyjádřit pomocí jednoduchých algebraických relací obsahujících poměr invariantů $\frac{\bar{A}_j}{A_j}$:

1. **Primární koma:**

$$S_{II,j}^{(0)} = \frac{\bar{A}_j}{A_j} S_{I,j}^{(0)}$$

1. **Primární astigmatismus:**

$$S_{III,j}^{(0)} = \left(\frac{\bar{A}_j}{A_j} \right)^2 S_{I,j}^{(0)}$$

1. **Petzvalovo zakřivení (sklenutí pole):** Tato aberace je výjimečná – vůbec nezávisí na poloze clony ani na průběhu paprsků, nýbrž výhradně na křivosti plochy c_j a indexech lomu:

$$S_{IV,j} = -H^2 c_j \Delta_j \left(\frac{1}{n} \right) = -H^2 c_j \left(\frac{1}{n'_j} - \frac{1}{n_j} \right)$$

1. **Primární distorze:**

$$S_{V,j}^{(0)} = \frac{\bar{A}_j}{A_j} [S_{III,j}^{(0)} + S_{IV,j}] - \left(\frac{\bar{A}_j}{A_j} \right)^3 S_{I,j}^{(0)} + \dots = \frac{\bar{A}_j}{A_j} S_{III,j}^{(0)} + \frac{\bar{A}_j}{A_j} S_{IV,j}$$

A.3 Asférický příspěvek kuželosečkových zrcadel

Uvažujme kuželosečkovou plochu s nenulovou konickou konstantou $\kappa_j = -e_j^2$. Průhyb plochy (sagitta) se od referenční sféry o stejném vrcholovém poloměru $R_j = \frac{1}{c_j}$ liší o člen čtvrtého řádu:

$$z(r) = \frac{c_j r^2}{2} + (1 + \kappa_j) \frac{c_j^3 r^4}{8} + \dots = z_{\text{sphere}}(r) + \kappa_j \frac{c_j^3 r^4}{8}$$

Rozdíl optické dráhy vnesený asférickou deformací čtvrtého řádu vyvolá dodatečný příspěvek k Seidelovým sumám:

$$\Delta S_{I,j} = -\kappa_j c_j^3 y_j^4 \Delta_j(n)$$

Pro **odrazné zrcadlo** ve vzduchu/vakuu je index lomu dopadajícího světla $n_j = 1$ a odraženého světla $n'_j = -1$. Skok indexu lomu je tedy:

$$\Delta_j(n) = n'_j - n_j = -1 - 1 = -2$$

Dosazením obdržíme fundamentální vztah pro asférický příspěvek zrcadla ke sférické aberaci:

$$\Delta S_{I,j} = 2 \kappa_j c_j^3 y_j^4$$

Příspěvky asféricity k ostatním aberacím plynou z geometrie posunu hlavního paprsku na ploše a závisejí na poměru výšek $\frac{\bar{y}_j}{y_j}$:

$$\Delta S_{II,j} = \left(\frac{\bar{y}_j}{y_j} \right) \Delta S_{I,j} = 2 \kappa_j c_j^3 y_j^3 \bar{y}_j$$

$$\Delta S_{III,j} = \left(\frac{\bar{y}_j}{y_j} \right)^2 \Delta S_{I,j} = 2 \kappa_j c_j^3 y_j^2 \bar{y}_j^2$$

$$\Delta S_{IV,j} \equiv 0 \quad (\text{Asféricita plochy neovlivňuje Petzvalovo zakřivení!})$$

$$\Delta S_{V,j} = \left(\frac{\bar{y}_j}{y_j} \right)^3 \Delta S_{I,j} = 2 \kappa_j c_j^3 y_j \bar{y}_j^3$$

A.4 Celkové Seidelovy sumy a vlnové koeficienty

Celkové koeficienty aberací 3. řádu pro libovolnou centrovanou optickou soustavu jsou dány prostým součtem přes všechny optické plochy $j = 1, \dots, k$:

$$S_I = \sum_{j=1}^k \left(S_{I,j}^{(0)} + \Delta S_{I,j} \right)$$

$$S_{II} = \sum_{j=1}^k \left(S_{II,j}^{(0)} + \Delta S_{II,j} \right)$$

$$S_{III} = \sum_{j=1}^k \left(S_{III,j}^{(0)} + \Delta S_{III,j} \right)$$

$$S_{IV} = \sum_{j=1}^k S_{IV,j}$$

$$S_V = \sum_{j=1}^k \left(S_{V,j}^{(0)} + \Delta S_{V,j} \right)$$

Vztah mezi Seidelovými sumami S_I až S_V a koeficienty vlnové aberace W_{jkm} v expanzi vlnoplochy má tvar:

$$W_{040} = \frac{1}{8} S_I \quad (\text{sférická vada})$$

$$W_{131} = \frac{1}{2} S_{II} \quad (\text{koma})$$

$$W_{222} = \frac{1}{2} S_{III} \quad (\text{astigmatismus})$$

$$W_{220} = \frac{1}{4} (S_{III} + S_{IV}) \quad (\text{sklenutí pole})$$

$$W_{311} = \frac{1}{2} S_V \quad (\text{distorze})$$

Pro soustavu dvou zrcadel (primár M_1 , sekundár M_2) s clonou přímo na primárním zrcadle ($\bar{y}_1 = 0$) dostáváme přímo podmínky:

- $S_I = 0 \implies$ eliminace sférické aberace,
- $S_{II} = 0 \implies$ eliminace komy.

Vyřešením této soustavy dvou lineárních rovnic pro neznámé konické konstanty κ_1 a κ_2 dostáváme přesně Schwarzschildovy rovnice pro aplanát Ritchey-Chrétien uvedené v Kapitole 4.

Dodatek B: Optické simulace v Pythonu s balíčky Ray-tracing a POPPY

📌 ZAJÍMAVOST

Úvod k dodatku Moderní optické inženýrství a výzkum na velkých observatořích se neobejdou bez precizních numerických simulací šíření vlnoplochy. Tento dodatek představuje praktický průvodce využitím jazyka Python v astronomické optice – od difrakčních simulací s mezinárodním vědeckým balíčkem `poppy` až po vlastní algoritmy prostorového vektorového trasování paprsků (3D ray-tracing).

B.1 Balíček POPPY (Physical Optics Propagation in Python)

Balíček `poppy` byl vyvinut v institutu STScI (Space Telescope Science Institute) v Baltimoru pod vedením dr. Marshalla Perrina pro modelování optických systémů vesmírných observatoří James Webb Space Telescope (JWST) a Nancy Grace Roman Space Telescope.

`poppy` implementuje:

- Fraunhoferovu i Fresnelovu propagaci vlnoplochy,
- libovolné analytické i segmentované apertury (např. 18 hexagonů JWST),
- centrální obstrukce a difrakční ramena pavouka,
- vlnoplochové chyby zadané Zernikeovými polynomy (`ZernikeWFE`) nebo fázovými mapami,
- výpočet rozptylové funkce bodu (Point Spread Function, PSF) s využitím **maticové Fourierovy transformace** (Matrix Fourier Transform, MFT), která umožňuje spočítat PSF na přesně definované detektorové mřížce bez nutnosti masivního doplňování nulami (zero-padding).

Ukázka simulace teleskopu v balíčku POPPY

Následující kód demonstruje vytvoření optické soustavy dalekohledu o průměru 2,4 metru (třída HST) s centrální obstrukcí a aberací vlnoplochy:

```

"""
Příklad použití balíčku POPPY pro výpočet PSF a Strehlova čísla.
Poznámka: Vyžaduje instalaci balíčku pomocí: pip install poppy
"""
try:
    import poppy
    import numpy as np

def simulate_telescope_poppy():
    # Vytvoření optického systému s efektivní ohniskovou vzdáleností f = 57.6 m
    osys = poppy.OpticalSystem(name="Teleskop 2.4m f/24")

    # 1. Primární kruhová apertura o průměru 2.4 m
    primary = poppy.CircularAperture(radius=1.2, name="Primární zrcadlo")
    osys.add_pupil(primary)

    # 2. Centrální stínění sekundárním zrcadlem (průměr 0.6 m, obstrukce 25 %)
    secondary = poppy.SecondaryObscuration(secondary_radius=0.3, n_supports=4,
support_width=0.02)
    osys.add_pupil(secondary)

    # 3. Zavedení zbytkových aberací vlnoplochy (Zernikeovy polynomy v nm)
    # Z4 (defokus): 20 nm, Z8 (koma): 25 nm, Z11 (sférická vada): 15 nm
    wfe = poppy.ZernikeWFE(coefficients=[0, 0, 0, 20e-9, 0, 0, 0, 25e-9, 0, 0, 15e-
9], radius=1.2)
    osys.add_pupil(wfe)

    # 4. Ohnisková rovina (detektor s pixely 0.05 arcsec)
    osys.add_detector(pixelscale=0.05, fov_arcsec=3.0)

    # Výpočet monochromatické PSF na vlnové délce 632.8 nm
    psf = osys.calc_psf(wavelength=632.8e-9)

    # Výpis optických metrik
    strehl = poppy.measure_strehl(psf)
    ee = poppy.measure_ee(psf)

    print("=====")
    print("VÝSLEDKY SIMULACE OPTICKÉHO SYSTÉMU (POPPY)")
    print("=====")
    print(f"Vlnová délka (lambda)      : 632.8 nm")
    print(f"Strehlovo číslo soustavy    : {strehl:.4f}")
    print("=====")

except ImportError:
    pass

```

B.2 Vektorové 3D trasování reálných paprsků (Exact Ray-Tracing)

Zatímco paraxiální matice z Kapitoly 1 předpokládají nekonečně malé úhly, skutečný optický návrh vyžaduje trasování paprsků ve 3D prostoru pod libovolnými úhly s využitím přesného vektorového zákona odrazu.

Každý paprsek je charakterizován:

- výchozím bodem $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$,
- jednotkovým směrovým vektorem $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$, kde $|\mathbf{s}| = 1$.

Paprsek se šíří podél přímky $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s}$. Průsečík s asférickou zrcadlovou plochou $z = f(x, y)$ se hledá řešením nelineární algebraické rovnice:

$$z_0 + ts_z - \left[\frac{c(x_0 + ts_x)^2 + c(y_0 + ts_y)^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + \kappa)c^2[(x_0 + ts_x)^2 + (y_0 + ts_y)^2]}} \right] = 0$$

V bodě dopadu $\mathbf{P}$ spočteme jednotkový normálový vektor k ploše $\mathbf{n}$. Směrový vektor odraženého paprsku $\mathbf{s}'$ je dán **vektorovým zákonem odrazu**:

$$\mathbf{s}' = \mathbf{s} - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

Kompletní samostatný vědecký skript: 3D Ray-Tracer

Následující plně funkční skript provádí exaktní 3D trasování marginálního paprsku parabolickým zrcadlem.

```
import numpy as np

class OpticalRay:
    """Reprezentace 3D světelného paprsku v prostoru."""
    def __init__(self, origin, direction):
        self.origin = np.array(origin, dtype=float)
        self.direction = np.array(direction, dtype=float) / np.linalg.norm(direction)

class ConicMirror:
    """Rotačně symetrické kuželosečkové zrcadlo."""
    def __init__(self, R, kappa, diameter):
        self.R = float(R)          # poloměr křivosti vrcholu
        self.c = 1.0 / self.R      # vrcholová křivost
        self.kappa = float(kappa)  # konická konstanta
        self.radius = float(diameter) / 2.0

    def get_sag(self, x, y):
        """Vypočte hloubku plochy z(x, y)."""
        r2 = x**2 + y**2
        radicand = 1.0 - (1.0 + self.kappa) * (self.c**2) * r2
        if radicand < 0:
            return np.nan
        return (self.c * r2) / (1.0 + np.sqrt(radicand))

    def intersect_and_reflect(self, ray):
        """
        Nalezne průsečík paprsku se zrcadlem a vrátí odražený paprsek.
        Pro paraboloid (kappa = -1, z = c*r^2 / 2) lze průsečík řešit exaktně
        analyticky!
        """
        if abs(self.kappa - (-1.0)) < 1e-9:
            # Přesné kvadratické řešení pro paraboloid z = c * (x^2 + y^2) / 2
            # Dosazením x = x0 + t*sx, y = y0 + t*sy, z = z0 + t*sz
            x0, y0, z0 = ray.origin
            sx, sy, sz = ray.direction
            c = self.c

            A = c * (sx**2 + sy**2)
            B = 2.0 * c * (x0 * sx + y0 * sy) - 2.0 * sz
            C_const = c * (x0**2 + y0**2) - 2.0 * z0

            # Kvadratická rovnice A*t^2 + B*t + C = 0
            if abs(A) < 1e-12:
                t = -C_const / B
            else:

```

```

        discriminant = B**2 - 4.0 * A * C_const
        if discriminant < 0:
            return None
        t = (-B - np.sqrt(discriminant)) / (2.0 * A)

        # Bod dopadu P
        P = ray.origin + t * ray.direction

        # Vektor normály k ploše  $F(x, y, z) = c/2*(x^2 + y^2) - z = 0$ 
        # grad F = (c*x, c*y, -1)
        norm = np.array([c * P[0], c * P[1], -1.0])
        norm = norm / np.linalg.norm(norm)

        # Zákon odrazu:  $s_{ref} = s - 2(s \cdot n)n$ 
        s_in = ray.direction
        s_ref = s_in - 2.0 * np.dot(s_in, norm) * norm
        s_ref = s_ref / np.linalg.norm(s_ref)

        return OpticalRay(origin=P, direction=s_ref)
    return None

def run_ray_tracing_demo():
    # Parabolické zrcadlo primáru: R = -2000 mm (f = 1000 mm), průměr 400 mm
    mirror = ConicMirror(R=-2000.0, kappa=-1.0, diameter=400.0)

    print("=====")
    print("EXAKTNÍ 3D RAY-TRACING PARABOLICKÉHO ZRCADLA")
    print("=====")
    print(f"Poloměr křivosti R = {mirror.R:.1f} mm (ohnisko f = {-mirror.R/2:.1f} mm)")
    print(f"Konická konstanta kappa = {mirror.kappa:.1f} (čistý paraboloid)")
    print("-----")

    # Trasování svazku rovnoběžných paprsků podél osy z přicházejících z nekonečna
    test_heights = [0.0, 50.0, 100.0, 150.0, 200.0] # výšky paprsků y v mm

    for y_pos in test_heights:
        # Paprsek začíná v z = 500 mm a míří dolů (-z) k vrcholu zrcadla v z = 0
        in_ray = OpticalRay(origin=[0.0, y_pos, 500.0], direction=[0.0, 0.0, -1.0])
        ref_ray = mirror.intersect_and_reflect(in_ray)

        # Nalezení průsečíku odraženého paprsku s ohniskovou rovinou (z = -R/2 = 1000
mm)

        #  $P_z + t * s_z = -R/2 \Rightarrow t = (f - P_z) / s_z$ 
        focal_z = -mirror.R / 2.0
        t_foc = (focal_z - ref_ray.origin[2]) / ref_ray.direction[2]
        P_focal = ref_ray.origin + t_foc * ref_ray.direction

```

```
print(f"Vstupní výška y = {y_pos:5.1f} mm | Dopad na zrcadlo z =  
{ref_ray.origin[2]:8.5f} mm | Ohniskový bod y = {P_focal[1]:10.2e} mm")  
  
print("-----")  
print("Závěr: Všechny paprsky protínají osu v ohnisku z = 1000.000 mm")  
print("Sférická vada paraboloidu na ose je nulová s numerickou přesností stroje.")  
print("=====")  
  
if __name__ == "__main__":  
    run_ray_tracing_demo()
```

Dodatek C: Sbírka 15 řešených úloh z astronomické optiky

❶ ZAJÍMAVOST

Úvod ke sbírce úloh Tato sbírka obsahuje patnáct detailně řešených výpočetních úloh pokrývajících teorii i praxi astronomické optiky. Každá úloha obsahuje formulaci problému, analytické odvození potřebných fyzikálních rovnic, krok za krokem provedený numerický výpočet s reálnými fyzikálními konstantami a závěrečnou diskuzi výsledku.

Úloha 1: Návrh achromatického dubletu

Zadání: Navrhněte tenký tmelený achromatický dublet o celkové ohniskové vzdálenosti $f = 1000 \text{ mm}$ pracující ve viditelném oboru (spektrální čáry $F = 486,1 \text{ nm}$ a $C = 656,3 \text{ nm}$, reference $d = 587,6 \text{ nm}$). První čočka je vyrobena z korunového skla N-BK7 ($n_d = 1,5168$, $V_d = 64,17$), druhá čočka z flintového skla N-SF11 ($n_d = 1,7847$, $V_d = 25,76$). Určete ohniskové vzdálenosti f_1 , f_2 a optické mohutnosti obou elementů.

Fyzikální princip a vztahy: Celková optická mohutnost tenkého dubletu je $\Phi = \frac{1}{f} = \Phi_1 + \Phi_2$. Podmínka achromatismu (eliminace primární podélné chromatické vady) vyžaduje:

$$\frac{\Phi_1}{V_1} + \frac{\Phi_2}{V_2} = 0 \implies \Phi_2 = -\Phi_1 \frac{V_2}{V_1}$$

Dosazením do součtového vztahu:

$$\Phi_1 = \Phi \frac{V_1}{V_1 - V_2}, \quad \Phi_2 = -\Phi \frac{V_2}{V_1 - V_2}$$

Numerický výpočet:

1. Celková mohutnost: $\Phi = \frac{1}{1,0 \text{ m}} = 1,0 \text{ m}^{-1} = 1,0 \text{ D}$.
2. Rozdíl Abbeových čísel: $V_1 - V_2 = 64,17 - 25,76 = 38,41$.
3. Mohutnost korunové čočky (spojky):

$$\Phi_1 = 1,0 \cdot \frac{64,17}{38,41} = +1,6707 \text{ D} \implies f_1 = \frac{1}{\Phi_1} = +0,5986 \text{ m} = +598,6 \text{ mm}$$

1. Mohutnost flintové čočky (rozptylky):

$$\Phi_2 = -1,0 \cdot \frac{25,76}{38,41} = -0,6707 \text{ D} \implies f_2 = \frac{1}{\Phi_2} = -1,4910 \text{ m} = -1491,0 \text{ mm}$$

Kontrola součtu: $\Phi_1 + \Phi_2 = 1,6707 - 0,6707 = 1,0000 \text{ D}$ ($f = 1000 \text{ mm}$).

Závěr: Spojná čočka z N-BK7 má ohniskovou vzdálenost $+598,6 \text{ mm}$ a rozptylná čočka z N-SF11 má $-1491,0 \text{ mm}$. Soustava spojuje modré (F) a červené (C) světlo do téhož ohniska.

Úloha 2: Parametry a konické konstanty aplanátu Ritchey–Chrétien

Zadání: Vypočtete konstrukční parametry a Schwarzschildovy konické konstanty κ_1, κ_2 pro dalekohled typu Ritchey–Chrétien o průměru primárního zrcadla $D_1 = 2,5$ m a světelnosti $f/8$ ($F = 20,0$ m). Světelnost primárního zrcadla je $f/2,5$ ($f_1 = 6,25$ m), ohnisko je vyvedeno $1,25$ m za vrchol primárního zrcadla ($b = 1,25$ m). **Fyzikální princip a vzorce:**

1. Sekundární zvětšení: $m = \frac{F}{f_1}$.
2. Bezrozměrný parametr zadního vysunutí ohniska: $\beta = \frac{b}{f_1}$.
3. Vzdálenost mezi zrcadly: $d = f_1 \frac{m-\beta}{m+1}$.
4. Poloměry křivosti: $R_1 = -2f_1, R_2 = -\frac{2dm}{m-1-\beta}$.
5. Konické konstanty aplanátu Ritchey–Chrétien:

$$\kappa_1 = -1 - \frac{2(1+\beta)}{m^2(m-\beta)}, \quad \kappa_2 = -\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2 - \frac{2m(m+1)}{(m-1)^3(m-\beta)}$$

Numerický výpočet:

1. $m = \frac{20,0}{6,25} = 3,20$.
2. $\beta = \frac{1,25}{6,25} = 0,20$.
3. Vzdálenost zrcadel: $d = 6,25 \cdot \frac{3,20-0,20}{3,20+1} = 6,25 \cdot \frac{3,00}{4,20} = 4,4643$ m.
4. Poloměry křivosti: $-R_1 = -2 \cdot 6,25 = -12,500$ m, $-R_2 = -\frac{2 \cdot 4,4643 \cdot 3,20}{3,20-1,00-0,20} = -\frac{28,5715}{2,00} = -14,286$ m.
5. Konická konstanta primáru κ_1 :

$$\kappa_1 = -1 - \frac{2(1+0,20)}{3,20^2 \cdot (3,20-0,20)} = -1 - \frac{2,40}{10,24 \cdot 3,00} = -1 - \frac{2,40}{30,72} = -1 - 0,078125 = -1,07813$$

1. Konická konstanta sekundáru κ_2 : - Standardní Cassegrain člen:
 $-\left(\frac{4,20}{2,20}\right)^2 = -(1,90909)^2 = -3,64463$. - Aplanatický korekční člen:
 $-\frac{2 \cdot 3,20 \cdot 4,20}{2,20^3 \cdot 3,00} = -\frac{26,88}{10,648 \cdot 3,00} = -\frac{26,88}{31,944} = -0,84147$. - Celkem:
 $\kappa_2 = -3,64463 - 0,84147 = -4,48610$.

Závěr: Obě zrcadla jsou asférické hyperboloidy: primár má $\kappa_1 = -1,07813$, sekundár má $\kappa_2 = -4,48610$.

Úloha 3: Petzvalovo sklenutí a astigmatismus: RC vs Cassegrain

Zadání: Pro dalekohled z Úlohy 2 ($R_1 = -12,50$ m, $R_2 = -14,286$ m) určete poloměr křivosti Petzvalovy plochy R_P . Určete podélný astigmatický rozdíl Δz_{ast} a rozměr sagitální a tangenciální linie ve vzdálenosti $\theta = 15'$ ($0,25^\circ$) od optické osy. **Fyzikální princip a vzorce:** Pro soustavu dvou zrcadel v zrcadlovém prostoru platí Petzvalův vzorec:

$$\frac{1}{R_P} = 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Příčný astigmatismus vlnoplochy $W_{222} = \frac{1}{2} S_{III} H^2 \rho^2$ vytváří podélné oddělení tangenciálního a sagitálního ohniska $\Delta z = z_T - z_S = 2F^2 \phi^2 \cdot \frac{S_{III}}{H^2}$.

Numerický výpočet:

1. Petzvalova křivost:

$$\frac{1}{R_P} = 2 \left(\frac{1}{-12,50} - \frac{1}{-14,286} \right) = 2(-0,0800 + 0,0700) = 2(-0,0100) = -0,0200 \text{ m}^{-1}$$

$$R_P = \frac{1}{-0,0200} = -50,0 \text{ m}$$

1. Úhel $\theta = 15' = 0,004363 \text{ rad}$. Lineární výška obrazu v ohniskové rovině:

$$y' = F \cdot \tan \theta = 20,0 \text{ m} \cdot 0,004363 = 0,08727 \text{ m} = 87,27 \text{ mm}$$

1. Průhyb Petzvalovy plochy na kraji pole:

$$z_P = \frac{y'^2}{2R_P} = \frac{(0,08727)^2}{2 \cdot (-50,0)} = -\frac{0,007616}{100,0} = -76,2 \text{ } \mu\text{m}$$

Závěr: Petzvalova plocha má poloměr křivosti 50 m (konkávní směrem k sekundáru). Na poloměru 87,3 mm je obraz posunut o 76,2 μm od roviny, což na moderním plochem CCD senzoru vyžaduje dvouočkový rovač pole.

Úloha 4: Hloubka profilu Schmidovy korekční desky

Zadání: Schmidtova komora má průměr vstupní korekční desky $D = 600 \text{ mm}$ ($y_{\max} = 300 \text{ mm}$) a sférické primární zrcadlo se světelností $f/2$ ($f = 1200 \text{ mm}$, poloměr křivosti zrcadla $R = 2400 \text{ mm}$). Deska je vyrobena ze skla N-BK7 s indexem lomu $n = 1,5168$. Vypočítejte celkovou hloubku asférické deformace desky (Peak-to-Valley, P-V) pro achromatický profil s neutrální zónou v $r_0 = \sqrt{3/2} y_{\max}$. **Fyzikální princip a vztahy:** Profil desky je dán vztahem:

$$z(r) = \frac{r^4 - 1,5y_{\max}^2 r^2}{4(n-1)R^3}$$

Minimum profilu nastává v bodě $r = r_0$, kde $\frac{dz}{dr} = 0 \implies 4r_0^3 - 3y_{\max}^2 r_0 = 0 \implies r_0 = \sqrt{0,75} y_{\max} \approx 0,8660 y_{\max}$.

Numerický výpočet:

1. V centru ($r = 0$): $z(0) = 0 \text{ mm}$.

2. V minimu ($r = r_0$): $r_0^2 = 0,75 y_{\max}^2$:

$$z(r_0) = \frac{(0,75 y_{\max}^2)^2 - 1,5 y_{\max}^2 (0,75 y_{\max}^2)}{4(n-1)R^3} = \frac{0,5625 - 1,125}{4(n-1)R^3} y_{\max}^4 = -\frac{0,5625 y_{\max}^4}{4(n-1)R^3}$$

1. Na okraji ($r = y_{\max}$):

$$z(y_{\max}) = \frac{y_{\max}^4 - 1,5 y_{\max}^4}{4(n-1)R^3} = -\frac{0,5000 y_{\max}^4}{4(n-1)R^3}$$

1. Celkový rozkmit P-V je rozdíl mezi maximem v centru (0) a minimem v r_0 :

$$\Delta z_{P-V} = |z(r_0)| = \frac{0,5625 \cdot (0,300 \text{ m})^4}{4 \cdot (1,5168 - 1) \cdot (2,400 \text{ m})^3}$$

- Číselník: $0,5625 \cdot 0,0081 = 0,00455625 \text{ m}^4$.
- Jmenovatel: $4 \cdot 0,5168 \cdot 13,824 = 2,0672 \cdot 13,824 = 28,577 \text{ m}^3$.
- Výsledná hloubka:

$$\Delta z_{P-V} = \frac{0,00455625}{28,577} = 1,594 \times 10^{-4} \text{ m} = 159,4 \mu\text{m}$$

Závěr: Celková hloubka asférického profilu činí $159,4 \mu\text{m}$. Tato mikrometrová asférická plocha přesně eliminuje sférickou vadu sférického zrcadla o průměru 600 mm .

Úloha 5: Strehlovo číslo z RMS chyby vlnoplochy

Zadání: Interferometrické měření $8,2 \text{ m}$ primárního zrcadla dalekohledu VLT prokázalo zbytkové vlnoploché chyby charakterizované třemi Zernikeovými koeficienty: defokus $c_4 = 18 \text{ nm}$, koma $c_7 = 22 \text{ nm}$ a sférická vada $c_{11} = 14 \text{ nm}$. Vypočítejte celkovou RMS chybu vlnoplochy a odpovídající Strehlovo číslo pro vlnové délky $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$ (viditelné světlo) a $\lambda_2 = 2200 \text{ nm}$ (infračervené K -pásmo). **Fyzikální princip a vzorec:** Díky ortonormalitě Zernikeových módů je celková disperze rovna součtu čtverců:

$$\sigma_W = \sqrt{\sum_j c_j^2}$$

Strehlovo číslo podle Maréchalovy aproximace:

$$S \approx \exp \left[- \left(\frac{2\pi}{\lambda} \sigma_W \right)^2 \right]$$

Numerický výpočet:

1. Celková RMS chyba:

$$\sigma_W = \sqrt{18^2 + 22^2 + 14^2} = \sqrt{324 + 484 + 196} = \sqrt{1004} = 31,69 \text{ nm}$$

1. Pro viditelné světlo ($\lambda_1 = 500 \text{ nm}$): - Fázová odchylka: $\sigma_\phi = \frac{2\pi \cdot 31,69}{500} = \frac{199,12}{500} = 0,3982 \text{ rad}$. - Strehlovo číslo: $S_1 \approx \exp(-(0,3982)^2) = \exp(-0,1586) = 0,8533 (85,3 \%)$.

1. Pro infračervené světlo ($\lambda_2 = 2200 \text{ nm}$): - Fázová odchylka: $\sigma_\phi = \frac{2\pi \cdot 31,69}{2200} = 0,0905 \text{ rad}$. - Strehlovo číslo: $S_2 \approx \exp(-(0,0905)^2) = \exp(-0,00819) = 0,9918 (99,2 \%)$.

Závěr: V obou spektrálních oborech je $S > 0,80$, optika zrcadla je tedy excelentně difrakčně limitovaná.

Úloha 6: Vliv 30% centrálního stínění na Airyho disk

Zadání: Teleskop má primární zrcadlo o průměru $D = 1,0$ m a centrální stínění sekundárním zrcadlem o průměru $d_{\text{sec}} = 0,30$ m (lineární obstrukce $\epsilon = 0,30$). Určete relativní pokles špičkové intenzity I_{peak}/I_0 , úhlový poloměr prvního temného prstence a podíl energie v centrálním disku pro $\lambda = 550$ nm. **Fyzikální princip a vzorce:**

1. Geometrická plocha apertury: $A_{\epsilon} = \frac{\pi}{4} D^2 (1 - \epsilon^2)$.
2. Špičková intenzita v ohnisku je úměrná čtverci sběrné plochy:

$$\frac{I_{\text{peak}}(\epsilon)}{I_0} = (1 - \epsilon^2)^2$$

1. První difrakční minimum $v_1(\epsilon)$ se s rostoucím ϵ mírně posouvá k menším hodnotám: pro $\epsilon = 0,30$ je $v_1 \approx 3,60$ (oproti 3,83 u volné apertury).

Numerický výpočet:

1. Pokles špičkové intenzity:

$$\frac{I_{\text{peak}}}{I_0} = (1 - 0,30^2)^2 = (1 - 0,09)^2 = 0,91^2 = 0,8281 \approx 82,8 \%$$

1. Úhlový poloměr prvního minima pro volnou aperturu:

$$\theta_0 = 1,2197 \frac{550 \times 10^{-9}}{1,0} = 6,708 \times 10^{-7} \text{ rad} = 0,138''$$

Pro $\epsilon = 0,30$ ($v_1 \approx 3,60$):

$$\theta_{\epsilon} = \frac{3,60}{\pi} \frac{\lambda}{D} \approx 1,146 \frac{\lambda}{D} = 1,146 \frac{550 \times 10^{-9}}{1,0} = 6,303 \times 10^{-7} \text{ rad} = 0,130''$$

1. Energie v centrálním disku klesá z původních 83,8 % na přibližně 68,2 %. Zbývajících cca 15,6 % toku je přelito do prvního difrakčního kroužku, jehož jasnost vzroste z 1,75 % na 4,8 % centrálního píku.

Závěr: Stínění mírně zúží centrální pík (o 6 %), avšak odčerpá přes 15 % energie do difrakčních prstenců, což snižuje kontrast zobrazení jemných struktur.

Úloha 7: Friedův parametr a seeing napříč spektrem a zenitovým úhlem

Zadání: Na observatoři Paranal činí Friedův parametr v zenitu ($\gamma = 0^\circ$) na referenční vlnové délce $\lambda_0 = 500$ nm hodnotu $r_0 = 18,0$ cm. Vypočtete hodnotu r_0 a úhlovou šířku seeingu θ_{seeing} (FWHM): a) v zenitu pro infračervené pásmo K ($\lambda = 2200$ nm), b) při pozorování ve výšce 30° nad obzorem (zenitový úhel $\gamma = 60^\circ$) pro viditelné světlo (500 nm) a pásmo K . **Fyzikální princip a vzorce:** Škálovací zákon pro Friedův parametr:

$$r_0(\lambda, \gamma) = r_0(\lambda_0, 0^\circ) \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{6/5} (\cos \gamma)^{3/5}$$

Úhlová šířka seeingu:

$$\theta_{\text{seeing}} = 0,976 \frac{\lambda}{r_0}$$

Numerický výpočet:

1. Zenit, pásmo K ($\lambda = 2200 \text{ nm}$): - Poměr vlnových délek: $\frac{2200}{500} = 4,40$. - $(4,40)^{1,2} = 5,966$. - $r_0(K, 0^\circ) = 18,0 \text{ cm} \cdot 5,966 = 107,4 \text{ cm} = 1,074 \text{ m}$. - Seeing v pásmu K :

$$\theta_{\text{seeing}} = 0,976 \cdot \frac{2,2 \times 10^{-6} \text{ m}}{1,074 \text{ m}} = 2,00 \times 10^{-6} \text{ rad} = 2,00 \times 10^{-6} \cdot 206265'' = 0,412''$$

1. Zenitový úhel $\gamma = 60^\circ$ ($\cos 60^\circ = 0,50$): - Zenitový faktor: $(\cos 60^\circ)^{3/5} = (0,50)^{0,60} = 0,65975$. - Viditelné světlo (500 nm): $r_0 = 18,0 \cdot 0,65975 = 11,88 \text{ cm}$.

$$\theta_{\text{seeing}} = 0,976 \cdot \frac{0,5 \times 10^{-6}}{0,1188} = 4,108 \times 10^{-6} \text{ rad} = 0,847'' \text{ (v zenitu byl } 0,559''). \text{ - Pásmo } K (2200 \text{ nm}):$$

$$r_0 = 107,4 \cdot 0,65975 = 70,86 \text{ cm}. \theta_{\text{seeing}} = 0,976 \cdot \frac{2,2 \times 10^{-6}}{0,7086} = 3,031 \times 10^{-6} \text{ rad} = 0,625''.$$

Závěr: V pásmu K narůstá Friedův parametr téměř na šestnásobek (107 cm), díky čemuž je seeing výrazně klidnější ($0,41''$ vs $0,56''$). Při náklonu k obzoru na 30° seeing degraduje zhruba o 50% .

Úloha 8: Greenwoodův koherentní čas a frekvence adaptivní optiky

Zadání: Atmosférická turbulence nad teleskopem je charakterizována efektivním Friedovým parametrem $r_0 = 14,0 \text{ cm}$ na vlnové délce 550 nm a váženou rychlostí větru napříč vrstvami $\bar{v} = 18,0 \text{ m/s}$. Vypočtěte Greenwoodův koherentní čas τ_0 a stanovte minimální operační frekvenci korekční smyčky adaptivní optiky.

Fyzikální princip a vztahy: Greenwoodův koherentní čas definuje mez fázové stacionarity:

$$\tau_0 = 0,314 \frac{r_0}{\bar{v}}$$

Korekční smyčka adaptivní optiky musí stihnout změřit vlnoplochu a nastavit aktuátory dříve, než se fáze změní o více než 1 rad . V praxi je nutná vzorkovací frekvence smyčky splňující Shannonovo-Nyquistovo kritérium a kompenzující zpoždění odezvy:

$$f_{\text{AO}} \geq \frac{1}{\tau_0} \quad (\text{ideálně } 5 \times \text{ až } 10 \times \text{ vyšší})$$

Numerický výpočet:

1. Greenwoodův čas:

$$\tau_0 = 0,314 \cdot \frac{0,140 \text{ m}}{18,0 \text{ m/s}} = \frac{0,04396}{18,0} = 0,002442 \text{ s} = 2,44 \text{ ms}$$

1. Minimální frekvence smyčky:

$$f_{\text{min}} = \frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{0,002442 \text{ s}} \approx 409 \text{ Hz}$$

1. Optimální operační frekvence pro vysoké Strehlovo číslo ($S > 0,70$):

$$f_{\text{opt}} \approx 2,5 \times f_{\text{min}} \approx 1000 \text{ Hz}$$

Závěr: Koherentní čas atmosféry je pouhých 2,44 ms. Systém adaptivní optiky musí pracovat s frekvencí alespoň 1000 Hz (1000 korekcí za sekundu), aby udržel difrakční limit.

Úloha 9: Výpočet pravděpodobnosti pro Lucky Imaging

Zadání: Astronom pozoruje 1,5m dalekohledem na observatoři s Friedovým parametrem $r_0 = 25,0 \text{ cm}$ v pásmu I ($\lambda = 850 \text{ nm}$). Vypočtěte poměr D/r_0 , Friedovu pravděpodobnost čisté expozice P_{lucky} a určete, kolik snímků musí nasnímat s expozicí 20 ms, aby po výběru nejlepších 2 % získal složený obraz z 200 kvalitních snímků. **Fyzikální princip a vzorce:**

1. Poměr $D/r_0 = \frac{1,50}{0,25} = 6,0$.
2. Friedův vztah pro pravděpodobnost difrakčně čisté expozice:

$$P_{\text{lucky}} = 5,6 \exp \left[-0,1557 \left(\frac{D}{r_0} \right)^2 \right]$$

Numerický výpočet:

1. Exponent: $-0,1557 \cdot 6,0^2 = -0,1557 \cdot 36 = -5,6052$.
2. Pravděpodobnost:

$$P_{\text{lucky}} = 5,6 \cdot \exp(-5,6052) = 5,6 \cdot 0,003678 = 0,0206 \approx 2,06 \%$$

1. Požadavek na 200 složených snímků při výběrovém zlomku 2 % ($f_{\text{sel}} = 0,02$):

$$N_{\text{tot}} = \frac{N_{\text{select}}}{f_{\text{sel}}} = \frac{200}{0,02} = 10\,000 \text{ snímků}$$

1. Čistý pozorovací čas při snímkovací frekvenci 50 Hz (čas snímku 20 ms):

$$T_{\text{obs}} = 10\,000 \cdot 0,020 \text{ s} = 200 \text{ sekund} = 3,33 \text{ minuty}$$

Závěr: Pravděpodobnost P_{lucky} činí 2,06 %. Během pouhých 3,3 minut čistého času získá kamera 10 000 expozic, z nichž výběr 200 nejlepších (2 %) poskytne difrakčně limitovaný obraz s rozlišením $0,14''$.

Úloha 10: Posun centroidu v Shack–Hartmannově senzoru

Zadání: Shack–Hartmannův senzor má matici mikročoček s ohniskovou vzdáleností $f_L = 35,0 \text{ mm}$ a roztečí mikročoček $d_{\text{sub}} = 0,25 \text{ mm}$ v rovině detektoru. Vlnoplocha dopadající na danou subaperturu vykazuje fázový sklon odpovídající odchylce optické dráhy $\Delta W = 0,42 \mu\text{m}$ napříč rozměrem subapertury. Vypočtěte úhlový sklon vlnoplochy α a fyzický posun těžiště ohniskové skvrny Δx na detektoru. Určete, kolika pixelům posun odpovídá, je-li velikost pixelu senzoru $7,4 \mu\text{m}$. **Fyzikální princip a vzorce:**

1. Úhlový sklon vlnoplochy: $\alpha = \frac{\Delta W}{d_{\text{sub}}}$.
2. Posun ohniskové skvrny na detektoru: $\Delta x = f_L \cdot \alpha$.

Numerický výpočet:

1. Úhlový sklon:

$$\alpha = \frac{0,42 \times 10^{-6} \text{ m}}{0,25 \times 10^{-3} \text{ m}} = 1,68 \times 10^{-3} \text{ rad} = 1,68 \text{ mrad} \approx 346,5''$$

1. Fyzický posun skvrny:

$$\Delta x = 35,0 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot 1,68 \times 10^{-3} = 5,88 \times 10^{-5} \text{ m} = 58,8 \mu\text{m}$$

1. Posun v pixelech detektoru:

$$N_{\text{pix}} = \frac{58,8 \mu\text{m}}{7,4 \mu\text{m}/\text{pixel}} = 7,95 \text{ pixelu}$$

Závěr: Centroid difrakční skvrny se posune o $58,8 \mu\text{m}$ (téměř 8 pixelů), což algoritmus CoG detekuje s přesností lepší než 0,05 pixelu.

Úloha 11: Kuželový efekt laserové vodící hvězdy na 8m teleskopu

Zadání: Teleskop s průměrem apertury $D = 8,2 \text{ m}$ využívá laserovou vodící hvězdu LGS v mezoférické sodíkové vrstvě ve výšce $H = 90 \text{ km}$. Uvažujeme turbulentní vrstvu atmosféry v oblasti tropopauzy ve výšce $h = 12 \text{ km}$. Vypočtete průměr $D(h)$ světelného kužele laserové hvězdy ve výšce h a určete plochu neprozkoumané periferní zóny apertury (kuželový efekt). **Fyzikální princip a vzorec:** Paprsky z LGS z výšky H konvergují k zrcadlu v kuželu. Ve výšce h má průměr kužele velikost:

$$D(h) = D \left(1 - \frac{h}{H} \right)$$

Zatímco světlo ze vzdálené hvězdy (v nekonečnu) prochází válcem o plném průměru D , laserový kužel pokrývá menší průměr $D(h)$.

Numerický výpočet:

1. Průměr kužele ve výšce 12 km:

$$D(12 \text{ km}) = 8,2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{12}{90} \right) = 8,2 \cdot (1 - 0,1333) = 8,2 \cdot 0,8667 = 7,107 \text{ m}$$

1. Rozdíl poloměrů na okraji apertury:

$$\Delta r = \frac{D - D(h)}{2} = \frac{8,2 - 7,107}{2} = 0,546 \text{ m} \approx 55 \text{ cm}$$

1. Plošné pokrytí turbulentní vrstvy:

$$\frac{A(h)}{A_0} = \left(1 - \frac{h}{H} \right)^2 = (0,8667)^2 = 0,751 \approx 75,1 \%$$

Závěr: Ve výšce 12 km pokrývá laserový svazek pouze 75 % plochy cylindru skutečné hvězdy. Okrajový prstenec o šířce 55 cm není laserem sondován, což způsobuje zbytkovou fázovou chybu (kuželový efekt). K její eliminaci využívá VLT soustavu čtyř laserů (tomografická rekonstrukce LTAO).

Úloha 12: Mezní úhlové rozlišení interferometru VLT

Zadání: Interferometr VLT na Cerro Paranal kombinuje pomocné teleskopy AT na maximální projektované bázi $B_{\max} = 140,0$ m. Vypočtete teoretické úhlové rozlišení interferometru v infračerveném pásmu K ($\lambda = 2,2 \mu\text{m}$) a v pásmu N ($\lambda = 10,0 \mu\text{m}$) v milivteřinách (mas). **Fyzikální princip a vzorec:** Prostorové rozlišení interferometru je dáno polovinou vlnové délky dělené délkou báze:

$$\theta_{\text{res}} \approx \frac{\lambda}{2B} \quad (\text{případně } \frac{\lambda}{B} \text{ podle definice})$$

Standardní interferometrická konvence pro separaci detailů definuje limitní rozlišení jako:

$$\theta_{\text{res}} = \frac{\lambda}{B} \quad [\text{rad}]$$

Numerický výpočet:

1. Pro pásmo K ($\lambda = 2,2 \mu\text{m} = 2,2 \times 10^{-6}$ m):

$$\theta_K = \frac{2,2 \times 10^{-6} \text{ m}}{140,0 \text{ m}} = 1,571 \times 10^{-8} \text{ rad}$$

Převod na milivteřiny:

$$\theta_K = 1,571 \times 10^{-8} \cdot \left(\frac{180 \cdot 3600 \cdot 1000}{\pi} \right) = 1,571 \times 10^{-8} \cdot 2,06265 \times 10^8 \approx 3,24 \text{ mas}$$

(Při kritériu $\lambda/2B$ je to dokonce 1,62 mas!).

1. Pro pásmo N ($\lambda = 10,0 \mu\text{m} = 1,0 \times 10^{-5}$ m):

$$\theta_N = \frac{10,0 \times 10^{-6} \text{ m}}{140,0 \text{ m}} = 7,143 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 14,73 \text{ mas}$$

Závěr: VLT dosahuje v pásmu K rozlišení 3,24 mas (0,0032"). To je 15× ostřejší obraz než u vesmírného dalekohledu HST a umožňuje přímo rozlišit vnitřní hranice akrečních disků u mladých hvězd.

Úloha 13: Měření úhlového průměru hvězdy z interferometrické viditelnosti

Zadání: Interferometrické pozorování jasné hvězdy na vlnové délce $\lambda = 1,65 \mu\text{m}$ (H -pásmo) na bázi o délce $B = 65,0$ m vykázalo normalizovanou viditelnost proužků $V = 0,582$. Za předpokladu modelu rovnoměrného zářícího disku určete úhlový průměr hvězdy θ_{UD} v milivteřinách. **Fyzikální princip a vzorec:** Podle van Cittert–Zernikeova teorému je viditelnost rovnoměrného disku:

$$V(x) = \left| \frac{2J_1(x)}{x} \right|, \quad \text{kde } x = \frac{\pi B \theta_{\text{UD}}}{\lambda}$$

Pro malé hodnoty x lze Besselovu funkci rozvinout do řady:

$$\frac{2J_1(x)}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192}$$

Numerický výpočet:

1. Využijeme aproximaci pro $V \approx 0,582$: -

$1 - \frac{x^2}{8} \approx 0,582 \Rightarrow \frac{x^2}{8} \approx 0,418 \Rightarrow x^2 \approx 3,344 \Rightarrow x \approx 1,8286$. - Zpětné dosazení do přesné Besselovy funkce: $\frac{2J_1(1,83)}{1,83} = \frac{2 \cdot 0,5815}{1,83} = 0,635$ (pro přesnou hodnotu 0,582 je přesné numerické řešení $x = 1,942$).

2. Známe $x = 1,942$:

$$x = \frac{\pi B \theta_{UD}}{\lambda} \Rightarrow \theta_{UD} = \frac{x \lambda}{\pi B}$$

1. Dosazení hodnot:

$$\theta_{UD} = \frac{1,942 \cdot 1,65 \times 10^{-6} \text{ m}}{\pi \cdot 65,0 \text{ m}} = \frac{3,2043 \times 10^{-6}}{204,20} = 1,569 \times 10^{-8} \text{ rad}$$

1. Převod na milivteřiny:

$$\theta_{UD} = 1,569 \times 10^{-8} \cdot 2,06265 \times 10^8 \text{ mas} = 3,24 \text{ mas}$$

Závěr: Úhlový průměr hvězdy je $\theta_{UD} = 3,24 \text{ mas}$. Známe-li paralaxu hvězdy z družice Gaia (např. $\pi = 20 \text{ mas} \Rightarrow d = 50 \text{ pc}$), odpovídá tento úhel reálnému fyzickému poloměru $R = 17,4 R_{\odot}$.

Úloha 14: Srovnání etendue observatoře Vera Rubin a HST

Zadání: Vypočítejte etendue ($A\Omega$ metriku) pro: a) Hubble Space Telescope (HST): $D = 2,4 \text{ m}$ (efektivní sběrná plocha $A = 4,0 \text{ m}^2$ se stíněním), kamera WFC3/UVIS se zorným polem $162'' \times 162''$. b) Vera C. Rubin Observatory (LSST): efektivní sběrná plocha $A = 35,0 \text{ m}^2$, kruhové zorné pole o průměru $3,5^\circ$. Určete poměr přehlídkové rychlosti (Survey Speed) obou přístrojů. **Fyzikální princip a vzorce:** Etendue je součinem efektivní sběrné plochy A a prostorového úhlu zorného pole Ω :

$$G = A \cdot \Omega \quad [\text{m}^2 \cdot \text{deg}^2]$$

Numerický výpočet:

1. Zorné pole HST (WFC3): - $162'' = \frac{162}{3600}^\circ = 0,045^\circ$. - $\Omega_{\text{HST}} = (0,045^\circ)^2 = 0,002025 \text{ deg}^2$. - $G_{\text{HST}} = 4,0 \text{ m}^2 \cdot 0,002025 \text{ deg}^2 = 0,0081 \text{ m}^2 \text{ deg}^2$.

1. Zorné pole Vera C. Rubin (LSST): - Poloměr pole $\theta_{\text{max}} = 1,75^\circ$. -

$$\Omega_{\text{Rubin}} = \pi \cdot (1,75^\circ)^2 = \pi \cdot 3,0625 = 9,621 \text{ deg}^2$$

$$G_{\text{Rubin}} = 35,0 \text{ m}^2 \cdot 9,621 \text{ deg}^2 = 336,74 \text{ m}^2 \text{ deg}^2$$

1. Poměr přehlídkové rychlosti:

$$\text{Poměr} = \frac{G_{\text{Rubin}}}{G_{\text{HST}}} = \frac{336,74}{0,0081} \approx 41\,570 \times$$

Závěr: Observatoř Vera C. Rubin má více než $41\,500 \times$ **vyšší etendue** než Hubble Space Telescope! Co by HST mapoval po dobu čtyř set let, zvládne teleskop Vera Rubin nasnímat za pouhé 3 noci.

Úloha 15: Tepelné emise zrcadla a kryogenní chlazení JWST

Zadání: James Webb Space Telescope (JWST) má primární zrcadlo o ploše $A = 25,4 \text{ m}^2$ s emisivitou zlatého povrchu $\epsilon \approx 0,02$ v infračerveném oboru ($\lambda = 10 \text{ }\mu\text{m}$). Vypočtete celkový zářivý výkon tepelného vyzařování primárního zrcadla podle Stefanova-Boltzmannova zákona pro: a) pokojovou teplotu při testech na Zemi ($T_1 = 293 \text{ K}$), b) provozní teplotu na dráze kolem Lagrangeova bodu L2 ($T_2 = 45 \text{ K}$). Určete poměr emitovaného tepelného šumu zrcadla mezi oběma stavy. **Fyzikální princip a vzorce:** Celkový tepelný zářivý výkon vyzařovaný plochou A s emisivitou ϵ je dán vztahem:

$$P = \epsilon \sigma_{\text{SB}} A T^4$$

kde $\sigma_{\text{SB}} = 5,6704 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta.

Numerický výpočet:

1. Pokojová teplota na Zemi ($T_1 = 293 \text{ K}$): - $T_1^4 = (293)^4 = 7,370 \times 10^9 \text{ K}^4$. - Zářivý výkon:

$$P_1 = 0,02 \cdot 5,6704 \times 10^{-8} \cdot 25,4 \cdot 7,370 \times 10^9 = 0,02 \cdot 1,4403 \times 10^{-6} \cdot 7,370 \times 10^9 \approx 212,3 \text{ W}$$

1. Pasivně chlazené zrcadlo na L2 za pětivrstevným slunečním štítem ($T_2 = 45 \text{ K}$): -

$$T_2^4 = (45)^4 = 4,1006 \times 10^6 \text{ K}^4. - \text{Zářivý výkon:}$$

$$P_2 = 0,02 \cdot 5,6704 \times 10^{-8} \cdot 25,4 \cdot 4,1006 \times 10^6 \approx 0,000118 \text{ W} = 118 \text{ }\mu\text{W}$$

1. Poměr vyzařovaného tepelného výkonu:

$$\text{Poměr} = \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{293}{45} \right)^4 = (6,511)^4 \approx 1\,797\,000 \times$$

Závěr: Ochlazením primárního zrcadla z 293 K na 45 K klesl tepelný výkon vyzařovaný samotným dalekohledem téměř 1,8 milionkrát! Bez tohoto pasivního kryogenního stínění by tepelné fotony ze zrcadla kompletně oslepily vědecké infračervené detektory přístrojů NIRCам a MIRI.

Dodatek D: Encyklopedický glosář astronomické optiky (A–Ž)

❶ ZAJÍMAVOST

Struktura glosáře Tento glosář obsahuje více než 60 základních i pokročilých odborných hesel z geometrické optiky, teorie aberací, vlnové difrakce, fyziky atmosféry, adaptivní optiky a optické interferometrie. Každé heslo obsahuje exaktní definici, matematický zápis (kde je relevantní) a astrofyzikální kontext.

A

Abbeovo číslo (V_d) Bezrozměrná veličina charakterizující optickou disperzi materiálu: $V_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$, kde n_d, n_F, n_C jsou indexy lomu pro Fraunhoferovy spektrální čáry helia (587,6 nm) a vodíku (486,1 nm a 656,3 nm). Vyšší hodnota značí nižší barevnou disperzi. **ABCD matice** Přenosová matice 2×2 v paraxiální

optice transformující stavový vektor paprsku $(y, u)^T$ centrovanou soustavou: $\begin{pmatrix} y_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$. Pro

vstup i výstup v témže prostředí platí $\det(\mathbf{M}) = AD - BC = 1$. **Adaptivní optika (Adaptive Optics, AO)**

Technologie kompenzující fázové deformace vlnoplochy způsobené atmosférickou turbulencí v reálném čase pomocí vlnoplochových senzorů, rychlých procesorů a deformovatelných zrcadel s pracovní frekvencí typicky 500 až 2000 Hz. **Adaptivní sekundární zrcadlo (Adaptive Secondary Mirror, ASM)** Sekundární zrcadlo

teleskopu vyrobené jako tenká pružná sklokeramická skořepina (tloušťka cca 1 mm) podepřená stovkami až tisíci elektromagnetických aktuátorů, fungující přímo jako deformovatelné zrcadlo systému adaptivní optiky bez nutnosti přidavných odrazných ploch. **Airyho disk** Centrální zářivý difrakční terčik vznikající ohybem světla

na kruhové apertuře o průměru D . Úhlový poloměr prvního temného prstence je $\theta_1 \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$ a obsahuje 83,8 % veškeré světelné energie bodového zdroje. **Aktivní optika (Active Optics)** Pomalý elektromechanický

systém (pracovní frekvence 0,01 až 1 Hz) kompenzující gravitační průhyby velkých primárních zrcadel a teplotní dilatace nosného tubusu při změnách polohy dalekohledu. **Anastigmát** Optická soustava, u níž jsou

současně korigovány tři primární geometrické aberace: sférická vada ($S_I = 0$), koma ($S_{II} = 0$) i astigmatismus ($S_{III} = 0$). **Aplanát** Optická soustava, která je současně prostá sférické aberace i komy ($S_I = S_{II} = 0$) a splňuje Abbéovu sinusovou podmínku. Příkladem je dvouzrcadlový teleskop Ritchey–Chrétien. **Astigmatismus (W_{222})** Geometrická aberace mimoosových paprsků, při níž vlnoplocha získává

toroidní zakřivení a paprsky v tangenciální a sagitální rovině konvergují do dvou vzájemně posunutých ohniskových linií. Roste kvadraticky s úhlem pole ($\propto H^2$).

toroidní zakřivení a paprsky v tangenciální a sagitální rovině konvergují do dvou vzájemně posunutých ohniskových linií. Roste kvadraticky s úhlem pole ($\propto H^2$).

B

Bispektrum (Trojitá korelace) Fourierovský součin tří prostorových frekvencí $\hat{I}(\mathbf{u}_1)\hat{I}(\mathbf{u}_2)\hat{I}^*(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$

využívaný ve speckle interferometrii a aperturové syntéze k rekonstrukci pravé fáze astronomických objektů nezávisle na atmosférickém fázovém šumu.

C

Cassegrainův teleskop Dvouzrcadlová reflexní soustava tvořená konkávním parabolickým primárním zrcadlem a konvexním hyperbolickým sekundárním zrcadlem odrážejícím svazek otvorem v primáru. **Centrální stínění (Obstrukce)** Geometrické stínění části primárního zrcadla sekundárním zrcadlem a jeho nosnými rameny. Kvantifikuje se lineárním poměrem $\epsilon = d_{\text{sec}}/D$. Způsobuje mírné zúžení centrálního difrakčního píku za cenu přerozdělení energie do difrakčních kroužků a poklesu kontrastu na středních prostorových frekvencích.

D

Dall–Kirkhamův teleskop Dvouzrcadlová konfigurace využívající protáhlé elipsoidní primární zrcadlo ($-1 < \kappa_1 < 0$) a přesné sférické sekundární zrcadlo ($\kappa_2 = 0$). Má nulovou osovou sférickou vadu, avšak silnou mimoosovou komu. **Dawesův limit** Empirické pravidlo pro mezní rozlišení těsných dvojhvězd stejné jasnosti: $\theta''_{\text{Dawes}} \approx \frac{116}{D_{\text{mm}}}$. **Deformovatelné zrcadlo (Deformable Mirror, DM)** Zrcadlo s aktivně řízeným tvarem povrchu ovládané maticí piezoelektrických, elektrostričních, MEMS nebo magnetických aktuátorů, korigující fázové vady vlnoplochy v adaptivní optice. **Difrakční limit** Fundamentální teoretická mez úhlového rozlišení optického přístroje daná vlnovou povahou světla: $\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$. Žádná neaberovaná optická soustava nemůže vytvořit menší obraz bodového zdroje. **Distorze (W_{311})** Pátá Seidelova aberace, která neovlivňuje ostrost zobrazení bodu, nýbrž způsobuje plošnou nelinearitu příčného zvětšení. Vede k soudkovitému (barrel) nebo poduškovitému (pincushion) zkreslení geometrie obrazového pole.

E

Eikonál Hamiltonův charakteristický funkcionál optické dráhy paprsků spojujících předmětový a obrazový prostor, jehož derivace podle souřadnic určují prostorové směry a vlnové aberace svazku. **Etendue ($A\Omega$)** Geometrická propustnost optické soustavy definovaná jako součin efektivní sběrné plochy A a prostorového úhlu zorného pole Ω . Podle Liouvilleova teorému se etendue v bezeztrátové soustavě zachovává.

F

Fermatův princip Variační zákon geometrické optiky formulovaný Pierrem de Fermatem (1662): Světlo se mezi dvěma body šíří po trajektorii, pro niž je optická dráha stacionární ($\delta \int n ds = 0$). **Friedův parametr (r_0)** Efektivní koherentní průměr atmosférické turbulence zavedený Davidem L. Friedem (1966). Představuje průměr imaginárního dalekohledu, jehož difrakční rozlišení odpovídá seeingu velké apertury: $r_0 \propto \lambda^{6/5} (\cos \gamma)^{3/5}$.

G

Greenwoodův koherentní čas (τ_0) Časový interval, po kterém se v důsledku pohybu větru změní fáze atmosférické vlnoplochy o 1 rad: $\tau_0 = 0,314 \frac{r_0}{v}$. Určuje požadovanou vzorkovací frekvenci adaptivní optiky ($f \geq 1/\tau_0$). **Gregoryho teleskop** Dvouzrcadlová soustava tvořená konkávním primárním paraboloidem a konkávním sekundárním elipsoidem umístěným až za primárním ohniskem. Vytváří reálné intermediální ohnisko s polní clonou, ideální pro solární astronomii.

I

Interferometrie dlouhýchází Metoda prostorové syntézy apertury, při níž se koherentně kombinují světelné svazky ze separovaných dalekohledů rozmístěných na bázích desítek až stovek metrů (např. VLTI, CHARA).

Izoplanatický úhel (θ_0) Maximální úhlová vzdálenost na obloze, v níž lze atmosférickou vlnoplochu považovat za identickou: $\theta_0 = 0,314 \frac{r_0}{h}$. Definuje poloměr zorného pole korigovatelného klasickou adaptivní optikou s jedním zrcadlem.

K

Klevcovův systém Katadioptrický otevřený Cassegrainův systém využívající sférické primární zrcadlo a subapertruní sekundární korekční jednotku složenou z meniskové čočky a Manginova zrcadla. Vyniká rychlou teplotní ekvilibrací. **Kolmogorovův model turbulence** Statistická teorie turbulence postulující bezeztrátový přenos kinetické energie z velkých vírů na menší v setrvačné suboblasti, kde strukturní funkce rychlosti a indexu lomu splňují zákon dvou třetin: $D_n(r) = C_n^2 r^{2/3}$. **Koma (W_{131})** Mimoosová Seidelova aberace projevující se asymetrickým protažením obrazu bodu do tvaru komety s vrcholovým úhlem 60° . Roste lineárně se vzdáleností od osy (H) a kubicky s aperturou (ρ^3). **Konická konstanta (κ)** Schwarzschildův parametr charakterizující typ kuželosečkové plochy: $\kappa = -e^2$. Pro kouli $\kappa = 0$, pro paraboloid $\kappa = -1$, pro hyperboloid $\kappa < -1$. **Korschova konfigurace** Třízrcadlový anastigmat (TMA) s mezilehlým reálným ohniskem a přístupnou reálnou výstupní pupilou, umožňující integraci zrcadla pro jemné navádění (FSM) a širokoúhlé rovinné zobrazení (JWST, Euclid).

L

Laserová vodící hvězda (Laser Guide Star, LGS) Umělý referenční bodový zdroj pro vlnoploché senzory adaptivní optiky, vytvořený buď excitací atomů v mezoférické sodíkové vrstvě ve výšce 90 km laserem na vlnové délce 589 nm, nebo Rayleighovým rozptylem v nižších výškách. **Lucky Imaging (Šťastné zobrazování)** Pozorovací metoda založená na pořizování desetitisíců krátkých expozic ($t \leq \tau_0$) nízkoušumovými kamerami EMCCD/sCMOS, výběru nejklidnějších snímků (nejlepších 1–5 %) a jejich složení algoritmem Shift-and-Add k dosažení difrakčního limitu.

M

Maksutovova soustava Katadioptrický optický systém kombinující sférické primární zrcadlo se silně prohnutým koncentrickým skleněným meniskem na vstupu, který kompenzuje sférickou vadu zrcadla.

Manginovo zrcadlo Menisková čočka s druhou plochou pokovenou jako reflexní odrazná vrstva. Světlo prochází čočkou dvakrát (před i po odrazu), což umožňuje efektivní achromatickou korekci aberací.

Maréchalova aproximace Analytický vztah spojující Strehlovo číslo S s disperzí fázových chyb vlnoplochy σ_ϕ :

$S \approx \exp(-\sigma_\phi^2) \approx 1 - \sigma_\phi^2$. **Modulační přenosová funkce (MTF)** Modul optické přenosové funkce

$MTF(\mathbf{u}) = |OTF(\mathbf{u})|$, udávající míru zachování kontrastu sinusové mřížky v závislosti na prostorové frekvenci $\mathbf{u}$.

N

Nollův indexační systém Jednorozměrné číslování $j = 1, 2, 3, \dots$ Zernikeových polynomů $Z_n^m(\rho, \theta)$, seřazené podle radiálního řádu n a azimutálního indexu m , zavedené Robertem Nollem (1976).

P

Petzvalova plocha Zakřivená plocha, na níž leží optimální zaostření centrované optické soustavy prosté astigmatismu. Poloměr křivosti Petzvalovy plochy zrcadlové soustavy je dán vztahem $\frac{1}{R_p} = 2 \sum (-1)^i / R_i$.

Point Spread Function (PSF) Rozptylová funkce bodu: dvourozměrné prostorové rozložení intenzity v ohniskové rovině odpovídající ideálnímu bodovému zdroji záření. Představuje impulsní odezvu optické soustavy. **Pyramidový vlnoplochový senzor** Senzor měřící fázové sklony vlnoplochy pomocí čtyřboké skleněné mikrojechlanové pyramidy umístěné v ohniskové rovině, vytvářející čtyři konjugované obrazy pupily.

R

Rayleighovo kritérium Kritérium rozlišitelnosti dvou bodových zdrojů: maximum difrakčního obrazce prvního zdroje splývá s prvním minimem druhého zdroje ($\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$). **Ritchey–Chrétienův teleskop** Aplanatická dvouzrcadlová soustava tvořená dvěma asférickými hyperboloidy ($\kappa_1 < -1, \kappa_2 < -1$), u níž je zcela eliminována osová sférická vada i mimoosová koma ($S_I = S_{II} = 0$).

S

Schmidtova komora Vysoce světelná katadioptrická soustava tvořená sférickým primárním zrcadlem a tenkou asférickou korekční deskou čtvrtého řádu umístěnou ve středu křivosti zrcadla. **Seeing** Úhlové rozmazání a rychlé chvění obrazu bodového hvězdného zdroje způsobené dynamickými fluktuacemi indexu lomu v turbulentní zemské atmosféře: $\theta_{\text{seeing}} \approx 0,98 \frac{\lambda}{r_0}$. **Seidelovy aberace** Pět klasických geometrických vad 3. řádu centrovaných optických soustav odvozených Philippem von Seidelem (1857): sférická vada (S_I), koma (S_{II}), astigmatismus (S_{III}), Petzvalovo sklenutí pole (S_{IV}) a distorze (S_V). **Shack–Hartmannův senzor** Vlnoplochový senzor tvořený maticí miniaturních mikročoček, který měří lokální prostorové gradienty vlnoplochy prostřednictvím posunu těžišť difrakčních ohniskových skvrn. **Strehlovo číslo (S)** Kvantitativní měřítko kvality optického zobrazení definované jako poměr špičkové intenzity v centru aberovaného obrazce k teoretickému difrakčnímu maximu ideální soustavy: $S = I(0)/I_0(0)$. Pro difrakčně limitovanou soustavu platí $S \geq 0,80$.

T

Třízrcadlový anastigmat (Three-Mirror Anastigmat, TMA) Optická architektura využívající tři asférická zrcadla pro současnou eliminaci sférické vady, komy, astigmatismu i Petzvalova sklenutí pole, umožňující difrakčně limitované zobrazení na polích o průměru několika stupňů (Vera Rubin, Roman, JWST).

U

Uzávěrová fáze (Closure Phase) Interferometrický fázový invariant definovaný pro trojici dalekohledů jako součet fází proužků: $\Phi_{\text{closure}} = \Phi_{12} + \Phi_{23} + \Phi_{31}$. Eliminuje veškeré přístrojové a atmosférické fázové chyby.

V

Van Cittert–Zernikeův teorém Základní teorém optické interferometrie postulující, že komplexní prostorový stupeň koherence pole $\mathcal{V}(u, v)$ vyzařovaného vzdáleným nekoherentním zdrojem je roven dvourozměrné Fourierově transformaci prostorového rozložení intenzity jasu zdroje.

Z

Zernikeovy polynomy (Z_n^m) Množina ortogonálních polynomů na jednotkovém disku zavedená Fritsem Zernikem (1934), separovatelná do radiální složky $R_n^m(\rho)$ a azimutální goniometrické složky $\cos(m\theta) / \sin(m\theta)$. Standard pro dekompozici optických vlnoploch v adaptivní optice.